BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM

IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. DRITTER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON E. DE JONQUIÈRES ALS TITELBILD,
DEN IN TEXT GEDRUCKTEN BILDNISSEN VON A. HELLER UND G. WERTHEIM,
SOWIE 37 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Sach-Register.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Geschichte des Altertums.

Geschichte des Mittelalters.

Geschichte der neueren Zeit.

Aktuelle Fragen.

Über Periodeneinteilung in der Geschichte der Mathematik.

Von G. Eneström in Stockholm.

Wenn man eine historische Darstellung der bisherigen Untersuchungen auf einem sehr beschränkten Gebiete der Mathematik geben will, kann man zwar den Lesern die Übersicht erleichtern, wenn man die Darstellung in Abschnitte einteilt, aber von wesentlicher Bedeutung ist ein solches Verfahren hier nicht. Hat man dagegen die Geschichte einer umfangreichen mathematischen Theorie oder sogar der ganzen Mathematik in einem Zusammenhange zu bearbeiten, und begnügt man sich nicht mit einer chronologisch-tabellarischen Behandlung des gegebenen Materials oder mit einer Reihe von wissenschaftlichen Biographien der in Betracht kommenden Mathematiker, so ist es wohl durchaus notwendig, besondere Marksteine zu wählen, durch die man entweder die ganze Schilderung oder wenigstens Hauptstücke derselben in Zeitabschnitte einteilt. Zu solchen Marksteinen kann z. B. der Beginn eines neuen Jahrhunderts oder eine andere runde Jahreszahl, ein bedeutungsvolles weltgeschichtliches Ereignis oder das Auftreten eines hervorragenden Mathematikers gewählt werden; in jedem Falle hat man die Möglichkeit bekommen, auch bei einer systematischen Behandlung des Stoffes die verschiedenartigen Untersuchungen eines gewissen Zeitraumes zusammenzustellen, ehe man zur Schilderung der nachfolgenden Forschungen übergeht. Nennt man „Periode", den Zeitraum zwischen zwei solchen Marksteinen, die einander nicht allzu nahe liegen, so bietet es gar keine Schwierigkeit, die historische Darstellung in Perioden einzuteilen, und man hat dabei ganz freie Wahl, so dafs man z. B., um überall die Übersichtlichkeit zu bewahren, zuerst wichtige Ereignisse, dann runde Jahreszahlen, und zuletzt das Auftreten bedeutender Mathematiker als Periodengrenzen anwenden kann. Freilich kann es dabei leicht vorkommen, dafs Arbeiten, die aus inneren oder äusseren Gründen zusammengehören, in der Darstellung weit von einander entfernt werden müssen.

Legt man dagegen grofses Gewicht darauf, dafs die mathematischen Untersuchungen, die wesentlich zusammengehören, nicht unnötigerweise von einander getrennt werden, so mufs man sich offenbar nach solchen

Marksteinen umsehen, welche das Ende oder den Beginn einer im wissenschaftlichen Sinne abgeschlossenen oder neuen Zeit bezeichnen; da es aber von vornherein gar nicht ausgemacht ist, dafs Marksteine dieser Art wirklich existieren, wird die erste Frage, die wir hier zu erledigen haben, die folgende sein: Giebt es überhaupt in der Geschichte der Mathematik Perioden im wissenschaftlichen Sinne, d. h. Zeitabschnitte, die wissenschaftlich abgeschlossen sind? Diese Frage ist zwar von einigen Verfassern im Vorübergehen gestreift, aber meines Wissens noch nicht näher untersucht worden.

Schon bei flüchtiger Überlegung zeigt sich uns ein Umstand, der der Bildung von wissenschaftlich abgeschlossenen Perioden entgegensteht, sobald es sich um die ganze Mathematik oder einen grösseren Teil derselben handelt, nämlich dafs die besonderen mathematischen Theorien sich oft unabhängig von einander entwickelt haben, und schon aus diesem Grunde erweist es sich vorläufig wenig wahrscheinlich, dafs sie alle oder wenigstens fast alle gleichzeitig zu einem gewissen Abschlusse gebracht werden. Bei genauerer Untersuchung der Frage entdecken wir noch einen ähnlichen Umstand, nämlich dafs die Entwickelung jeder einzelnen Theorie im allgemeinen nicht nach logischen Gesetzen vor sich geht, sondern von zufälligen Verhältnissen beeinflufst worden ist, so dafs in vielen Theorien neue Probleme auftreten, ehe die alten noch erledigt worden sind, und die Theorie selbst eigentlich nie zu einem gewissen Abschlusse gelangt. Um die Einwirkung dieses letzten Umstandes deutlich hervorzuheben, erlauben wir uns anzunehmen, dafs die Geometrie lediglich den Zweck gehabt hat, die drei berühmten Probleme: *duplicatio cubi*, *trisectio anguli*, *quadratura circuli* zu lösen, und machen zuerst die weitere Annahme, dafs die Geometrie sich vollständig regelmäfsig entwickelt hat. Dann könnte man die Geschichte der Geometrie in grofsen Zügen etwa auf folgende Weise darstellen. Zuerst wurden die elementar-geometrischen Sätze erfunden, die geeignet schienen, die drei Probleme zu lösen, aber nach vielen Versuchen erwies sich die Lösung auf diesem Wege faktisch unmöglich; damit war die erste Periode der Geometrie abgeschlossen. Die zweite Periode begann mit Bestrebungen neue geometrische Gebilde aufzufinden, und nachdem die Kegelschnitte entdeckt worden waren, gelang es die zwei ersten Probleme zu erledigen; dagegen konnte das dritte Problem mit den vorhandenen Hilfsmitteln nicht gelöst werden, und die zweite Periode war beendet. Während der dritten Periode machte man anfangs viele Versuche, die Quadratur des Kreises vermittelst höherer algebraischer Kurven zu finden, aber da diese immer ohne Erfolg waren, stellte man Untersuchungen über die zwei folgenden Fragen an: 1) ist es möglich, die Quadratur des Kreises auf diesem Wege zu ermitteln?; 2) wenn es unmöglich ist, welche

Kurven braucht man um das Problem zu lösen?, und nachdem diese zwei Fragen erledigt waren, war auch die dritte Periode abgeschlossen.

Wäre die Entwickelung der Geometrie regelmäſsig vor sich gegangen, so würde man also drei wirkliche Perioden gehabt haben, aber die Geschichte der Mathematik hat etwas ganz anderes zu erzählen. Sie belehrt uns nämlich u. a., daſs für die Quadratur des Kreises höhere Kurven benutzt wurden, lange bevor man darauf verzichtet hatte, dieselbe rein elementar zu finden, und daſs auch im übrigen die Entwickelung nicht begriffsmäſsig gewesen ist, so daſs man gar nicht drei Perioden unterscheiden kann. Hierzu kommt noch, daſs die Erledigung der Frage, ob die Quadratur des Kreises vermittelst algebraischer Kurven ausgeführt werden kann, nicht eine *geometrische* Errungenschaft gewesen ist, und man kann also eigentlich nicht sagen, daſs die fingierte Geometrie an sich zu einem Abschlusse gebracht worden ist.

Aus dem, was wir jetzt bemerkt haben, dürfte hervorgehen, daſs die Geschichte der Mathematik nur ausnahmsweise Perioden in streng wissenschaftlichem Sinne aufweisen kann, und besonders unwahrscheinlich muſs das Vorkommen solcher Perioden für die moderne Mathematik sein, die aus einer groſsen Anzahl von verschiedenen Theorien besteht. Auf der anderen Seite ist es ja unmöglich, eine übersichtliche Darstellung der Entwickelungsgeschichte der Mathematik zu bieten, ohne dieselbe in Zeitabschnitte zu verteilen. Man könnte meinen, daſs es zweckmäſsiger wäre, für jede einzelne Theorie die Grenzen zwischen den Zeitabschnitten nur mit Bezugnahme auf den Entwickelungsgang dieser Theorie zu bestimmen, ohne sich darum zu bekümmern, ob zwei Theorien dabei dieselben Zeitgrenzen bekommen oder nicht. Bei der Darstellung würde man in solchem Falle zuerst in systematischer Reihenfolge die Geschichte der verschiedenen Theorien bis zur ersten Zeitgrenze (die also für jede Theorie verschieden sein kann) verfolgen, dann die weitere Entwickelung derselben Theorien in derselben Reihenfolge bis zur zweiten Zeitgrenze (die auch für jede Theorie wechseln kann) behandeln u. s. w. . Gewiſs wäre es unter solchen Umständen leichter zu vermeiden, daſs in der Darstellung zusammengehörende Forschungsresultate von einander getrennt werden, aber die Übersichtlichkeit geht verloren, und das Verfahren bringt auch andere Übelstände mit sich. Viel besser wäre es dann meiner Ansicht nach, die verschiedenen Theorien besonders zu behandeln, aber auch dann ist es erforderlich, eine kurze Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik hinzuzufügen, und man wird also auf die frühere Frage über Periodeneinteilung zurückgeführt. Freilich hat die Frage dann nicht so groſse Bedeutung wie früher, und man kann darum ohne eigentliche Übelstände als Periodengrenzen solche Zeitpunkte wählen, in denen entweder sehr

wichtige Theorien zu einem gewissen Abschlusse gebracht worden sind oder Neuerungen auftreten, die für die Entwickelung auf einem wichtigen Gebiete als epochemachend betrachtet werden können. Selbstverständlich ist es nicht notwendig für alle Theorien die Entwickelung *genau* bis zum bestimmten Zeitpunkte zu verfolgen, aber natürlich dürfen Abweichungen nicht ohne wichtige Gründe vorkommen.

Ich habe bisher vorausgesetzt, daſs bei der Periodeneinteilung nur *Zeit*grenzen in Betracht kommen können, und für die moderne Mathematik ist wohl diese Voraussetzung ohne weitere Begründung erlaubt. Für die ältere Mathematik dagegen stellt sich die Sache etwas anders, und es ist also notwendig zu untersuchen, inwieweit bei der Schilderung derselben auch *Volks*grenzen berücksichtigt werden müssen. Betrachtet man die Geschichte der Mathematik in erster Linie als eine Abteilung der Kulturgeschichte, so liegt es natürlich sehr nahe, die Geschichte der Mathematik in Abschnitte einzuteilen, die kulturhistorisch abgeschlossen sind, und bei einer solchen Einteilung bekommen die Volksgrenzen eine hervorragende Bedeutung für das Altertum und das Mittelalter. Von diesem Gesichtspunkte aus empfiehlt es sich also, mit Herrn M. Cantor folgende Hauptabschnitte einzuführen: 1) Ägypter; 2) Babylonier; 3) Griechen und Byzantiner; 4) Römer; 5) Inder; 6) Chinesen; 7) Araber; 8) Christliches Mittelalter, und den letzten Abschnitt im Bedarfsfalle nach Volksstämmen zu gliedern. Dann wäre zu untersuchen, ob und auf welche Weise die Hauptabschnitte in Perioden eingeteilt werden sollen.

Betrachtet man dagegen die Geschichte der Mathematik in erster Linie als einen selbständigen Zweig der mathematischen Wissenschaften, so verlieren die Volksgrenzen den gröſsten Teil ihrer Bedeutung; nur in den Fällen, wo die Volksgrenzen einen wesentlichen und wirklich konstatierten Einfluſs auf die Entwickelung der Mathematik gehabt haben, sind sie bei der Periodeneinteilung zu berücksichtigen. Sonst ist es ja gleichgiltig, ob zwei Mathematiker, die etwa gleichzeitig Entdeckungen auf einem gewissen Gebiete gemacht haben, demselben Volksstamme angehören oder nicht. War die eine Entdeckung von der anderen abhängig, so liegt wohl darin ein hinreichender Grund, um dieselben in jedem Falle zusammen zu behandeln; waren sie von einander unabhängig, ist es eigentlich nicht zu ersehen, warum im zweiten Falle die Nationalität des einen Mathematikers eine Trennung von zusammengehörenden Gegenständen verursachen soll.

Wenn man die jetzt angegebenen Grundsätze als richtig anerkennt, dürfte es verhältnismäſsig leicht sein, die Gliederung der Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter durchzuführen, und ich denke mir, daſs sich die folgende Anordnung als zweckmäſsig erweisen wird.

In einer Einleitung behandelt man die vorwissenschaftliche Mathematik der Ägypter und Babylonier sowie der Inder im vorchristlichen Zeitraume, und die erste Periode umfaſst die griechische Mathematik etwa bis zum Tode des APOLLONIOS oder möglicherweise etwas weiter. Die zweite Periode schlieſst die spätgriechische und die römische Mathematik, sowie die indische, die arabische und die christliche Mathematik im Mittelalter bis zum Jahre 1200 ein. Mit dem Auftreten des LEONARDO PISANO fängt die dritte Periode an, und als Ende derselben empfiehlt es sich, die Entdeckung der Lösung kubischer Gleichungen (etwa 1515) zu betrachten.

Mit der vierten Periode beginnt die neuere Mathematik, und dann stellen sich auch die prinzipiellen Schwierigkeiten bei der Periodeneinteilung ein. Wir haben schon oben bemerkt, daſs die einzelnen mathematischen Theorien ziemlich selten zu einem eigentlichen Abschlusse gebracht werden können, und auch wenn ein solcher Abschluſs wirklich konstatiert wird, kann er im allgemeinen nicht zur Periodengrenze gewählt werden, weil die betreffende Theorie für diesen Zweck nicht hinreichend wichtig ist. So z. B. wäre es kaum zu empfehlen, am Anfange des 19. Jahrhunderts eine neue Periode aus dem Grunde zu beginnen, weil die kombinatorische Analysis damals wesentlich aufhörte weiter ausgebildet zu werden. Wir haben also hauptsächlich auf wichtige Neuerungen Rücksicht zu nehmen, aber freilich müssen wir immerhin dafür besorgt sein, daſs wir dabei solche wichtige Entwickelungsmomente, die wesentlich zusammengehören, nicht unnötigerweise trennen. Dagegen ist es meiner Ansicht nach eine Nebensache, ob die wissenschaftliche Wirksamkeit gewisser hervorragender Mathematiker auf zwei Perioden verteilt wird.

Sehen wir jetzt nach, welche Neuerungen auf dem mathematischen Forschungsgebiete seit dem Anfange des 16. Jahrhunderts als besonders wichtig betrachtet werden können! Zuerst begegnet uns da am Ende des 16. Jahrhunderts die Reformation der Algebra und der Trigonometrie durch VIÈTE, und mit derselben könnte man bei ausführlicherer Darstellung sehr gut eine neue Periode beginnen. Die Erfindung der Logarithmen durch NEPER ist zwar wichtig, aber kann aus verschiedenen Gründen hier kaum in Betracht kommen. Dagegen dürfte das Auftreten der analytischen Geometrie entschieden als ein Markstein bezeichnet werden können, und da etwa um dieselbe Zeit wichtige Erfindungen auf den Gebieten der synthetischen Geometrie (durch DESARGUES) und der Zahlentheorie (durch FERMAT) gemacht wurden, empfiehlt es sich der vierten Periode die Zeit etwa 1515—1635 zuzuweisen.

Vor dem Ende des 17. Jahrhunderts haben wir noch eine epochemachende Neuerung zu verzeichnen, nämlich die Entstehung der höheren Analysis, und der damit historisch verknüpften Differentialgeometrie. Es

wäre also angemessen hier eine neue Periode zu beginnen, aber dabei treten gewisse Schwierigkeiten auf. Wählt man als Periodengrenze die ersten Untersuchungen von Newton auf dem Gebiete der höheren Analysis (etwa 1666), so wird die fünfte Periode zu kurz; nimmt man dagegen Bezug auf die erste Veröffentlichung der Gründe des neuen Kalkuls in den Acta eruditorum (1684), wird man genötigt, die eigentliche Entdeckung der höheren Analysis schon in der fünften Periode zu behandeln. Vielleicht wäre es darum angemessen, dieser Periode einen etwas grösseren Zeitraum zuzuweisen, so daſs sie nicht nur die Entdeckung, sondern auch die erste Ausbildung der Infinitesimalrechnung einschlieſst. Eine neue Periode würde also erst dann beginnen, als die analytischen Hilfsmittel wesentlich die Form annahmen, die sie jetzt haben, und der Neuerer auf diesem Gebiete ist ja eigentlich Euler, so daſs die fünfte Periode die die Zeit etwa 1635—1728 umfassen würde.

Wie die Gliederung der Geschichte der modernen Mathematik seit Euler ausgeführt werden soll, ist eine Frage, die um so schwieriger ist, als ein Teil dieses Zeitraumes uns zu nahe liegt, um mit gebührender Objektivität beurteilt werden zu können. Meiner Ansicht nach soll auch nicht die untere Grenze der sechsten Periode festgestellt werden, ehe man über die Einteilung des ganzen 19. Jahrhunderts entschieden hat. Steht man überhaupt von einer solchen Einteilung ab, so dürfte es sich empfehlen die sechste Periode bis zu Cauchys epochemachenden funktionentheoretischen Untersuchungen zu erstrecken; will man dagegen das 19. Jahrhundert in zwei oder mehrere Perioden einteilen, so ist es wohl besser, die mit Euler beginnende Periode am Ende des 18. Jahrhunderts abzuschlieſsen, wofür es gewiſs auch nicht an Gründen fehlt.

Die vorangehenden Überlegungen dürften besonders geeignet sein um ersichtlich zu machen, wie schwierig oder beinahe unmöglich es sein muſs bei einer *wissenschaftlichen* Gesamtdarstellung der Entwickelung der neueren Mathematik eine passende Gliederung durchzuführen, und dadurch bestätigt sich auch meine oben geäuſserte Meinung, daſs man die Entwickelungsgeschichte der Mathematik am besten darstellt, wenn man die einzelnen Theorien besonders behandelt und die Darstellung durch eine kurze Schilderung der Gesamtentwickelung ergänzt.

Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates.

Von FERDINAND RUDIO in Zürich.

I. Einleitung.

Eine der wichtigsten Quellen für die Geschichte der griechischen Geometrie vor EUKLID ist bekanntlich der Bericht, den uns SIMPLICIUS[1*)] in seinem Kommentare zu der Physik des ARISTOTELES hinterlassen hat. Enthält doch dieser Bericht, neben vielen anderen historisch höchst wertvollen Mitteilungen, einen umfangreichen wörtlichen Auszug aus der verloren gegangenen *Geschichte der Geometrie* des EUDEMUS.[2] Das uns auf diese Weise erhaltene Referat des EUDEMUS bezieht sich auf die scharfsinnigen Untersuchungen, die HIPPOKRATES von Chios[3] in einer ebenfalls verloren gegangenen Abhandlung über die Quadraturen der sogenannten *„Möndchen“* angestellt hat, Untersuchungen, die vielleicht als Vorbereitungen zu der von alters her umworbenen Quadratur des Kreises gedient haben. Die Abhandlung des HIPPOKRATES ist um so wertvoller, als sie die älteste auf griechischem Boden entstandene mathematische Veröffentlichung darstellt, von der wir sichere und einläfsliche Kunde haben.

Es ist das unbestrittene und bleibende Verdienst BRETSCHNEIDERS, den Bericht des SIMPLICIUS in die mathematische Litteratur eingeführt zu haben. Zwar lag der Kommentar des SIMPLICIUS zur Physik des ARISTOTELES bereits hinreichend lange im Drucke vor, nämlich in der schon 1526 bei ALDUS MANUTIUS[4] in Venedig erschienenen Ausgabe, auch war der uns interessierende mathematische Teil jenes Kommentars in der von SPENGEL 1865 herausgegebenen Sammlung[5] der Fragmente des EUDEMUS abgedruckt, trotzdem aber war dieses wichtige Dokument den Mathematikern völlig unbekannt geblieben, bis BRETSCHNEIDER den Bericht, Text mit hinzugefügter Übersetzung, in sein 1870 erschienenes Werk *Die*

*) Die Notenzeichen 1, 2 u. s. w. verweisen auf die Anmerkungen und Erläuterungen am Ende der Abhandlung.

Geometrie und die Geometer vor EUKLIDES[6] aufnahm und ihn dadurch dem mathematischen Publikum zugänglich machte. Das Verdienst BRETSCHNEIDERS ist um so höher anzuschlagen, wenn man die Schwierigkeiten berücksichtigt, mit denen der Übersetzer wegen des an vielen Stellen ganz korrupten Textes der aldinischen Ausgabe zu kämpfen hatte.

Bei aller Anerkennung darf indessen doch nicht verschwiegen werden, daſs die BRETSCHNEIDERsche Übersetzung, auch abgesehen von den Fehlern, die auf Rechnung der *Aldina* zu setzen sind, ganz ungenügend ist. Ja sie ist sogar so fehlerhaft, daſs man oft Mühe hat, selbst nur zwei auf einander folgende Sätze zu finden, die einwandfrei wiedergegeben sind. Handelt es sich auch manchmal nur um kleinere Inkorrektheiten oder um ärgerliche Störungen im logischen Satzgefüge, so ist doch vielfach auch der Sinn bis zur Unkenntlichkeit entstellt oder sogar geradezu in das Gegenteil verwandelt.[7] Dieser Umstand scheint nicht hinreichend bekannt zu sein, denn sonst wäre es schwer zu verstehen, wie sich LORIA in seinem Werke *Le scienze esatte nell' antica Grecia* trotz Entfaltung eines gewissen gelehrten Apparates damit begnügen konnte, einfach die BRETSCHNEIDERsche Übersetzung, wenigstens in ihrem weitaus gröſsten Teile[8], Wort für Wort und mit allen ihren Fehlern aus dem Deutschen in das Italienische zu übertragen. Sollen sich solche Vorkommnisse nicht wiederholen und sollen sich jene Fehler und die damit verbundenen falschen Vorstellungen nicht immer weiter und weiter fortpflanzen, so dürfte es an der Zeit sein, wenn die mathematische Litteratur endlich einmal in den Besitz einer wirklich zuverlässigen Übersetzung des so wichtigen SIMPLICIUSschen Berichtes gelangen würde. Hierfür liegen zum Glück einige ausgezeichnete Vorarbeiten vor, namentlich solche, die sich auf den Teil des Berichtes beziehen, der das Referat des EUDEMUS enthält.

Die Übersetzung von BRETSCHNEIDER leidet nämlich noch an einem anderen Fehler, der allerdings schon frühzeitig erkannt worden ist. SIMPLICIUS hat nämlich zwar in seinem Berichte „das von EUDEMUS wörtlich Gesagte“ aus dessen *Geschichte der Geometrie* ausgezogen, hat es aber leider nicht unterlassen, eigene Erklärungen und erläuternde Zusätze in den Text einzuschieben. BRETSCHNEIDER war nun nicht in der Lage, diese Zuthaten von den Worten des EUDEMUS zu trennen, und so ist er denn wiederholt zu ganz unhaltbaren Schlüssen gelangt, die zu durchaus unrichtigen Vorstellungen über den Stand der mathematischen Wissenschaft zur Zeit des HIPPOKRATES geführt haben. Leider fanden die Resultate, zu denen BRETSCHNEIDER auf solche Weise gelangt war, ihren Weg auch in andere Werke, so z. B. auch in die *Vorlesungen* von CANTOR.[9]

Der erste, der eine Reinigung des eudemischen Textes von den Zuthaten des SIMPLICIUS versuchte, war ALLMAN. Er unternahm diese

Arbeit im Jahre 1881 mit Benutzung eines Kriteriums, von dem noch ausführlicher zu sprechen sein wird, und er gab eine englische Übersetzung des eudemischen Referates mit Unterdrückung der Stellen, die nach seiner Meinung dem Simplicius zuzuweisen waren.[10] Im Jahre 1882 erschien sodann die kritische Textausgabe des Simpliciusschen Kommentars von Diels[11], die den uns beschäftigenden Bericht in einer, der *Aldina* gegenüber, ganz wesentlich verbesserten Gestalt wiedergiebt. In dieser Ausgabe, bei der Diels, soweit es sich um jenen Bericht handelt, von Usener unterstützt wurde, ist das, was von den Herausgebern als eudemisch angesehen worden ist, durch gesperrte Schrift hervorgehoben. Die Ausscheidung zwischen Eudemus und Simplicius, zu der Diels und Usener gelangten und die zugleich von geeigneten Restitutionsvorschlägen begleitet war, stimmte aber nicht in allen Punkten mit der von Allman unternommenen überein. In der Vorrede zu der Dielsschen Ausgabe hatte nun bereits auch Tannery in einer Reihe von kritischen Bemerkungen, die sich übrigens auf den ganzen Bericht des Simplicius bezogen, Stellung zu dieser eudemischen Frage genommen, um dann in einer 1883 erschienenen gröfseren Abhandlung[12] in eingehender Weise speziell auf das Referat des Eudemus zurückzukommen. In dieser Abhandlung nahm er nun ebenfalls eine Ausscheidung und eine Restitution des Textes vor, die er ausführlich motivierte, die sich aber nicht unwesentlich von der Diels-Usenerschen unterscheidet und sich auch mit der Allmanschen nicht deckt. Zugleich fügte Tannery eine französische Übersetzung hinzu, in der er ebenfalls die Stellen unterdrückte, die auf Grund der vorgenommenen Ausscheidung dem Simplicius zugewiesen worden waren. Endlich nahm auch noch Heiberg in der Angelegenheit das Wort, indem er in einer 1884 erschienenen kritischen Besprechung[13] zunächst eine Übersicht über den ganzen Inhalt des Simpliciusschen Berichtes auf Grund der Dielsschen Ausgabe darbot, im Anschlusse daran die von Diels-Usener und Tannery vorgenommenen Ausscheidungen und Restitutionsversuche einer ausführlichen Kritik unterwarf und eigene Vorschläge hinzufügte.

Meines Wissens ist damit die Zahl der kritischen Originaluntersuchungen, die sich auf den Simpliciusschen Bericht im allgemeinen oder auf das Referat des Eudemus im besonderen beziehen, erschöpft. Die Veröffentlichungen, die etwa noch zu nennen wären, haben mehr den Charakter von Zusammenstellungen auf Grund der genannten Arbeiten. So gab Tannery 1886 unter dem Titel *Hippocrate de Chios* eine Abhandlung[14] heraus, die dann das gleichnamige Kapitel seiner im Jahre 1887 erschienenen *Géométrie grecque*[15] bildete und die eine Würdigung der Leistungen des Hippokrates, insbesondere natürlich auch seiner

Quadraturen enthält. Im Jahre 1889 veröffentlichte ALLMAN sein Werk *Greek geometry from THALES to EUCLID*[16], das im wesentlichen eine Zusammenfassung früher veröffentlichter Arbeiten[17] darstellt und das daher auch die auf den Bericht des SIMPLICIUS bezüglichen Untersuchungen in derselben Form wiedergiebt wie die bereits genannte Abhandlung. Von anderen Geschichtswerken seien hier nur noch kurz die von HANKEL, CANTOR und ZEUTHEN genannt. Dafs sich das im Jahre 1874 erschienene geistvolle Buch *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* des der Wissenschaft allzu früh entrissenen HERMANN HANKEL im wesentlichen auf BRETSCHNEIDER stützt, ist selbstverständlich. Aber auch noch in dem dem HIPPOKRATES gewidmeten Kapitel der 1894 erschienenen zweiten Auflage des ersten Bandes der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von CANTOR ist BRETSCHNEIDER die Hauptautorität, auf die sich die ganze Darstellung stützt. Citiert wird noch nach der Ausgabe von SPENGEL, die Arbeiten von DIELS, USENER, TANNERY und HEIBERG sind nicht berücksichtigt. Dagegen sind diese Untersuchungen in der 1896 erschienenen *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* von ZEUTHEN verwertet, insofern dort eine auf der Darstellung von TANNERY beruhende Übersicht über die Quadraturen des HIPPOKRATES gegeben wird, die die Zuthaten des SIMPLICIUS bei Seite läfst.

Im Folgenden werde ich nun zunächst auf Grund der DIELSschen Ausgabe eine wortgetreue Übersetzung[18] des SIMPLICIUSschen Berichtes geben, und zwar des ganzen Berichtes mit Einschlufs auch des letzten Teiles, den BRETSCHNEIDER ohne jeden Grund weggelassen hat, indem er mitten in einem total mifsverstandenen Satze plötzlich abbrach. Dieser letzte Teil ist aber sehr interessant und für das Verständnis des ganzen Berichtes geradezu unentbehrlich.

Ich will nicht unterlassen, auch an dieser Stelle meinem verehrten Kollegen, Herrn Prof. HITZIG, meinen Dank auszusprechen für die freundliche Unterstützung, die er mir bei meiner Arbeit hat zu teil werden lassen. Wer sich je mit dem SIMPLICIUSschen Berichte beschäftigt hat, der weifs, dafs er nicht unerhebliche philologische Schwierigkeiten darbietet. Diese alle zu überwinden, wäre mir ohne den bewährten Rat, auf den ich jederzeit rechnen durfte, nicht möglich gewesen.

Mit der Übersetzung waren aber naturgemäfs auch noch andere Aufgaben verbunden. Abgesehen nämlich von den etwa notwendigen Restitutionen des Textes, die mit der Ausscheidung zwischen EUDEMUS und SIMPLICIUS zusammenhängen und die doch immerhin nur einen Teil des Berichtes betreffen, ist auch der Text als solcher in der DIELSschen Ausgabe noch nicht überall völlig gesichert. Noch finden sich von den Handschriften herrührende verdorbene Stellen und Lücken vor, oder auch

Stellen, die von dem Herausgeber oder anderen als verdorben oder lückenhaft angesehen und dementsprechend korrigiert worden sind. Zu diesen Schwierigkeiten mufste der Übersetzer natürlich Stellung nehmen; ich war aber in der Lage, in einer Reihe von Fällen den ursprünglichen Wortlaut des Textes wiederherstellen zu können. Natürlich wurde jede Abweichung von der DIELSschen Ausgabe in den Anmerkungen, die den dritten Teil meiner Arbeit bilden, genau bezeichnet und begründet.

Auch an der EUDEMUSfrage konnte und wollte selbstverständlich die Übersetzung nicht vorübergehen. Es war mir indessen nicht möglich, mich einer der bereits erwähnten Ausscheidungen anzuschliefsen. Vielmehr habe ich die Überzeugung gewonnen, dafs die Frage, was dem EUDEMUS und was dem SIMPLICIUS gehöre und wie etwa nach vollzogener Ausscheidung der eudemische Text zu restituieren sei, noch keineswegs ausreichend beantwortet ist. Ich denke dabei nicht an unbedeutende Einzelheiten, über deren Herkunft man sich vielleicht niemals einigen wird und bei denen es schliefslich auch gleichgültig ist, ob man sie als Original oder als Zuthat betrachtet, ich denke auch nicht einmal an die beiden wichtigen und viel besprochenen Stellen auf Seite 65, 7—23 und 66, 14—22, die sich angeblich in einem ganz trostlosen Zustande befinden und über deren Interpretation die Meinungen noch weit auseinandergehen, — es sind vielmehr die prinzipiellen, gleich zu Anfang des eudemischen Referates auftretenden Fragen, die mir einer erneuten Diskussion wert zu sein scheinen: *Wie verhält es sich mit der rätselhaften, von den einen dem HIPPOKRATES, von den anderen dem SIMPLICIUS zugeschriebenen Definition, nach der ähnliche Segmente solche sein sollen, die „gleichvielte Teile ihrer Kreisflächen" ausmachen? Ist es wahr, was BRETSCHNEIDER und nach ihm andere behauptet haben, dafs HIPPOKRATES die Beziehung des Peripheriewinkels zu seinem Centriwinkel und daher auch die Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen noch nicht gekannt habe? Wie hat HIPPOKRATES die ähnlichen Segmente definiert?* Das sind fundamentale Fragen, die noch nicht erledigt sind, über die man aber schliefslich einmal Klarheit gewinnen mufs, wenn man einen Einblick in den Zustand der Geometrie zur Zeit des HIPPOKRATES erlangen will. —

Der Bericht des SIMPLICIUS verdankt seine Entstehung einer Bemerkung, die ARISTOTELES an einer bestimmten Stelle seiner *Physik* macht (ARISTOTELES, ed. BEKKER, I, p. 185^a, 12—17). ARISTOTELES wendet sich dort gegen die eleatische Weltanschauung, die das Seiende als „eins und unwandelbar" auffafst, und erklärt dabei, dafs man nicht alle falschen Sätze zu widerlegen habe, sondern nur solche, die nicht schon gegen die Prinzipien verstofsen. Den Unterschied nun zwischen den Sätzen, die man widerlegen, und denen, die man nicht widerlegen

soll, sucht er folgendermaßen zu veranschaulichen: *„So ist es zum Beispiel,“* sagt er, *„Sache eines Geometers, die Quadratur vermittels der Segmente zu widerlegen, die des* ANTIPHON *aber zu widerlegen, ist nicht Sache eines Geometers.“* Durch diese Bemerkung des ARISTOTELES sah sich nun SIMPLICIUS veranlaſst, in seinen Kommentar einen erläuternden Bericht über die genannten Quadraturen aufzunehmen. Da es aber nicht ganz klar war, welche Quadratur (des Kreises, denn darum handelte es sich natürlich) ARISTOTELES mit der „Quadratur vermittels der Segmente“ gemeint hatte[19], so fühlte sich SIMPLICIUS verpflichtet, viel weiter auszuholen und seinem Erläuterungsberichte eine viel gröſsere Ausdehnung zu geben, als es für den gerade vorliegenden Zweck erforderlich gewesen wäre. Dadurch aber hat er der Wissenschaft einen unschätzbaren Dienst geleistet. Denn indem er mit Geschick und Umsicht und mit vollem Verständnis für den gesamten Umfang der vorliegenden Frage eine ausführliche und wohlgeordnete Darstellung der mit der „Quadratur vermittels der Segmente“ zusammenhängenden Untersuchungen, namentlich also der des HIPPOKRATES, in seinem Kommentare unternahm, hat er uns Arbeiten von hohem Range überliefert, die ohne ihn nicht zu unserer Kenntnis gelangt wären.[20] Hören wir nun, wie SIMPLICIUS jene Bemerkung des ARISTOTELES kommentiert.

II. Der Bericht des Simplicius.

Unter den Vielen nämlich, die die Quadratur des Kreises suchten (dies bedeutete aber die Konstruktion eines einem Kreise gleichen Quadrates), glaubte sowohl ANTIPHON sie zu finden, als auch HIPPOKRATES, der Chier, aber sie täuschten sich. Allein, den Irrtum des ANTIPHON zu widerlegen, ist nicht Sache eines Geometers, da er, wie wir erfahren werden, nicht von geometrischen Prinzipien ausgegangen ist; wohl aber ist es Sache eines Geometers, den des HIPPOKRATES zu widerlegen, da er sich unter Wahrung der geometrischen Prinzipien irrte. Denn nur diejenigen Sätze hat man zu widerlegen nötig, die unter Wahrung der der Untersuchung eigentümlichen Prinzipien auf solche Weise zu falschen[21] Schlüssen führen; diejenigen aber, durch die sie bei Seite geschoben werden, indem sie die Prinzipien aufheben, braucht man nicht zu widerlegen.

ANTIPHON aber beschrieb einen Kreis und zeichnete in diesen ein Polygon[22], eines von denen, die eingeschrieben werden können. Es sei das eingeschriebene etwa[23] ein Quadrat. Indem er alsdann jede der Seiten des Quadrates halbierte, zog er von den Teilpunkten[24] aus nach den Kreisbogen senkrechte Linien, von denen offenbar eine jede das zu ihr ge-

hörige Segment des Kreises halbierte. Darauf zog er von dem Teilpunkte nach den Endpunkten der Seiten des Quadrates Verbindungsgeraden, sodafs vier Dreiecke durch die Geraden entstanden, die ganze eingeschriebene Figur aber ein Achteck ward. Und indem er so wieder nach demselben Verfahren jede der Seiten des Achtecks halbierte, von dem Teilpunkte aus eine Senkrechte nach dem Kreisumfange zog und von den Punkten, in denen die Senkrechten die Kreisbogen trafen, Verbindungsgeraden nach den Endpunkten der geteilten Geraden führte, machte er das eingeschriebene zu einem Sechzehneck. Und indem er wiederum auf dieselbe Weise die Seiten des eingeschriebenen Sechzehnecks teilte und Verbindungslinien zog und das eingeschriebene Polygon verdoppelte und dies beständig wiederholte, glaubte[25] er, dafs schliefslich einmal nach Erschöpfung der Fläche auf diese Weise dem Kreise ein Polygon werde eingeschrieben werden, dessen Seiten wegen ihrer Kleinheit auf den Umfang des Kreises passen[26] würden. Da wir aber zu jedem Polygone ein gleiches Quadrat konstruieren können, wie wir in den Elementen[27] lernten, so werden wir, weil dem Kreise das auf ihn passende gleiche Polygon zu Grunde liegt, auch zu einem Kreise ein gleiches Quadrat herzustellen im stande sein.



Fig. 1.

Nun leuchtet ein, dafs sich die Beweisführung im Widerspruche[28] mit den geometrischen Prinzipien befindet, nicht, wie Alexander[29] sagt, „weil der Geometer als Prinzip annimmt, dafs der Kreis die Gerade nur punktweise treffe, Antiphon aber dies aufhebt.“ Denn der Geometer nimmt dies nicht an, sondern beweist es im dritten Buche[30]. Besser ist es also zu sagen, dafs es ein Prinzip sei, es sei unmöglich, dafs eine Gerade auf einen Kreisbogen passe[31], vielmehr wird die aufserhalb befindliche den Kreis in einem einzigen Punkte treffen, die innerhalb befindliche in zweien nur und nicht mehr, und die Berührung erfolgt in einem Punkte.[32] Und wenn man gleichwohl die zwischen der Geraden und dem Kreisbogen liegende Fläche immerwährend teilt, so wird man sie nicht erschöpfen, noch wird man jemals den Kreisbogen erreichen, wenn anders[33] die Fläche bis ins Unendliche teilbar ist. Wenn man ihn aber erreicht, so ist ein geometrisches Prinzip aufgehoben, nämlich das, das aussagt, dafs die Gröfsen bis ins Unendliche teilbar sind. Und dafs dieses Prinzip von Antiphon aufgehoben werde, behauptet auch Eudemus.[34]

Die Quadratur aber vermittels der Segmente, sagt er[35], *zu widerlegen, ist Sache eines Geometers.* Mit der *vermittels der Segmente* könnte er aber

wohl die vermittels der Möndchen meinen[36], die HIPPOKRATES, der Chier, erfand. Denn das Möndchen ist ein Segment[37] eines Kreises. Der Beweis aber ist folgender Art.

Es sei, sagt er[38], über der Geraden AB der Halbkreis $A\Gamma B$ beschrieben, und es sei AB in Δ halbiert. Und von Δ aus sei $\Delta\Gamma$ senkrecht zu AB gezogen, und von Γ aus sei die Verbindungslinie ΓA gezeichnet, die eine Seite des Quadrates darstellt, das in den Kreis eingeschrieben ist, von dem $A\Gamma B$ einen Halbkreis bezeichnet. Und über $A\Gamma$ sei der Halbkreis $AE\Gamma$ beschrieben. Da nun das Quadrat über AB gleich ist dem über $A\Gamma$, vermehrt um das über der andern Seite des in den Halbkreis $A\Gamma B$ eingeschriebenen Quadrates, d. h. über ΓB (denn AB ist Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks; wie sich aber die Quadrate über den Durchmessern zu einander verhalten, ebenso verhalten sich auch zu einander die um sie[39] beschriebenen Kreise und Halbkreise, wie im 12. Buche der Elemente[40] bewiesen ist), so ist folglich der Halbkreis $A\Gamma B$ doppelt so grofs wie der Halbkreis $AE\Gamma$. Es ist aber der Halbkreis $A\Gamma B$ auch doppelt so grofs wie der Quadrant $A\Gamma\Delta$. Daher ist der Quadrant gleich dem Halbkreise $AE\Gamma$. Es sei nun das gemeinsame, von der Seite des Quadrates und dem Kreisbogen $A\Gamma$ eingeschlossene Segment weggenommen. Alsdann ist das übrig bleibende Möndchen $AE\Gamma$ gleich dem Dreiecke $A\Gamma\Delta$, das Dreieck aber einem Quadrate. Nachdem er aber auf diese Weise gezeigt hat, dafs das Möndchen quadriert werde, versucht er nächstdem vermittels des vorher Bewiesenen den Kreis zu quadrieren, wie folgt.

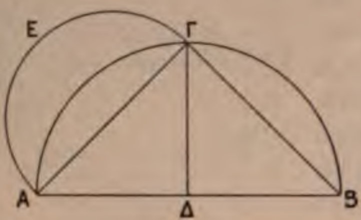


Fig. 2.

Es sei eine Gerade AB gegeben und darüber ein Halbkreis beschrie-

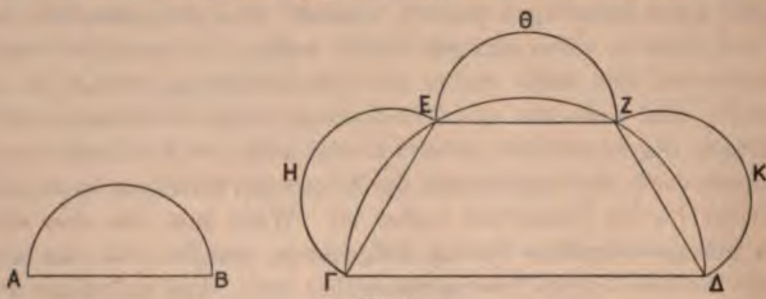


Fig. 3.

ben. Und es sei $\Gamma\Delta$ doppelt so grofs gemacht wie AB, und über $\Gamma\Delta$ sei ein Halbkreis beschrieben, und in den Halbkreis mögen Seiten des in

den Kreis eingeschriebenen Sechsecks eingezeichnet werden, nämlich ΓE und EZ und ferner $Z\Delta$. Und darüber seien die Halbkreise ΓHE, $E\Theta Z$, $ZK\Delta$ beschrieben. Alsdann ist jeder der über den Seiten des Sechsecks beschriebenen Halbkreise gleich dem Halbkreise AB, denn AB ist den Seiten des Sechsecks gleich. Es ist nämlich der Durchmesser doppelt so grofs wie die Radien, die Seiten des Sechsecks aber sind den Radien gleich. Es ist aber $\Gamma\Delta$ auch doppelt so grofs wie AB; also sind die vier Halbkreise einander gleich. Die vier sind folglich viermal so grofs wie der Halbkreis AB. Es ist aber auch der Halbkreis über $\Gamma\Delta$ viermal so grofs wie AB. Denn da $\Gamma\Delta$ doppelt so grofs wie AB ist, so wird das Quadrat über $\Gamma\Delta$ viermal so grofs wie das über AB; wie sich aber die Quadrate über den Durchmessern verhalten, ebenso verhalten sich zu einander die um sie beschriebenen Kreise und Halbkreise. Somit ist der Halbkreis $\Gamma\Delta$ viermal so grofs wie AB. Folglich ist der Halbkreis $\Gamma\Delta$ gleich den vier Halbkreisen, nämlich dem über AB und den drei Halbkreisen über den Seiten des Sechsecks.[41] Es seien nun sowohl von den Halbkreisen über den Seiten des Sechsecks als auch von dem über $\Gamma\Delta$ gemeinsame Segmente weggenommen, nämlich die, die von[42] den Sechsecksseiten und den Bogen des Halbkreises $\Gamma\Delta$ eingeschlossen werden. Alsdann sind die übrig bleibenden Möndchen ΓHE, $E\Theta Z$, $ZK\Delta$ mit dem Halbkreise AB zusammen gleich dem Trapeze $\Gamma EZ\Delta$. Wenn wir aber von dem Trapeze den Überschufs wegnehmen, d. h. die den Möndchen gleiche Fläche (denn es wurde eine einem Möndchen gleiche geradlinige Figur nachgewiesen), den Rest aber, der gleich dem Halbkreise AB ist, zurückbehalten und wenn wir diese zurückbehaltene geradlinige Fläche verdoppeln und das Verdoppelte quadriert wird, d. h. wenn wir ein ihm gleiches Quadrat herstellen, so wird das Quadrat gleich dem um den Durchmesser AB beschriebenen Kreise sein. Und so wird der Kreis quadriert werden.

Die Beweisführung ist allerdings geistreich; der Trugschlufs[43] aber ist dadurch entstanden, dafs das, was nicht allgemein bewiesen worden ist, als allgemein gültig angenommen wurde. Denn es wurde nicht bewiesen, dafs jedes Möndchen quadriert werde, es sei denn das über der Seite des in den Kreis eingeschriebenen Quadrates; *diese* Möndchen aber stehen über den Seiten des in den Kreis eingeschriebenen Sechsecks.[44]

Es gab aber noch eine solche Beweisführung[45], die den Kreis durch die Möndchen zu quadrieren glaubte, eine einfachere, und eine, die nicht dadurch widerlegt wird, dafs in ihr der Trugschlufs[46] entstanden ist: Diejenigen nämlich, die eine Quadratur des Möndchens über der Seite des Quadrates fanden, glaubten auch dadurch die Quadratur des Kreises gefunden zu haben, in der Meinung, dafs der ganze Kreis in

Möndchen zerlegt werden könne. Denn indem sie das dem Möndchen gleiche Quadrat so oft vervielfachten, als die Anzahl aller der Möndchen beträgt, in die der Kreis zerlegt worden ist, glaubten sie, daſs das diesen Möndchen gleiche Quadrat auch dem Kreise gleich sei, indem sie dabei fälschlich annahmen, daſs der ganze Kreis in Möndchen zerlegt werden könne. Denn bei der Zerlegung des Kreises in die Möndchen bleibt immer inwendig ein mittleres, nach beiden Seiten ausgebogenes Stück übrig, das von den auf beiden Seiten befindlichen Umrissen des Möndchens eingeschlossen ist. Und da dieses weder ein Möndchen ist, noch quadriert wird, so dürfte wohl auch der ganze Kreis nicht quadriert werden.[47] Nicht verständig[48] aber ist die in Bezug auf die so beschaffene Quadratur getroffene Einrichtung. Denn wer den Kreis durch die Möndchen quadrieren will, braucht nicht den ganzen Kreis in Möndchen zu zerlegen. Und selbst wenn dies auch geschähe, so wird auch so nicht der Kreis durch die Möndchen quadriert, denn nicht von jedem Möndchen wurde bewiesen, daſs es quadriert werde. Hinwiederum wird er, auch wenn er nicht ganz in Möndchen zerlegt wird, quadriert werden, sobald man einräumt, daſs die über den Seiten des in den Kreis eingeschriebenen Sechsecks gezeichneten Möndchen quadriert werden und nicht nur die über denen des Quadrates. Und darin besteht nun der Grund des Trugschlusses, daſs die, die nur das Möndchen über der Seite des Quadrates quadrierten, den Beweis so gestalteten, als ob alle Möndchen, in die der Kreis zerlegt wird, von welcher Art sie auch seien, quadriert würden. Dies also über das trügerische Schlieſsen vermittels der Möndchen.

„Einige aber, sagt ALEXANDER, glauben, wenn sie eine Quadratzahl als cyklisch nachweisen würden, auch in den Raumgröſsen eine Kreisquadratur gefunden zu haben. Eine Quadratzahl aber, sagt er, ist eine, die durch Multiplikation einer Zahl mit sich selbst entsteht; cyklisch hingegen nannten sie die Zahlen die aus den auf einander folgenden ungeraden Zahlen, z. B. aus eins, drei, fünf, sieben, neun, elf durch Addition gebildet werden. Fanden sie aber unter den so gebildeten irgend eine Quadratzahl, die zugleich auch cyklisch ist, wie z. B. 36 (quadratisch, weil sie aus der mit sich selbst multiplizierten 6 entsteht, und cyklisch, weil sie durch die Addition der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 zu stande gebracht wird), so glaubten sie, auch eine Kreisquadratur gefunden zu haben. Der Beweis aber, sagt er, ergiebt sich nicht aus den geometrischen Prinzipien, sondern aus den arithmetischen; denn arithmetische Prinzipien sind es, daſs die so beschaffene Zahl cyklisch und die so beschaffene quadratisch ist.“ Wenn ALEXANDER dies sagt, so verlohnt es sich, festzustellen, daſs erstens die Arithmetiker die cyklische Zahl nicht mit Rücksicht auf eine Addition der auf einander folgenden ungeraden

Zahlen definieren, sondern mit Rücksicht[49] darauf, daſs sie ebenso abschlieſst wie ihre Grundzahl. Cyklisch[50] ist nämlich 25, weil fünfmal fünf 25, und 36, weil sechmal sechs 36 ist; aber weder 4 ist cyklisch, noch 9, noch 16, obwohl sie durch Addition der auf einander folgenden ungeraden Zahlen entstehen, sondern es sind diese nur quadratisch; denn aus der Addition der ungeraden Zahlen entstehen die quadratischen. Vielleicht auch sagte der, der von alters her die Untersuchung überlieferte, nicht, daſs alle durch Addition der auf einander folgenden ungeraden Zahlen gebildeten ohne weiteres cyklisch seien, sondern daſs bei der Addition der auf einander folgenden ungeraden Zahlen die cyklischen gefunden werden, obwohl auch dies nicht immer zutrifft; denn während 125, weil aus 5 mal 25, und 216, weil aus 6 mal 36 entstanden, cyklisch sind, gingen sie gleichwohl nicht durch Addition der auf einander folgenden ungeraden Zahlen hervor; es müſsten denn diese Zahlen nicht cyklische sein sondern sphärische, aus zweidimensionalen cyklischen cyklisch vertieft.[51] Aber auch jenem gegenüber ist festzustellen, daſs es nicht berechtigt war, daſs die, die eine Zahl gefunden hatten, die zugleich cyklisch und quadratisch war, deswegen glaubten, auch in Raumgröſsen die Quadratur des Kreises gefunden zu haben. Aber vielleicht kamen die, die unter den Zahlen eine fanden, die quadratisch und zugleich auch cyklisch war, auf den Gedanken, auch in den Raumgröſsen die Quadratur des Kreises zu suchen.[52]

Unser Lehrer Ammonius[53] aber sagte, es sei vielleicht nicht notwendig, daſs wenn dieses bei Zahlen gefunden würde, es auch bei Raumgröſsen gefunden werde. Denn ungleichartige Gröſsen seien Gerade und Kreislinie. „Und es ist durchaus nicht wunderbar, sagt er, daſs ein Kreis nicht gleich einer geradlinigen Figur gefunden wurde, wenn wir dies doch auch bei den Winkeln antreffen. Denn weder für den Winkel des Halbkreises noch für seine Ergänzung zum Rechten, den sogenannten hornförmigen[54] Winkel, dürfte es wohl einen gleichen geradlinigen Winkel geben. Und deswegen vielleicht, sagt er, wurde das selbst von so berühmten Männern gesuchte Theorem bis jetzt nicht gefunden, selbst nicht einmal von Archimedes.“ Ich sagte aber zu dem Lehrer, wenn doch das Möndchen über der Seite des Quadrates quadriert wird (denn das ist untrüglich bewiesen), das Möndchen aber, weil aus Kreisbogen zusammengesetzt, dem Kreise verwandt ist, was hindert denn, daſs auch der Kreis gerade so gut quadriert werde? Ist aber die Fläche des Möndchens der des Kreises unähnlich wegen der Hörner, so ist jedes Möndchen auch der geradlinigen Figur unähnlich: und gleichwohl wird das Möndchen über der Seite des Quadrates quadriert. Die Winkel freilich, sowohl die des Halbkreises als die hornförmigen, die beide aus einem Kreisbogen und

einer Geraden zusammengesetzt sind, sind nicht nur ungleichartig dem geradlinigen, sondern sogar unvergleichbar.[55] Ich halte also das Gesagte nicht für ausreichend, um an dem Auffinden der Quadratur verzweifeln zu lassen. Es sagt nämlich auch JAMBLICHUS[56] in seinem Kommentare zu den Kategorien, dafs ARISTOTELES die Quadratur des Kreises vielleicht noch nicht gefunden habe, dafs sie aber bei den Pythagoräern gefunden worden sei, „wie sich, sagt er, aus den Beweisführungen des Pythagoräers SEXTUS[57] klar ergiebt, der die Methode der Beweisführung von alters her durch Überlieferung erhielt. Später aber, sagt er, bearbeiteten auch ARCHIMEDES mittels der Spirale und NIKOMEDES mittels der Linie, die eigens Quadratrix genannt wird, und APOLLONIUS mittels einer gewissen Linie, die er selbst eine Schwester einer Muschellinie nennt — sie ist aber dieselbe wie die des NIKOMEDES — und auch KARPUS mittels einer gewissen Linie, die er einfach „aus doppelter Bewegung" nennt, und noch viele andere, sagt er, auf mannigfache Weise das Problem". Aber niemals machten alle diese die Konstruktion des Theorems zu einer mechanischen.[58]

ALEXANDER glaubt also, wie ich sagte, dafs der Trugschlufs insofern widerlegt werde, als HIPPOKRATES, der nur das Möndchen über der Seite des Quadrates quadrierte, dies so mifsbrauchte, als sei es auch in Bezug auf die Seite des Sechsecks bewiesen. EUDEMUS freilich sagt in seiner *Geschichte der Geometrie*, HIPPOKRATES habe nicht in Bezug auf eine Quadratseite die Quadratur des Möndchens gezeigt, sondern allgemein, wie man wohl sagen könnte.[59] Wenn nämlich jedes Möndchen als äufseren Bogen entweder einen einem Halbkreise gleichen hat oder einen gröfseren oder einen kleineren, HIPPOKRATES aber sowohl das quadriert, das einen einem Halbkreise gleichen, als auch das, das einen gröfseren, wie auch das, das einen kleineren hat, so dürfte er wohl den Nachweis allgemein geführt haben, wie es scheint.[59] Ich werde aber das von EUDEMUS wörtlich Gesagte mitteilen, indem ich einige wenige Erläuterungen[60] durch die Erinnerung an die Elemente EUKLIDS hinzufüge, wegen der Art wie EUDEMUS kommentiert, der nach der alten Sitte die Erklärungen abgekürzt mitteilt. Er sagt aber im zweiten Buche seiner *Geschichte der Geometrie* Folgendes.

Aber auch die Quadraturen der Möndchen[61], die als solche von nicht gewöhnlichen Figuren erschienen wegen der Verwandtschaft mit dem Kreise[62], wurden zuerst von HIPPOKRATES beschrieben und schienen nach rechter Art[63] auseinandergesetzt zu sein; deshalb wollen wir uns ausführlicher mit ihnen befassen und sie durchnehmen. Er bereitete sich nun eine Grundlage und stellte als ersten der hierzu nützlichen Sätze den auf, dafs die ähnlichen

Segmente der Kreise dasselbe Verhältnis zu einander haben wie ihre Grundlinien in der Potenz.[64] *Dies bewies er aber dadurch, daſs er zeigte*[65], *daſs die Durchmesser in der Potenz dasselbe Verhältnis haben wie die Kreise.* Dies hat Euklid als zweiten Satz[66] im zwölften Buche der Elemente hingestellt, indem er den zu Grunde liegenden Satz so aussprach: „Die Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate über den Durchmessern.“ *Wie sich nämlich die Kreise zu einander verhalten, so verhalten sich auch die ähnlichen Sektoren.*[67] *Ähnliche Sektoren nämlich sind die, die denselben Teil des Kreises ausmachen, wie z. B. Halbkreis zu Halbkreis und Drittelkreis zu Drittelkreis. Deswegen nehmen die ähnlichen Segmente auch gleiche Winkel auf. Und zwar sind die aller Halbkreise Rechte und die der gröſseren kleiner als Rechte, und zwar um so viel, um wie viel die Segmente gröſser als Halbkreise sind, und die der kleineren gröſser, und zwar um soviel, um wie viel die Segmente kleiner sind.*

Nachdem aber dies von ihm bewiesen war, beschrieb[68] *er zunächst, auf welche Weise wohl eine Quadratur zu stande kommen könnte, wenn ein Möndchen als äuſseren Bogen den eines Halbkreises hat. Er setzte dies aber auseinander, indem er um ein sowohl rechtwinkliges als gleichschenkliges Dreieck einen Halbkreis beschrieb und über der Basis ein Kreissegment, ähnlich denen, die von den Seiten abgeschnitten werden.*[69] Dies stellte Euklid als das 33. Theorem des dritten Buches hin, indem er folgende Aufgabe vorlegte: „Über einer[70] gegebenen Geraden ein Kreissegment zu beschreiben, das einen Winkel aufnimmt, der einem[70] gegebenen geradlinigen Winkel gleich ist. Wenn er nämlich das über der Basis so beschreibt, daſs es einen Winkel aufnimmt, gleich denen in den Segmenten, die von den Seiten abgeschnitten werden, so wird es jenen ähnlich sein. „Ähnliche Kreissegmente nämlich, definierte Euklid in dem dritten[71] Buche, sind solche, die gleiche Winkel aufnehmen.“ *Da aber das Segment über der Basis gleich den beiden über den anderen ist*, weil, wie im vorletzten Theoreme des ersten Buches der Elemente Euklids bewiesen worden ist, in den rechtwinkligen Dreiecken die unter dem Rechten gespannte in der Potenz gleich den beiden ist, die den Rechten einschlieſsen[72], und weil sich, wie die Quadrate über den Geraden, ebenso die ähnlichen Segmente der Kreise zu einander verhalten, *so wird, wenn der Teil des Dreiecks, der auſserhalb des über der Basis beschriebenen Segmentes liegt, beiderseits hinzugefügt ist, das Möndchen gleich dem Dreiecke sein. Ist nun bewiesen, daſs das Möndchen gleich dem Dreiecke ist, so dürfte es wohl*



Fig. 4.

quadriert werden. Es ist nämlich im 14. Theoreme des zweiten Buches der Elemente EUKLIDS gezeigt worden, wie man verfahren muſs, um „zu einer gegebenen geradlinigen Figur ein gleiches Quadrat zu konstruieren". *Auf diese Weise quadrierte also* HIPPOKRATES, *indem er den äuſseren Bogen des Möndchens als den eines Halbkreises voraussetzte, das Möndchen ohne Mühe.*

Hierauf setzt er ihn zunächst gröſser als einen Halbkreis voraus, indem er ein Trapez konstruierte, das die drei Seiten einander gleich hat, die eine aber, die gröſsere der parallelen, in der Potenz dreimal so groſs wie jede von jenen, und indem er das Trapez mit einem Kreise umgab und über seiner gröſsten Seite ein Segment beschrieb, ähnlich denen, die durch die drei gleichen von dem Kreise abgeschnitten werden.[73] Daſs wirklich das Trapez von einem Kreise wird umschlossen werden, wirst Du so beweisen. Wenn Du die Winkel des Trapezes nach dem neunten Satze des ersten Buches der Elemente halbierst und die Diagonalen[74] ziehst, so wirst Du sagen, da $B\Delta$ gleich $A\Gamma$, AE aber gemeinschaftlich ist und die Winkel gleich sind[75], so ist auch das Übrige gleich. *Daſs aber das genannte Segment gröſser als ein Halbkreis ist, leuchtet ein, wenn in dem Trapeze ein Durchmesser*[76] *gezogen wird. Denn notwendigerweise muſs dieser, der unter zwei Seiten des Trapezes gespannt ist, in der Potenz mehr als doppelt so groſs sein wie die eine übrig gebliebene.* Da nämlich $B\Delta$ gröſser als $A\Gamma$ ist,

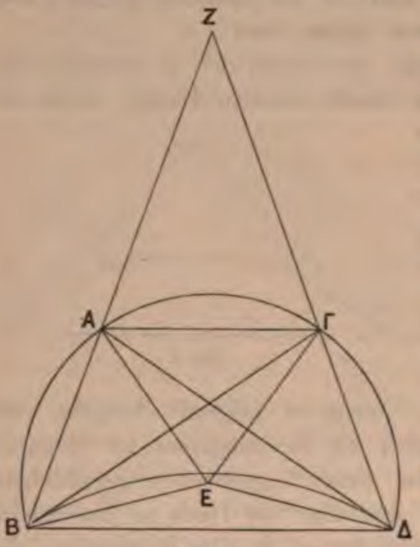


Fig. 5.

so werden die einander gleichen und sie verbindenden Geraden $\Delta\Gamma$ und BA, verlängert, in Z zusammenstoſsen. Denn wenn die einander gleichen Geraden BA und $\Delta\Gamma$ parallel sind, andererseits aber die Verbindungslinien der gleichen und parallelen Geraden auch selbst gleich und parallel sind, so wird $A\Gamma$ gleich $B\Delta$ sein, was unmöglich ist. Wenn aber BA und $\Delta\Gamma$ in Z zusammenstoſsen, so werden einerseits die Winkel $ZA\Gamma$ und ΓAB gleich zwei Rechten sein, wegen des 13. Satzes des ersten Buches der Elemente EUKLIDS, andererseits aber der Winkel ΓAB gröſser als der Winkel ΓAZ, der Auſsenwinkel des Dreiecks gröſser als der innere, nach dem 32. Satze des ersten Buches. Demnach ist $B\Gamma$ in der Potenz mehr als doppelt so groſs wie jede der Seiten BA und $A\Gamma$,

und so auch wie $\Gamma\Delta$.[77] *Und folglich mufs die gröfste der Seiten des Trapezes*, nämlich $B\Delta$, *in der Potenz kleiner sein als der Durchmesser, vermehrt um diejenige der anderen Seiten, unter der, mit dem Durchmesser zusammen, die in Rede stehende gespannt ist.*[78] Es sind nämlich $B\Gamma$ und $\Gamma\Delta$ in der Potenz mehr als dreimal so grofs wie $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ aber dreimal so grofs. *Daher ist der auf der gröfseren Seite des Trapezes stehende Winkel ein spitzer. Folglich ist das Segment, in dem er liegt, gröfser als ein Halbkreis. Und dies ist der äufsere Bogen des Möndchens.*

Die Quadratur aber dieses Möndchens überging Eudemus als etwas Einleuchtendes, glaube ich.[79] Sie dürfte aber wohl folgendermafsen beschaffen sein. Da ja einander gleich sind das Möndchen zusammen mit dem Segmente auf der gröfseren Seite des Trapezes und das Trapez zusammen mit den Segmenten, die durch die drei gleichen Geraden desselben abgeschnitten werden, und da von diesen Segmenten das auf der gröfseren Seite des Trapezes gleich den dreien ist, die durch die gleichen Geraden von dem Kreise weggenommen werden, insofern nämlich vorausgesetzt ist, dafs die gröfsere Seite des Trapezes in der Potenz den dreien gleich sei, und andererseits die ähnlichen Segmente sich zu einander verhalten wie die Quadrate über den Geraden: so sind, wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, die Reste gleich; also ist das Möndchen gleich dem Trapeze. Oder Du wirst kürzer auch so sagen: Da ja das Segment über der gröfseren Seite des Trapezes gleich denen ist, die über den drei gleichen beschrieben sind (deswegen, weil auch das Quadrat über derselben dreimal so grofs ist wie das über jeder einzelnen), so wird, wenn die von den drei gleichen Geraden und dem Bogen des gröfseren Segmentes eingeschlossene Fläche beiderseits hinzugefügt wird, das Möndchen gleich dem Trapeze sein: ist dieses quadriert (da wir jede geradlinige Figur zu quadrieren vermögen), so wird auch das Möndchen quadriert werden, dessen äufserer Bogen gröfser als ein Halbkreis ist.[80]

Wenn er aber kleiner als ein Halbkreis sein sollte, so richtete Hippokrates dies ein, indem er zuvor eine Figur[81] *folgender Art zeichnete. Es sei ein Kreis gegeben, von dem die Gerade AB*[82] *ein Durchmesser sei, sein Mittelpunkt aber sei der Punkt K. Und die Gerade $\Gamma\Delta$ halbiere die Gerade BK und schneide sie rechtwinklig.*

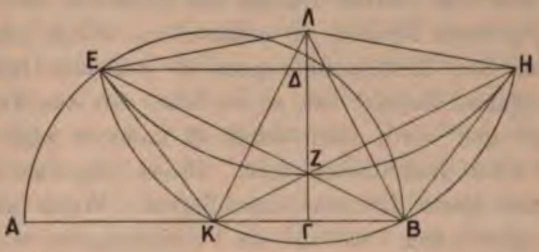


Fig. 6.

Die Gerade EZ aber sei zwischen diese und die Peripherie gelegt, nach B[83] *hin sich richtend und in der Potenz andert-*

halbmal so grofs wie die Radien. Die Gerade EH aber sei parallel zu der Geraden AB geführt. Und von K aus seien Verbindungslinien nach E und Z gezogen. Die Verbindungslinie nach Z aber stofse, verlängert, mit der Geraden EH in H zusammen und wiederum seien von B aus Verbindungslinien nach Z und H gezogen. Es ist dann einleuchtend, dafs einerseits die Gerade BZ[84]*, verlängert, nach E*[84] *gelangen wird (denn es ist vorausgesetzt, dafs sich EZ nach B hin richte*[85]*) und dafs andererseits die Gerade BH gleich der Geraden EK sein wird.*

Dies könnte man zwar vielleicht auch auf einfachere Weise zeigen, mir aber kam es in den Sinn, es aus den bereits allgemein anerkannten Sätzen folgendermafsen zu beweisen. Es ist vorausgesetzt, dafs *ΔΓ BK* halbiere und rechtwinklig schneide. Auf *ΔΓ* befindet sich daher der Mittelpunkt[86] des Kreises, der um das Trapez wird beschrieben werden, nach dem Zusatze zu dem ersten Theoreme im dritten Buche der Elemente EUKLIDS. Weil aber *EH* zu *KB* parallel ist und *ΓΔ* dieselben geschnitten hat, so bildet sie die Innenwinkel, die zwei Rechten gleich sind wegen des 29. Satzes des ersten Buches. Rechte aber sind die bei *Γ*. Rechte also auch die bei *Δ*. Da nun die durch den Mittelpunkt gehende *ΓΔ* die nicht durch den Mittelpunkt gehende[87] *EH* rechtwinklig schneidet, so halbiert sie sie auch nach dem dritten Satze des dritten Buches der Elemente. Dieweil also *ΔH* gleich *ΔE*, *ΔZ* aber gemeinschaftlich ist und die Winkel bei *Δ* Rechte sind, so ist folglich auch die Basis *ZH* gleich der Basis *ZE*. Aber es ist auch *BZ* gleich *ZK*, weil auch *BΓ* gleich *ΓK*, *ΓZ* aber gemeinschaftlich ist und die Winkel bei *Γ* Rechte sind. Da also die beiden *HZ* und *ZB* den beiden *KZ* und *ZE* gleich sind und die Winkel am Scheitel gleich sind, so ist auch die Basis *HB* gleich der Basis *EK*.

Wenn sich dies nun so verhält[88], *so wird*, sage ich, *ein Kreis das durch EKBH bezeichnete*[89] *Trapez umschliefsen.* Denn sicherlich wird ein Kreis das Dreieck *EKH* umschliefsen; wir haben nämlich in dem fünften Satze des vierten Buches der Elemente die Mittel, einen Kreis um ein gegebenes Dreieck zu beschreiben. Wenn ich nun zeigen werde, dafs die aus dem Mittelpunkte nach *B* gezogene Gerade gleich dem nach *K* gezogenen Radius[90] ist, so ist klar, dafs das Kreissegment, das durch *EKH* gezogen wird, auch durch *B* kommen und dafs ein Kreissegment das Trapez umschliefsen wird. Dieses Segment wird auch das durch *EZH* bezeichnete Dreieck einschliefsen. Wenn nun als Mittelpunkt etwa *Δ* angenommen wird und die Verbindungslinien *ΔE*, *ΔH*, *ΔK*, *ΔB* gezogen werden, so sind, da ja das Dreieck *EΔH* gleichschenklig ist (denn die Radien sind gleich[91]), die Winkel an der Basis gleich, nämlich *ΔHE* gleich *ΔEH*, wegen des fünften Satzes des ersten Buches der Elemente

EUKLIDS. Es ist aber der Winkel BHE gleich KEH, weil auch EB gleich KH ist, wie gezeigt wurde. Folglich ist auch der ganze Winkel BHA gleich dem ganzen KEA; es ist aber auch KE gleich BH. Also ist auch die Basis KA gleich AB; folglich ist AB gleich dem Radius AK. Es sei nun das Segment beschrieben.

Es sei nunmehr um das Dreieck EZH ein Kreissegment beschrieben, so ist klar, dafs die Segmente EZ und ZH ähnlich einem jeden der Segmente EK, KB, BH sind.[92]

Wenn sich dies so verhält, so wird das dargestellte Möndchen, dessen äufserer Bogen $EKBH$ ist, gleich der geradlinigen Figur sein, die aus den drei Dreiecken BZH, BZK, EKZ zusammengesetzt ist. Die Segmente nämlich, die durch die Geraden EZ, ZH auf der Innenseite des Möndchens von der geradlinigen Figur weggenommen werden, sind gleich den aufserhalb der geradlinigen Figur befindlichen Segmenten, die durch EK, KB, BH weggenommen werden. Denn jedes der beiden auf der Innenseite ist anderthalbmal so grofs wie jedes der äufseren. Es ist nämlich EZ (in der Potenz) als anderthalbmal so grofs vorausgesetzt worden wie der Radius, d. h. wie EK und KB und BH.[93] Denn auch diese letztere wurde als gleich EK nachgewiesen. Wenn also von EZ und ZH jede in der Potenz anderthalbmal so grofs ist wie jede der drei genannten, Segmente aber sich zu den Segmenten verhalten wie (in der Potenz) Geraden zu den Geraden, so sind folglich die zwei Segmente den dreien gleich. *Wenn nun einerseits das Möndchen aus den drei Segmenten und der geradlinigen Figur mit Ausschlufs der zwei Segmente besteht, andererseits die geradlinige Figur die zwei Segmente enthält und die drei nicht, die zwei Segmente aber den dreien gleich sind, so dürfte wohl das Möndchen der geradlinigen Figur gleich sein.*

Dafs aber der äufsere Bogen dieses Möndchens kleiner ist als ein Halbkreis, beweist er vermittels des Umstandes, dafs der in dem äufseren Segmente befindliche Winkel EKH ein stumpfer ist.[94] Es ist nämlich in dem 31. Satze des dritten Buches der Elemente EUKLIDS bewiesen worden, dafs „der in dem kleineren Segmente als ein Halbkreis gröfser als ein Rechter ist.“ Dafs aber der Winkel EKH ein stumpfer ist, beweist er so: Da die Gerade EZ in der Potenz anderthalbmal so grofs ist wie die Radien, die Gerade KB aber gröfser ist als die Gerade BZ, weil auch der Winkel bei Z gröfser ist, wie ich zeigen werde, und andererseits BK gleich KE ist, so ist klar, dafs die Gerade BE in der Länge mehr als doppelt so grofs wie die Gerade BZ, und die Gerade KE folglich in der Potenz mehr als doppelt so grofs sein wird wie die Gerade KZ*) wegen der Ähnlich-

*) Um Mifsverständnisse zu vermeiden und um die Kontinuität in der Übersetzung des eudemischen Referates zu wahren, bemerke ich auch an dieser Stelle,

keit der Dreiecke *BEK* und *BKZ*. Denn so wie *EB* zu *BK* ebenso verhält sich *EK* zu *KZ*; *folglich ist die Gerade EK in der Potenz mehr als doppelt so grofs wie die Gerade KZ.*[95] *Die Gerade EZ aber ist in der Potenz anderthalbmal so grofs wie die Gerade EK: daher ist die Gerade EZ in der Potenz gröfser als die Geraden EK und KZ zusammen.* Wenn nämlich in der Potenz *EK* doppelt so grofs wäre wie *KZ*, *ZE* aber anderthalbmal so grofs wie *EK*, so wäre *ZE* in der Potenz gleich *EK* und *KZ* zusammen, wie bei den Zahlen 6, 4, 2; da ja aber *EK* in der Potenz mehr als doppelt so grofs ist wie *KZ*, so wie sich 4 zu 1 verhält, so ist auch (da ja 6 gröfser als 5 ist) *EZ* in der Potenz gröfser als *EK* und *KZ* zusammen[96]: *Folglich ist der Winkel bei K ein stumpfer, das Segment also, in dem er sich befindet, kleiner als ein Halbkreis. Auf diese Weise quadrierte also* HIPPOKRATES *jedes*[97] *Möndchen, wenigstens insofern er sowohl das quadrierte, das als äufseren Bogen den eines Halbkreises, als auch das, das einen gröfseren als ein Halbkreis, wie auch das, das einen kleineren hat.*

Aber durchaus nicht nur das über der Seite des Quadrates, wie ALEXANDER berichtete, auch unternahm er es keineswegs[98], den Kreis durch die Möndchen über der Seite des Sechsecks zu quadrieren, was ebenfalls ALEXANDER behauptet.

Ein Möndchen aber mit einem Kreise zusammen quadrierte er folgendermafsen. Es seien um einen mit K bezeichneten Mittelpunkt[99] *zwei Kreise beschrieben, der Durchmesser des äufseren aber sei in der Potenz sechsmal so grofs wie der des inneren, und nachdem in den inneren Kreis das mit ΑΒΓΔΕΖ bezeichnete Sechseck eingeschrieben worden ist, seien die Radien KA, KB, KΓ bis zu dem Umfange des äufseren Kreises verlängert worden, und es seien die Verbindungslinien HΘ, ΘI*[100] *gezogen; dann ist klar, dafs auch HΘ, ΘI Seiten eines Sechsecks sind, nämlich des in den gröfseren Kreis eingeschriebenen.*[101] *Und über der Geraden HI sei ein Segment beschrieben, ähnlich dem, das von der*

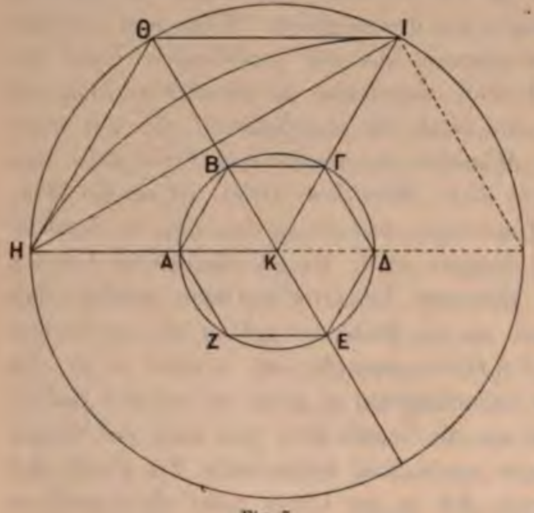


Fig. 7.

dafs nach meiner Überzeugung HIPPOKRATES direkt aus der Figur $BK^2 > 2KZ^2$ und daraus $EK^2 > 2KZ^2$ entnahm. Für die genauere Begründung s. Anm. 95.

Geraden $H\Theta$ *abgeschnitten wird. Da nun die Gerade* HI *in der Potenz dreimal so grofs sein mufs wie die Seite* ΘH *des Sechsecks (denn die unter zwei Seiten des Sechsecks gespannte schliefst mit einer einzigen anderen einen rechten Winkel ein, den in einem Halbkreise, und ist mit ihr zusammen in der Potenz dem Durchmesser gleich, der Durchmesser ist aber in der Potenz viermal so grofs wie die dem Radius gleiche Seite des Sechsecks, weil das in der Länge Doppelte in der Potenz das Vierfache ist*[102]*),* ΘH *aber (in der Potenz) sechsmal so grofs ist wie die Gerade* AB*, so ist klar, dafs sich das über der Geraden* HI *beschriebene Segment als ebenso grofs herausstellt wie die von dem äufseren Kreise durch die Geraden* $H\Theta$*,* ΘI *abgeschnittenen, vermehrt um die, die von dem inneren durch die sämtlichen Seiten des Sechsecks weggenommen werden.* Denn die ähnlichen Segmente der Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate über den Grundlinien, weil sich auch die ähnlichen Kreise zu einander verhalten wie die Quadrate über den Durchmessern.[103] *Es ist nämlich* HI *in der Potenz dreimal so grofs wie* $H\Theta$*,* ΘI *aber in der Potenz gleich* $H\Theta$*, jede von diesen aber in der Potenz ebenso grofs wie die sechs Seiten des inneren Sechsecks, weil auch der Durchmesser des äufseren Kreises in der Potenz als sechsmal so grofs wie der des inneren vorausgesetzt worden ist; wie aber der Durchmesser zu dem Durchmesser, so auch die Radien, der Radius aber ist gleich der Seite des Sechsecks*[104], — wie der Zusatz des vorletzten Theoremes im vierten Buche der Elemente Euklids aussagt; wie aber (in der Potenz) die Seiten, so auch die Segmente, *und so dürfte wohl sicherlich das mit* $H\Theta I$ *bezeichnete Möndchen kleiner sein als das mit denselben Buchstaben bezeichnete Dreieck, und zwar um die Segmente, die durch die Seiten des Sechsecks von dem inneren Kreise weggenommen werden. Denn das Segment über* HI *war gleich den Segmenten* $H\Theta$*,* ΘI*, vermehrt um die, die durch das Sechseck weggenommen werden. Also sind die Segmente* $H\Theta$*,* ΘI *kleiner als das Segment über* HI*, und zwar um die, die durch das Sechseck weggenommen werden. Wenn nun der Teil des Dreiecks, der aufserhalb des über* HI *beschriebenen Segmentes liegt, beiderseits hinzugefügt ist, so wird einerseits aus diesem und dem Segmente über* HI *das Dreieck entstehen, andererseits aus demselben und den Segmenten* $H\Theta$*,* ΘI *das Möndchen. Es wird also das Möndchen kleiner sein als das Dreieck, und zwar um die Segmente die durch das Sechseck weggenommen werden.*[105] *Folglich ist das Möndchen, vermehrt um die Segmente, die durch das Sechseck weggenommen werden, gleich dem Dreiecke. Und wenn das Sechseck beiderseits hinzugefügt ist, so sind dieses Dreieck und das Sechseck gleich dem in Rede stehenden Möndchen und dem inneren Kreise. Denn das Dreieck war gleich dem Möndchen und den Segmenten, die durch das Sechseck von dem inneren Kreise weggenommen werden.*[106] *Insofern nun die*

genannten geradlinigen Figuren quadriert werden können, kann folglich auch der Kreis zusammen mit dem Möndchen quadriert werden.[107]

Das nun, was den Chier HIPPOKRATES betrifft, zu kennen, ist dem EUDEMUS in höherem Maſse einzuräumen, da er ihm den Zeiten nach näher stand und ein Zuhörer des ARISTOTELES war. Die Quadratur des Kreises aber vermittels der Segmente[108], die ARISTOTELES beschuldigt als eine, die sich eines Trugschlusses bediene, spielt entweder auf die vermittels der Möndchen[109] an (mit Recht nämlich schwankte auch ALEXANDER, indem er sagte: „wenn sie dieselbe ist wie die vermittels der Möndchen“[110]), oder sie bezieht sich nicht auf die Beweise des HIPPOKRATES, sondern auf irgend welche andere, von denen einen[111] auch ALEXANDER anführte, oder sie beschuldigt die von HIPPOKRATES herrührende Quadratur des Kreises zusammen mit dem Möndchen, die er in der That vermittels der Segmente bewies, nämlich vermittels der drei (und der) in dem kleineren (Kreise).[112] Denn wahrscheinlich dürfte sogar richtiger *dieser* Beweis der *vermittels der Segmente* genannt werden als gerade der vermittels der Möndchen. Ein Kreissegment nämlich definierte auch EUKLID im dritten[113] Buche seiner Elemente als „die Figur, die von einer Geraden und einem Kreisbogen eingeschlossen wird“. Also sind die Möndchen auch nicht eigentlich Segmente.[114] Und es könnte wohl mit Rücksicht hierauf ein Trugschluſs sein, daſs der Kreis zusammen mit dem Möndchen, aber nicht für sich, quadriert wird, da alles, was in den Beweis aufgenommen wurde, von geometrischen Prinzipien her genommen worden ist. Aber wenn, wie es scheint, die Quadratur des Möndchens von HIPPOKRATES als eine allgemeine überliefert wurde (denn jedes Möndchen hat als äuſseren Bogen entweder den eines Halbkreises oder eines gröſseren Segmentes als ein Halbkreis oder eines kleineren), so könnte man wohl sagen, es sei möglich, aus dem dem Möndchen und dem Kreise gleichen Quadrate ein Quadrat herzustellen, das dem Kreise allein gleich ist, dadurch daſs man nach Wegnahme eines dem Möndchen gleichen Quadrates die übrigbleibende geradlinige Figur quadriert. Wie wird also noch ferner die Quadratur des HIPPOKRATES als durch einen Trugschluſs zu stande gebracht erscheinen, wenn sie von ARISTOTELES als noch nicht gefunden angesehen wurde, indem er in den Kategorien sagt: „wie z. B. die Quadratur des Kreises, wenn sie erkennbar ist, so ist zwar eine Erkenntnis derselben noch nicht da, sie aber ist etwas Erkennbares“, während doch der Chier HIPPOKRATES vor ARISTOTELES lebte, sodaſs auch EUDEMUS ihn zu den älteren zählte? Niemals nun wurde allgemein jedes Möndchen von HIPPOKRATES quadriert. Denn wenn auch der äuſsere Bogen des Möndchens festgelegt ist, so kann man, während jener unverändert bleibt, die zahllosen inneren Bogen des Möndchens wahrlich bis ins Unendliche einen

nach dem andern zeichnen, indem die Fläche bis ins Unendliche geteilt wird, sodaſs, während der äuſsere derselbe bleibt, von den Möndchen die einen gröſser, die andern kleiner sind. Er selbst aber wählte den inneren Bogen als einen bestimmten: denn er wählte ihn so, daſs er ein Segment abschnitt, ähnlich den Segmenten, die bei dem äuſseren Bogen gebildet werden; dabei befanden sich die des ersten Theorems auf einer Quadratseite und die bei den andern auf nicht näher bezeichneten.[115] Und somit wurde nicht jedes Möndchen quadriert, sondern die, deren innerer Bogen ähnlich den Segmenten ist, die bei dem äuſseren gebildet werden und selbst irgendwie bestimmt sind.

III. Anmerkungen und Erläuterungen.

1. Simplicius lebte in der ersten Hälfte des sechsten Jahrhunderts n. Chr. In seiner *Philosophie der Griechen* (3. A. III², p. 843) sagt Zeller: „Neben Damascius erscheint als der bedeutendste unter den Platonikern jener Zeit, von denen uns eine erhebliche Zahl, teilweise auch durch ihre Schriften bekannt ist, der Cilicier Simplicius, welcher zuerst den Ammonius, dann den Damascius zum Lehrer hatte. Die Kommentare dieses Philosophen sind das Werk eines groſsen Fleiſses und einer umfassenden Gelehrsamkeit; sie bilden nicht allein für uns eine unschätzbare Fundgrube von Bruchstücken älterer Philosophen und von Nachrichten über dieselben, sondern sie geben auch, trotz der Umdeutungen, von denen kein neuplatonischer Kommentar frei ist, eine sorgfältige und meist verständige Erklärung des Textes“. Von dem Leben des Simplicius wissen wir nicht viel. Er hatte bei Ammonius (s. Anm. 53) in Alexandria und bei Damascius, dem letzten Vorstande der platonischen Schule von Athen, studiert. Als im Jahre 529 der Kaiser Justinian, in seinem Bestreben, das Heidentum gänzlich auszurotten, das Edikt erlieſs, daſs in Zukunft niemand mehr in Athen Philosophie lehren solle, wanderten die letzten Mitglieder der Schule, darunter Damascius und Simplicius, nach Persien aus, von wo sie aber nach einigen Jahren, etwa um 533, wieder zurückkehrten, nachdem ihnen der Friedensschluſs zwischen Persien und dem römischen Reiche Sicherheit gegen Glaubenszwang verschafft hatte. Die Schule von Athen blieb allerdings geschlossen, Simplicius aber setzte seine gelehrte Thätigkeit noch längere Zeit nach der Rückkehr aus Persien fort. Den umfangreichen Kommentar zu der Physik des Aristoteles, der uns hier beschäftigt, hat er erst nach dem Tode des Damascius verfaſst. (Zeller, l. c. 849—851.)

2. Eudemus von Rhodus war ein persönlicher Schüler des Aristoteles (384—322) und unter diesen wohl der hervorragendste. Von seinem

Leben ist uns weiter nichts bekannt; jedenfalls aber trennte ihn von EUKLID nicht mehr als eine Generation. Von seinen Werken sind nur Bruchstücke erhalten. Diese hat SPENGEL (s. Anm. 5) 1865 gesammelt herausgegeben. Was wir von seiner *Geschichte der Geometrie* kennen, verdanken wir den Aufzeichnungen von PROKLUS und EUTOKIUS, namentlich aber dem uns beschäftigenden Kommentare des SIMPLICIUS. Das von SIMPLICIUS überlieferte Referat ist dem zweiten Buche jener Geschichte entnommen und giebt uns einen ungefähren Begriff von der Anlage des Werkes. Beachtenswert und für das Verständnis des SIMPLICIUSschen Berichtes nicht unwichtig ist übrigens schon die Thatsache an sich, daſs etwa 30 Jahre vor EUKLID eine *Geschichte* der Geometrie entstanden ist. Das, was von dieser Geschichte uns erhalten ist, durch kritische Sichtung dem Wortlaute nach zu sichern, ist eine wichtige Aufgabe, zu deren Lösung auch die vorliegende Arbeit einen Beitrag liefern will.

3. HIPPOKRATES VON CHIOS, ursprünglich Kaufmann, kam um 440 v. Chr. nach Athen, wo er mit den Pythagoräern verkehrte. Genauere Mitteilungen über sein Leben und seine Werke findet man in den noch zu erwähnenden Arbeiten von ALLMAN, BRETSCHNEIDER, CANTOR, TANNERY. Seine Untersuchungen über die Quadratur der Möndchen werden uns natürlich noch genügend beschäftigen.

Da in dem Titel der vorliegenden Abhandlung neben HIPPOKRATES auch ANTIPHON genannt ist, so sei das Wenige, was wir von seinem Leben wissen, gleich hier mitgeteilt. Er war ein athenischer Sophist, der zur Zeit des SOKRATES (470—399) lebte, mit dem er mehrfach „haderte". Somit war er ein Zeitgenosse des HIPPOKRATES.

4. Der Titel der Ausgabe lautet: SIMPLICII *commentarii in octo* ARISTOTELIS *physicae auscultationis libros cum ipso* ARISTOTELIS *textu*. Die aus der Druckerei der bekannten venetianischen Buchdruckerfamilie MANUTIUS hervorgegangenen Drucke werden nach dem Begründer des Geschäftes *Aldinen* genannt.

5. Sie erschien 1870 zu Berlin in zweiter Auflage unter dem Titel: EUDEMI *Rhodii Peripatetici fragmenta quae supersunt coll.* L. SPENGEL. Berolini 1870. Die Bruchstücke aus der *Geschichte der Geometrie* finden sich Seite 113—137.

6. Dieses Werk wird in der Folge einfach mit B. citiert werden.

7. Es würde natürlich viel zu weit führen, wollte ich alle diese Fehler nachweisen. Einige aber von ihnen hervorzuheben, namentlich solche, die weiterverbreitet worden sind, oder die sonst ein Interesse darbieten, wird nicht umgangen werden können.

8. Ausgenommen sind nur die verhältnismäſsig wenig zahlreichen Sätze, bei denen LORIA der Übersetzung TANNERYS oder ALLMANS gefolgt

ist. Aber selbst auch an solchen Stellen, an denen die *Aldina* durch die Ausgabe von DIELS (s. Anm. 11) längst überholt war, hat er es vorgezogen, der BRETSCHNEIDERschen Übersetzung zu folgen, statt den verbesserten Text der neuen Ausgabe („il testo assai migliorato") zu benutzen.

9. Auf die Einzelheiten werde ich noch näher eintreten.

10. Die Untersuchungen ALLMANS erschienen zuerst in Hermathena Vol. IV, p. 180—228. Aufser dem eigentlichen eudemischen Referate findet man bei ALLMAN auch noch die Wiedergabe eines Teiles der ersten Hälfte des SIMPLICIUSschen Berichtes, der mit EUDEMUS nichts zu thun hat. Abgesehen aber davon, dafs ALLMAN hierüber nicht ganz im Klaren zu sein scheint, ist noch zweierlei zu bemerken. Erstens nämlich ist die Darstellung ALLMANS nicht eine eigentliche Übersetzung sondern mehr eine freie Wiedergabe, und zweitens hat sich ALLMAN nicht völlig von BRETSCHNEIDER zu emanzipieren gewufst, denn man begegnet bei ihm einer Reihe von sinnstörenden Wendungen, die er einfach von BRETSCHNEIDER übernommen hat. Ich werde an den betreffenden Stellen darauf zurückkommen.

11. Sie bildet den neunten Band der grofsen, von der Berliner Akademie veranstalteten Ausgabe der *Commentaria in ARISTOTELEM graeca* und hat den Titel SIMPLICII *in ARISTOTELIS physicorum libros quatuor priores Commentaria ed.* H. DIELS. Berolini 1882. Der mathematische Bericht des SIMPLICIUS findet sich Seite 54—69. Die DIELSsche Ausgabe wird in der Folge einfach mit D. citiert werden. Es sei noch erwähnt, dafs die Vorbereitungen zu dieser Ausgabe schon von TORSTRIK getroffen worden waren. Nach seinem Tode hatte dann DIELS die Durchführung des Werkes übernommen.

12. Sie erschien in den Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2e Série T. V, p. 211—236. Diese Abhandlung, mit der wir uns sehr viel zu beschäftigen haben werden, soll in der Folge einfach mit Mém. citiert werden, während die der Praefatio der DIELSschen Ausgabe beigefügten Bemerkungen TANNERYS kurz mit Praef. bezeichnet werden sollen.

13. Philologus. Zeitschrift für das klassische Alterthum. 43. Band, Seite 336—344. Ich werde diese HEIBERGsche Besprechung mit Phil. citieren.

14. Bulletin des sciences mathématiques, 2e Série T. X, p. 213—226.

15. *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons.* Première partie. Paris 1887.

16. Dublin 1889. Ich citiere das Buch von ALLMAN kurz mit A.

17. Nämlich der in den Jahren 1878—1887 unter demselben Titel in Hermathena (s. Anm. 10) veröffentlichten Arbeiten.

18. Ich hielt es für wünschenswert, die Übersetzung so wörtlich als nur irgend möglich zu geben. Hätten es der Raum und andere Verhältnisse zugelassen, so hätte ich gerne der Übersetzung den griechischen Text gegenübergestellt, weil ich auf diesen sehr häufig zurückgreifen mufs. Wer sich daher für den kritischen Teil meiner Arbeit interessiert, wird die DIELSsche Ausgabe zur Hand nehmen müssen. Alle auf die Übersetzung bezüglichen Anmerkungen werden durch D. (= DIELS) und die betreffende Seiten- und Zeilenzahl jener Ausgabe bezeichnet sein.

19. Es ist nicht überflüssig, ausdrücklich darauf hinzuweisen, dafs diese Frage, nämlich: „was meinte ARISTOTELES mit der Quadratur vermittels der Segmente"? das eigentliche Leitmotiv für den Kommentar des SIMPLICIUS bildete, nachdem er die den ANTIPHON betreffende Untersuchung rasch hatte erledigen können.

20. Dieses Urteil über SIMPLICIUS befindet sich allerdings in starkem Widerspruche mit der landläufigen Ansicht, die man sich in mathematischen Kreisen bisher über ihn gebildet hatte. Ich hoffe aber zuversichtlich, dafs nach meiner Übersetzung SIMPLICIUS in einem wesentlich günstigeren Lichte erscheinen wird, als dies bisher der Fall war. In der BRETSCHNEIDERschen Übersetzung erscheint er ja allerdings als ein rechter Tölpel und ungeschickter Schwätzer, aber diese Übersetzung würde SIMPLICIUS ganz gewifs nicht anerkannt, sondern mit Fug und Recht zurückgewiesen haben. Und wenn von den Bearbeitern, die auf BRETSCHNEIDER folgten, der eine erklärt: „SIMPLICIUS was but a poor geometer", und der andere bald von diesen bald von jenen Stellen sagt: „ils accusent l'ignorance de SIMPLICIUS" oder: „ce passage peut servir d'exemple typique de la maladresse de SIMPLICIUS en géométrie" u. s. w., so sind diese Urteile zum mindesten ungerecht. Denn zunächst mufs gesagt werden, dafs alle, die den SIMPLICIUS in solcher Weise beurteilen, ihn zuerst durch BRETSCHNEIDER kennen gelernt haben und daher von anfang an in ungünstigem Sinne beeinflufst worden sind, und sodann dürfte es sich vielleicht doch noch verlohnen, zu untersuchen, ob nicht manches, was bisher als eine Ungeschicklichkeit des SIMPLICIUS gegolten hat, im Grunde genommen vielmehr als eine solche der Interpretation bezeichnet werden mufs. Denn in dem ganzen langen Berichte des SIMPLICIUS finden sich in der That nur zwei wirkliche Ungeschicklichkeiten und nicht mehr, und von diesen ist die eine nicht von Belang und vielleicht sogar Schuld des Abschreibers. Diesen zwei Stellen aber stehen so viele andere gegenüber, an denen SIMPLICIUS ein gründliches, sicheres Wissen, vollständige Beherrschung der Litteratur, vor allem aber — und dies erscheint mir das wichtigste zu sein — ein

klares, verständiges Urteil über die ihm vorliegenden Fragen bekundet, dafs man wohl behaupten darf, SIMPLICIUS habe nicht nur Anspruch auf den Dank sondern auch auf die Achtung der Mathematiker. Seine Auseinandersetzungen erscheinen uns ja heute allerdings manchmal etwas breitspurig, seine Wiederholungen oft ermüdend, aber man mufs doch billigerweise berücksichtigen, dafs SIMPLICIUS nicht speziell Mathematiker war, dafs er sich nicht speziell an Mathematiker wandte, dafs er einen Kommentar und kein Lehrbuch schreiben wollte und dafs dieser Kommentar überdies in dem sechsten Jahrhundert geschrieben wurde. Wer mit Berücksichtigung dieser historischen Verhältnisse an die Lektüre des SIMPLICIUSschen Berichtes herantritt, der wird ihn ganz gewifs mit grofsem Genusse lesen und er wird den Eindruck gewinnen, dafs SIMPLICIUS seine Aufgabe nicht nur gut, sondern — von einem mifsglückten Beweise abgesehen — sogar vortrefflich gelöst habe. Und wenn wir auch alle Ursache haben, zu bedauern, dafs er das eudemische Referat mit eigenen Erläuterungen vermischt habe, so wird ihm doch kein billig denkender Mensch daraus einen Vorwurf machen oder ihn deswegen ungünstig beurteilen. Er konnte doch gewifs nicht ahnen, dafs sein Kommentar später einmal die wichtigste, im vorliegenden Falle sogar die einzige EUDEMUSquelle werden würde!

Wenn ich mich bei dieser Frage der Beurteilung etwas länger aufgehalten habe, so geschah dies nicht nur, um dem SIMPLICIUS eine nachträgliche Ehrenrettung zu teil werden zu lassen und darauf hinzuweisen, dafs er von den Mathematikern ebenso günstig beurteilt werden darf wie von den Philosophen, — sondern vielmehr, weil bei der Interpretation einiger besonders wichtiger Stellen des Kommentars die Frage, welches Mafs von Ungeschicklichkeit dem Autor wohl zugemutet werden kann, von ausschlaggebender Bedeutung sein wird.

---

21. D. 54, 18. Bei BRETSCHNEIDER (B., p. 100) heifst es unrichtig „zu weiteren Schlüssen verwendet werden", was auch ALLMAN (A., p. 65) zu der Übersetzung „lead thus to further conclusions" veranlafst haben mag. Der Sinn ist aber doch natürlich der: Es sind zwei Sorten von Sätzen zu unterscheiden, die *beide* zu *falschen* Schlüssen führen. Die einen aber (τηροῦντες τὰς ἀρχὰς) wahren wenigstens die geometrischen Prinzipien, und diese Sätze soll, nach ARISTOTELES, der Geometer widerlegen; die anderen dagegen (ἀναιροῦντες τὰς ἀρχὰς) heben die Prinzipien auf, schieben sie bei Seite, und diese Sätze braucht man nicht zu widerlegen. Als Vertreter dieser letzteren Sätze wird ANTIPHON, als Vertreter der ersteren HIPPOKRATES genannt.

22. D. 54, 21. πολύγωνον, τετράγωνον, ὀκτάγωνον etc. bezeichnen hier und in der Folge, wie auch sonst vielfach, stets *regelmäfsige* Polygone.

23. D. 54, 22. Mit Recht bemerkt HEIBERG (Phil., p. 336), aus der Wendung εἰ τύχοι gehe hervor, dafs das Quadrat nur ein von SIMPLICIUS selbst gewähltes Beispiel zur Erläuterung des ihm vorliegenden allgemeiner gehaltenen Berichtes sei. Ein anderer Kommentator des ARISTOTELES, THEMISTIUS (ungef. 317—387, in Konstantinopel), von dem wir bald werden zu reden haben, läfst den ANTIPHON von dem eingeschriebenen Dreiecke ausgehen. Daraus glaubten nun BRETSCHNEIDER (B., p. 125) und CANTOR (*Vorles.* I², p. 190) schliefsen zu sollen, ANTIPHON habe wirklich den Exhaustionsprozefs zweimal vorgenommen, indem er das eine Mal von dem Vierecke, das andere Mal von dem Dreiecke ausgegangen sei, — gewissermafsen zu seiner eigenen Beruhigung, da er sich doch nicht ganz sicher gefühlt habe. Indessen dürfte es wohl auch dem ANTIPHON klar gewesen sein, dafs es absolut keinen Unterschied ausmache, was für ein Polygon er zu Grunde lege, und so hätten ihm auch zwei solcher Prozesse durchaus keine gröfsere Sicherheit geben können, als wenn er den einen von ihnen mehrmals hinter einander wiederholt haben würde. Wir werden aber noch erfahren, dafs die beiden Berichte überhaupt gar nicht als zwei verschiedene zu zählen sind (s. Anm. 25), wodurch dann die Schlüsse von BRETSCHNEIDER und CANTOR von selbst dahinfallen werden.

24. D. 54, 25. ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰς περιφερείας. Die Verschiedenheit der Numeri läfst sich im Deutschen nicht beibehalten.

25. D. 55, 6. Im Texte heifst es: „... καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶν ὥστε ποτὲ ..." Da dies aber keinen Sinn giebt, so glaubte USENER (55, 6n.) hier eine Lücke annehmen zu müssen (für deren Ausfüllung er auch einen geeigneten Vorschlag machte), während TORSTRIK ὥστε durch ἐποίει hatte ersetzen wollen. DIELS hingegen ist der Ansicht, dafs in ὥστε wahrscheinlich ᾤετο stecke, im übrigen aber die Stelle in Ordnung sei, eine Vermutung, der auch TANNERY (Praef., p. XXVI) zustimmt. Es läfst sich nun in der That beweisen, dafs ὥστε durch einen Schreibfehler aus ᾤετο entstanden ist. Vergleicht man nämlich die vorliegende Stelle des Textes mit der schon erwähnten entsprechenden Stelle bei THEMISTIUS (Vol. V pars II der in Anm. 11 erwähnten grofsen Ausgabe der *Commentaria*, betitelt: THEMISTII *in* ARISTOTELIS *physica paraphrasis ed.* H. SCHENKL. Berolini 1900, p. 4, 2—4, 8), so zeigt sich eine ganz merkwürdige Übereinstimmung, die bisher nicht beachtet worden zu sein scheint. Wie bei SIMPLICIUS beginnt auch bei THEMISTIUS die Betrachtung mit der Erklärung, dafs sich mit dem ANTIPHON der Geometer eigentlich nicht abgeben solle, darauf folgt die Beschreibung des ANTIPHONschen Verfahrens

und dann kommen genau dieselben entscheidenden Schlufsworte wie bei Simplicius und überdies noch in derselben Partizipialkonstruktion wie dort, nämlich: „... καὶ τοῦτο ἐφεξῆς ποιῶν ᾤετό ποτε ἐφαρμόσειν ...“ Auch hier also wird, wie dort, das Endziel durch ἐφαρμόζειν bezeichnet; und zum Schlufs kommt dann noch, wie bei Simplicius, der Vorwurf, Antiphon habe das Prinzip aufgehoben, dafs die Gröfsen bis ins Unendliche teilbar seien.

Wer diese beiden Stellen zusammenhält, erkennt sofort, dafs sie einer gemeinsamen Quelle entsprungen sein müssen, und zwar einer, die auch die Wortfolge καὶ τοῦτο ἐφεξῆς (oder ἀεὶ) ποιῶν ᾤετό ποτε enthalten hatte. Diese Quelle kann aber kaum eine andere gewesen sein als Eudemus, von dem wir noch erfahren werden, dafs er sich ganz im Sinne der beiden Berichte ausgesprochen hat (s. Anm. 34).

26. D. 55, 8. Obwohl ἐφαρμόζειν gewöhnlich, namentlich von Euklid, in dem Sinne von „zusammenfallen“ gebraucht wird, so ziehe ich es doch vor, ganz wörtlich zu übersetzen, weil sich nicht mit Bestimmtheit behaupten läfst, dafs Antiphon ein eigentliches Zusammenfallen gemeint habe. Die ganze Stelle und die gleich darauf folgenden Schlufsworte lassen sich sehr wohl auch im Sinne einer Näherungskonstruktion deuten.

27. D. 55, 9. Unter den „Elementen“ sind in dem ganzen Simpliciusschen Berichte stets die Elemente Euklids verstanden, die ich in der Folge natürlich immer nach der Ausgabe von Heiberg citieren werde. Im vorliegenden Falle ist Euklid II 14 gemeint.

28. D. 55, 12. Bretschneider (B., p. 101) übersetzt παρὰ τὰς γεωμετρικὰς ἀρχὰς mit „aus geometrischen Gründen“, was ein vollständiges Verkennen des ganzen Themas bekundet. Das Gegenteil ist natürlich richtig (s. Anm. 21).

29. D. 55, 13. Alexander von Aphrodisias in Karien, der berühmte „Ausleger“ des Aristoteles, lebte um 200 n. Chr. in Athen. Von seinen zahlreichen Kommentaren zu den Schriften des Aristoteles ist der zu dessen Physik leider verloren gegangen. Auf diesen stützt sich der ganze erste Teil des Simpliciusschen Berichtes (D. 54, 12—59, 22).

30. D. 55, 16. Euklid III 2 und III 16.

31. D. 55, 16—17. Vielleicht hat Simplicius auch nur gesagt ἄμεινον οὖν λέγειν ἀδύνατον εἶναι, und das andere ist von fremder Hand hinzugefügt, wofür auch die stilistische Härte des Textes sprechen würde. Jedenfalls hat er nur dieses sagen *wollen*. Denn er wendet sich gegen Alexander nicht wegen des ὡς ἀρχήν, sondern wegen des ὑποτίθεται und darin hat er auch ganz recht. Er selbst gebraucht an dieser Stelle das Wort ἀρχή nicht in dem spezifischen Sinne des mathematischen Prinzipes, in dem er es gleich nachher benutzt, sondern so wie wir etwa

sagen würden „es ist prinzipiell unmöglich". Immerhin gebe ich zu, dafs, die Zuverlässigkeit des Textes vorausgesetzt, hier eine erste Ungeschicklichkeit, wenigstens des Ausdruckes, vorliegt. Dafs aber damit zugleich eine fehlerhafte Überlegung verbunden sei, folgt daraus noch nicht. Die Beurteilung, die Tannery (Praef., p. XXVI) der Stelle zu teil werden läfst, erscheint mir daher als etwas zu streng.

32. D. 55, 19. Tannery (Praef., p. XXVII) verlangt ἕν vor σημεῖον, was sachlich durchaus begründet ist. Andererseits ist das Fehlen von ἕν in solchen Fällen keine Seltenheit und hat daher nichts Auffälliges.

33. D. 55, 21. Den Satz εἴπερ ἐπ' ἄπειρόν ἐστι διαιρετὸν τὸ ἐπίπεδον übersetzt Bretschneider (B., p. 102) in ganz unangemessener Weise durch „selbst wenn man die Teilung der Fläche bis ins Unendliche treibt", was gar nicht in den vorliegenden Gedankengang hineingehört. Allerdings darf erwähnt werden, dafs die *Aldina* διαιρεῖν statt διαιρετὸν enthält, was indefs nicht viel ändert. Die falsche Übersetzung findet sich aber auch bei Allman (A., p. 66), nämlich „even though the cutting should be continued ad infinitum".

34. D. 55, 23. Siehe den Schlufs von Anm. 25. Es sei übrigens erlaubt, darauf hinzuweisen, dafs Simplicius diese Verhältnisse sehr sachgemäfs auseinandersetzt und dafs er darüber genau unterrichtet ist, gegen welches geometrische Prinzip Antiphon angeblich gesündigt habe. Wenn er die Einsicht in diese Dinge dem Eudemus verdankt, so zeigt das nur, dafs er es verstanden hat, sich an die richtige Quelle zu wenden, was in dem vorliegenden Falle von Alexander nicht wohl gesagt werden kann. Wenn man aber dem Simplicius unbedingt zugeben mufs, dafs er den Kern der ganzen Sache durchaus richtig erfafst habe, so wird man nachträglich auch geneigt sein, die in Anm. 31 besprochene Ungeschicklichkeit auf ihr richtiges Mafs zurückzuführen.

Was nun Antiphon anbetrifft, so hat bekanntlich die Geschichte ein weniger doktrinäres Urteil über ihn gefällt, als es Aristoteles gethan hat. Denn ob Antiphon den gegen ihn erhobenen Vorwurf verdient, oder ob er mifsverstanden worden ist (s. Anm. 26), spielt keine grofse Rolle. Unter allen Umständen verdient er einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der Geometrie, denn er hat „als der erste den völlig richtigen Weg betreten und den Flächeninhalt eines krummlinigen Raumes zu ermitteln versucht, indem er ihn durch Vielecke von immer wachsender Seitenzahl zu erschöpfen (exhaurire) suchte" (Hankel, *Zur Gesch. d. Mathem.*, p. 117). Und der von Antiphon vorgezeichnete Weg blieb für die Folge mafsgebend: auf ihn gründeten Archimedes und seine Nachfolger die exakte Ausmessung des Kreises, auf ihn gründete auch Vieta seine Produktentwickelung der Zahl π.

35. D. 55, 25. Nämlich ARISTOTELES (s. den Schlufs der Einleitung). Damit kommt nun SIMPLICIUS zu dem Hauptthema seines Berichtes.

36. D. 55, 26. Die Wendung λέγοι δὲ ἂν übersetzt BRETSCHNEIDER (B., p. 102) mit „er möchte nämlich lieber (!) nennen" und auch bei ALLMAN (A., 66—67) findet sich „he would rather call". Das ist aber ein ärgerliches Mifsverständnis, während der Sachverhalt doch der folgende ist: Weil SIMPLICIUS nicht wissen konnte, welche Quadratur ARISTOTELES mit „der vermittels der Segmente" gemeint hatte (s. den Schlufs der Einleitung sowie Anm. 19), so war er natürlich auf Vermutungen angewiesen. Von diesen spricht er nun hier eine aus, um dann später zu anderen überzugehen und sie auch auf ihre Zulässigkeit zu prüfen. Es sei übrigens bemerkt, dafs SIMPLICIUS an dieser Stelle nur dem Sinne aber nicht dem Wortlaute nach dem Kommentare ALEXANDERS folgt; die Worte ALEXANDERS selbst werden später auch noch mitgeteilt.

37. D. 55, 27. Die Konzession, die SIMPLICIUS hier macht, ist sehr bemerkenswert. SIMPLICIUS kannte nämlich, wie überhaupt die Elemente EUKLIDS, so auch natürlich die euklidische Definition von τμῆμα κύκλου (= Kreissegment) sehr wohl und er ist am Schlusse seines Berichtes auch in ganz verständiger Weise auf das hier Gesagte zurückgekommen. Trotzdem hatte es also offenbar für ihn nichts Verletzendes, sogar ein Möndchen, wenigstens vorübergehend, als ein τμῆμα gelten zu lassen. Es ist dies jedenfalls ein Zeichen dafür, dafs dieses Wort nicht nur in seiner engeren Bedeutung als Segment, sondern auch noch in ganz allgemeinem Sinne in der mathematischen Sprache gebraucht wurde.

38. D. 56, 1. Natürlich ALEXANDER.

39. D. 56, 13. Im Texte steht περὶ αὐτὰ, was aber unrichtig ist, denn die Kreise werden nicht um die Quadrate, sondern um die Durchmesser beschrieben. Es mufs also περὶ αὐτὰς heifsen, wie auch D. 57, 10 zeigt. Dafs übrigens αὐτὰ nicht nur ein Druckfehler ist, folgt daraus, dafs auch die *Aldina* αὐτὰ hat.

40. D. 56, 14. EUKLID XII 2.

41. D. 57, 2—14. Diese ganze Deduktion: „Alsdann ist jeder ... über den Seiten des Sechsecks" ist ja allerdings für unseren Geschmack etwas breitspurig, immerhin aber ist das logische Gefüge der Sätze durchaus tadellos, der ganze Beweis sauber und schön. Bei BRETSCHNEIDER hingegen fällt infolge unrichtiger Übersetzung, namentlich der Konjunktionen, das ganze Satzgefüge derart auseinander, dafs die Worte des SIMPLICIUS (oder vielmehr des ALEXANDER) als reines Geschwätz erscheinen. Gerade solche Stellen mufsten den Autor, allerdings sehr mit Unrecht, in den Ruf eines ungeschickten Menschen bringen. Auch die Textkorrektur, die BRETSCHNEIDER p. 104, Anm. 1 anbringt, ist verkehrt. Denn der Um-

stand, daſs die *Aldina* allerdings die Wendung τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἡμικύκλιον enthält, brauchte ihn keineswegs, wie DIELS (57, 11 n.) zur Erklärung bemerkt, dazu zu verleiten, das durch die logische Satzfolge unbedingt geforderte ἡμικύκλιον zu streichen und dann ὥστε gewaltsam durch „aber" zu übersetzen. Kommt doch gleich nachher genau dieselbe Wendung (ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἡμικύκλιον) wieder, ohne daſs BRETSCHNEIDER diesmal daran Anstoſs nimmt!

42. D. 57, 15. Ich lese τά ὑπό τε τῶν, wie es auch an der entsprechenden Stelle D. 64, 2 heiſst.

43. D. 57, 25. Ψευδογράφημα bedeutet wörtlich etwas falsch Geschriebenes oder Gezeichnetes, im weiteren Sinne also auch einen Trugschluſs, der aus einer falschen Figur abgeleitet worden ist. Die griechische Sprache kennt auſserdem noch die Wörter ψευδογραφία = falsches Zeichnen und daher auch falsches Schlieſsen, und ψευδογραφέω = durch eine falsche Figur täuschen. Alle drei Ausdrücke kommen in dem vorliegenden Berichte vor.

44. D. 57, 25—29. Die in diesem Absatz enthaltene Kritik rührt ebenfalls von ALEXANDER, nicht von SIMPLICIUS her (D. 57, 25 n.). Es kann übrigens natürlich kein Zweifel darüber bestehen, daſs hier ein Miſsverständnis vorliegt. Denn daſs ein so eminenter Geometer, wie HIPPOKRATES, einen so plumpen Trugschluſs, wie den vorliegenden, begangen haben sollte, wird niemand glauben, der die von EUDEMUS überlieferten scharfsinnigen Untersuchungen dieses Mathematikers kennen gelernt hat. Der Umstand übrigens, daſs SIMPLICIUS diese Quadratur vermittels des Möndchens über der Sechsecksseite bei EUDEMUS nicht gefunden hat, wie sich noch zeigen wird, läſst mit Recht daran zweifeln, ob sie überhaupt von HIPPOKRATES herrühre. Dies ist denn auch die Überzeugung, zu der schlieſslich SIMPLICIUS kommt.

45. D. 58, 1. Der ganze hier beginnende Absatz ist von BRETSCHNEIDER miſsverstanden worden. Mit den Worten (B., p. 105): „Es ist daher die hier gegebene Nachweisung, die da meint, den Kreis durch Monde zu quadrieren, eine unvollkommene und nicht zwingende, weil in ihr ein Fehlschluſs unterläuft . . ." gliedert er ihn in ganz verkehrter Weise an das Vorhergehende an, ohne zu merken, daſs jetzt noch von einer *anderen* Art, den Kreis durch die Möndchen zu quadrieren, gesprochen werden soll. (Die unbedeutenden Abweichungen der *Aldina* von DIELS spielen dabei keine Rolle.) Leider ist aber auch ALLMAN (A., p. 68) hier wieder der BRETSCHNEIDERschen Übersetzung gefolgt: „The above proof, therefore, which pretends to have squared the circle by means of lunes, is defective, and not conclusive, on account of the false-drawn figure (ψευδογράφημα) which occurs in it." Daſs bei einer solchen Art der Be-

handlung Simplicius schliefslich zu einem „poor geometer“ (s. Anm. 20) werden konnte, ist allerdings nicht zu verwundern. Allman begeht aber noch einen weiteren Irrtum. Denn obwohl der genannte Satz, richtig übersetzt, nichts weniger als ein Schlufssatz ist, so schliefst Allman doch damit den ersten Teil seiner Übersetzung (s. Anm. 10) ab, indem er in einer Anmerkung hinzufügt: „I attribute the above observation (nämlich den soeben wörtlich mitgeteilten mifsverstandenen Satz) on the proof to Eudemus. What follows in Simplicius seems to me not to be his. I have, therefore, omitted the remainder of § 83 and § 84, 85, pp. 105—109, Bretsch., Geom. vor Eukl.“ Es sind das etwas viel Mifsverständnisse auf kleinem Raume. Wie Allman den mitgeteilten Satz, auch wenn die Bretschneidersche Übersetzung die richtige wäre, dem Eudemus zuschreiben konnte, ist ganz unverständlich. Aber freilich befindet sich Allman überhaupt in dem Irrtum, alles von ihm bisher Mitgeteilte rühre im wesentlichen von Eudemus her. Kündigt er doch bei Beginn seines Berichtes an: „I shall attempt now to restore this fragment by removing from it everything that seems to me not to be the work of Eudemus...“

46. D. 58, 2—3. Der Text ist hier etwas unsicher. Offenbar aber spielt Alexander, den Simplicius immer noch sprechen läfst, auf den eben gekennzeichneten Trugschlufs an. Dafs der aber doch wieder mit unterläuft, wird nachher von Simplicius gezeigt.

47. D. 58, 8—13. Die in diesen Zeilen enthaltene Kritik rührt offenbar von Alexander her, der sich damit begnügt, auf die Unmöglichkeit hinzuweisen, den ganzen Kreis in Möndchen zu zerlegen.

48. D. 58, 13—24. Mit *οὐχ ὑγιὴς* wendet sich Simplicius nun selbst gegen die von Alexander mitgeteilte Quadratur und zwar in sehr zutreffender Weise: sie ist vor allen Dingen nicht verständig und im übrigen läuft sie auf denselben Trugschlufs hinaus wie die frühere bei dem Sechseck.

49. D. 59, 6. Ich lese mit Tannery (Praef., p. XXVII) *ἀλλὰ κατὰ τὴν*.

50. D. 59, 7. Bretschneider glaubt (B., p. 106, Anm. 2), hier und auch noch an einigen folgenden Stellen *κύκλος* durch *κυκλικὸς* ersetzen zu müssen. Aber wie *τετράγωνος* und *τετραγωνικὸς*, so wechseln auch in demselben Absatze *κυκλικὸς* und *κύκλος* mit einander (D. 59, 7 n.). Bretschneider verfährt übrigens bei diesen Korrekturen nicht einmal konsequent (D. 59, 17 n.).

51. D. 59, 17. Nämlich im Sinne der dritten Dimension, der Tiefe, insofern zu der zweidimensionalen Zahl $5 \cdot 5 = 25$ noch ein dritter Faktor 5 hinzutritt. Man vergleiche übrigens mit den in diesem ganzen Abschnitte vorkommenden Erklärungen die Definitionen von Euklid VII.

52. D. 59, 22. Verständiger als es SIMPLICIUS in diesem ganzen Abschnitte thut, kann man sich nicht wohl ausdrücken. Obwohl es sich bei dem, was ALEXANDER mitteilt, nur um eine sophistische Spielerei handelt (die nach der Ansicht von TANNERY erst zur Zeit ALEXANDERS selbst aufgekommen war), so zeigt sich SIMPLICIUS doch vollkommen orientiert. Über die Definition und die Entstehungsweise der quadratischen und der cyklischen Zahlen weiſs er alles Erforderliche, er korrigiert die verkehrten Angaben ALEXANDERS in durchaus sachgemäſser Weise, er lehnt es ab, daſs irgend ein Zusammenhang zwischen dieser Zahlenspielerei und dem geometrischen Probleme der Kreisquadratur bestehe, und er giebt zum Schluſse die ganz vernünftige psychologische Erklärung, daſs es sich im Grunde genommen wohl nur um eine einfache Ideenassoziation handele.

53. D. 59, 23. AMMONIUS, Sohn des HERMIAS, lehrte in Alexandria. Er war ein Schüler des PROKLUS, der 410 in Konstantinopel geboren wurde und 485 in Athen starb.

54. D. 59, 28. Hier liegt wieder ein sinnentstellender Übersetzungsfehler BRETSCHNEIDERS vor. Er übersetzt (B., p. 107—108): „Denn weder für den Winkel des Halbkreises noch für die Ergänzung des sogenannten hornartigen Winkels zu einem Rechten . . .“ Abgesehen davon, daſs diese Ergänzung wieder der Winkel des Halbkreises selbst ist, sollte man meinen, der hornförmige Winkel habe in der Geschichte der Mathematik eine hinreichend groſse Rolle gespielt, um vor Miſsdeutungen gesichert zu sein. Der Winkel des Halbkreises ist bekanntlich der Winkel α, den der Halbkreis mit seinem Durchmesser bildet, und *seine* Ergänzung β zum Rechten, nämlich eben der sogenannte hornförmige Winkel, ist der Winkel, den der Halbkreis mit der Tangente im Endpunkte des Durchmessers einschlieſst. Von diesen beiden Winkeln hat schon EUKLID (III 16) den Fundamentalsatz bewiesen: „Der Winkel des Halbkreises ist gröſser als jeder spitze geradlinige Winkel, seine Ergänzung aber kleiner.“ Die Bezeichnung γωνία κερατοειδής findet sich zwar bei EUKLID noch nicht, dagegen wiederholt bei PROKLUS. Mit Rücksicht nun auf jenen Satz EUKLIDS waren die beiden genannten Winkel für die Alten etwas Rätselhaftes: sie waren keine stumpfen Winkel, sie waren auch keine eigentlichen spitzen Winkel, oder schienen wenigstens durch keinen spitzen geradlinigen Winkel meſsbar, sie waren einfach nicht auszumitteln.

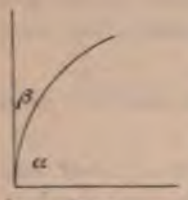


Fig. 8.

55. D. 60, 6. Mit ἀλλὰ καὶ ἀσύμβλητοι meint eben SIMPLICIUS das, was im Anschlusse an EUKLID III 16 in Anm. 54 gesagt worden ist. Daſs er aber sofort auf diesen Satz hinweist, der jenen Winkeln, wenigstens nach der Ansicht der Alten, eine Ausnahmestellung sichert, darf immer-

hin anerkannt werden. Auch sonst hat die Logik, die SIMPLICIUS gegen AMMONIUS entwickelt, etwas entschieden Ansprechendes. Natürlich sind die Begriffe „verwandt“, „ungleichartig“, u. s. w. nicht mathematisch definiert, das ist auch nicht zu verlangen. Aber SIMPLICIUS verbindet damit doch ganz vernünftige Vorstellungen, die trotz der ihnen anhaftenden Unbestimmtheiten logische Verbindungen zulassen. Kurzum, was er sagt, hat Hand und Fufs. Nur mufs man es nicht in der BRETSCHNEIDERschen Übersetzung lesen, die aus den Worten des SIMPLICIUS ein bedauerliches Kauderwelsch macht.

56. D. 60, 7. JAMBLICHUS entstammte einer reichen syrischen Familie und wurde in Chalcis in Cölesyrien geboren. Er war ein Schüler des PORPHYRIUS, unterhielt eine Schule, wahrscheinlich in seiner Vaterstadt, und starb um 330 n. Chr. (ZELLER III², p. 679 und CANTOR I², p. 429—432).

57. D. 60, 10. Nach ZELLER (III², p. 103) ein neupythagoreischer Schriftsteller, über den, abgesehen von der Erwähnung durch JAMBLICHUS, nichts weiter bekannt ist.

58. D. 60, 18. Bei DIELS schliefst der Absatz erst mit dem folgenden Satze (ALEXANDER ... bewiesen). Der Zusammenhang spricht aber mehr für die von TANNERY (Praef., p. XXVII) vorgeschlagene und hier adoptierte Gliederung.

59. D. 60, 24. Die Art, wie SIMPLICIUS kommentiert, bringt es mit sich, dafs er nicht fertige, unumstöfsliche Thatsachen darbietet; vielmehr läfst er den Leser an der Untersuchung teilnehmen, auch auf die Gefahr hin, auf früher Gesagtes wieder zurückkommen zu müssen. So verhält es sich auch wieder hier. SIMPLICIUS weist am Schlusse seines Berichtes ganz klar nach, dafs HIPPOKRATES den Beweis nicht allgemein geführt hatte. Darüber ist er also absolut nicht im Zweifel. Aber hier schon auf eine solche Kritik einzutreten, würde dem Gange seiner Untersuchung nicht entsprechen, daher nimmt er zunächst einmal den Schein für die Wahrheit.

60. D. 60, 28. Ich habe die Lesart der Handschriften *ὀλίγην τινὰ προστιθεὶς σαφήνειαν* beibehalten, obwohl sie etwas befremdlich ist.

61. D. 61, 1. Mit diesem Satze, der bei BRETSCHNEIDER eine kaum glaubliche Interpretation gefunden hat, beginnt nun also das berühmte Referat des EUDEMUS. Unter Hinweis auf das bereits in der Einleitung Gesagte bemerke ich, dafs das, was nach meiner Meinung dem EUDEMUS zuzuweisen ist, in *schräger* Schrift hervorgehoben werden soll. Der Leser ist dann, da auch der ganze übrige Text, in gewöhnlicher Schrift, mitgeteilt wird, in der Lage, die vorgenommene Ausscheidung überblicken und prüfen zu können. Dabei werde ich jede Abweichung von der DIELS-

schen Ausgabe genau bezeichnen und begründen und mich, soweit möglich, auch mit den Interpretationen von ALLMAN, TANNERY und HEIBERG auseinandersetzen.

62. D. 61, 2 ALLMAN (A., p. 69) rechnet διὰ τὴν οἰκειότητα ... zu ἐγράφησαν statt zu οὐκ ἐπιπολαίων. Dieser Auffassung steht aber doch wohl das πρῶτον entgegen; auch gehörte ja hinsichtlich der Quadratur der Kreis gewifs zu den nicht gewöhnlichen Figuren.

63. D. 61, 3. Aus dieser anerkennenden Wendung κατὰ τρόπον (die BRETSCHNEIDER mit „im Laufe der Zeit" wiedergegeben hat) geht hervor, dafs EUDEMUS dem HIPPOKRATES sicherlich keinen Trugschlufs vorzuwerfen hat, worauf auch TANNERY (Praef., p. XXVII) ausdrücklich hinweist.

64. D. 61, 7. Die Wendungen δυνάμει, ἴσον (μεῖζον, ἔλαττον) δύνασθαι und ähnliche, die hier zum ersten Male in dem Berichte auftreten (in der Folge aber sowohl von SIMPLICIUS wie von EUDEMUS, und zwar in übereinstimmender Weise, gebraucht werden, sodafs sie nicht zur Unterscheidung zwischen beiden benutzt werden können), werden übersetzt mit: in der Potenz, in der Potenz gleich (gröfser, kleiner) sein u. s. w. Die Ausdrücke „a in der Potenz" oder „a ist in der Potenz gleich b" oder „a ist in der Potenz gleich b und c" u. s. f. bedeuten soviel wie a^2 oder $a^2 = b^2$ oder $a^2 = b^2 + c^2$ u. s. f. Der Ausdruck Potenz (δύναμις) ist also äquivalent dem Ausdrucke Quadrat (τετράγωνον), die beiden Ausdrücke werden aber entsprechend dem Texte auch in der Übersetzung auseinander gehalten werden.

65. D. 61, 8. TANNERY (Mém., p. 221) übersetzt diese Stelle mit „Il le démontre en s'appuyant sur ce qu'il avait démontré ..." HIPPOKRATES hatte nämlich nach dem Zeugnis des EUDEMUS (EUDEMI *fragm.*, ed. SPENGEL, p. 114; oder auch PROKLUS, ed. FRIEDLEIN, p. 66) als Erster „Elemente" geschrieben, denen aber die Untersuchungen über die Möndchen schwerlich werden angehört haben, da sie ihrer ganzen Anlage nach wohl nicht hineingepafst hätten. TANNERY ist nun der Ansicht, HIPPOKRATES habe den Satz, dafs sich die Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, nur in den „Elementen" bewiesen und sich in seiner Abhandlung über die Möndchen einfach auf den früheren Beweis bezogen. Aber schon USENER (Praef., p. XXVII) hat darauf hingewiesen, dafs diese Deutung nicht im Einklang mit den vorliegenden Worten des EUDEMUS stehe. In der That folgt keineswegs aus der Form δεῖξαι, dafs der dadurch bezeichnete Beweis dem durch ἐδείκνυεν bezeichneten vorangegangen sei, wie TANNERY meint, denn der Infinitiv des Aorist enthält an sich keine Bestimmung der Zeitstufe. Ich kann aber auch darin TANNERY nicht beistimmen, dafs es gegen alle Logik verstofse, anzuneh-

men, HIPPOKRATES habe, wie das ja ausdrücklich von EUDEMUS gesagt wird, an die Spitze seiner Abhandlung den Satz von den Segmenten gestellt und erst dann den von den Kreisen folgen lassen, während dieser doch für jenen unentbehrlich sei. Das wäre allerdings gegen alle Logik bei einem Lehrbuche. Bei einer Abhandlung liegen die Sachen aber doch anders. Wenn man berücksichtigt, daſs der Satz von der Proportionalität der Segmente und der Quadrate ihrer Grundlinien das eigentliche Fundament der Untersuchungen des HIPPOKRATES bildet, daſs sich alles um diesen Satz dreht, während der entsprechende Satz von den Kreisen, der ja natürlich an sich ein Fundamentalsatz ist (schlieſslich aber doch ein Spezialfall von jenem), hier nur die Rolle eines Hülfssatzes spielt, so ist es doch gewiſs nicht befremdend, wenn HIPPOKRATES den Satz, auf dem er seine ganze Untersuchung aufbauen will, dadurch auszuzeichnen sucht, daſs er ihn an die Spitze seiner Abhandlung stellt und ihn als ersten und wichtigsten ausspricht, bevor er nur zu irgend welchen Beweisen übergeht.

Übrigens halte ich es nicht einmal für wahrscheinlich, daſs HIPPOKRATES die „Elemente" vor der Abhandlung über die Quadratur der Möndchen geschrieben habe. Denn in dieser hätte er oft genug Gelegenheit gehabt, sich auf jene zu beziehen, und EUDEMUS würde uns dann doch wohl den einen oder den andern von diesen Hinweisen überliefert haben.

66. D. 61, 9. Im Texte steht nur δεύτερον (was BRETSCHNEIDER mit „zum zweiten Male" übersetzt, während es sich natürlich um EUKLID XII 2 handelt). Derartige Kürzen, namentlich bei EUKLIDcitaten, werden in der Folge noch wiederholt vorkommen, ich hielt es aber nicht für erforderlich, dies in der Übersetzung besonders zu kennzeichnen.

Es ist nicht daran zu zweifeln, daſs dieser Satz EUKLID XII 2 auch in den „Elementen" des HIPPOKRATES gestanden hat. Weniger sicher erscheint dies für jenen Satz von der Proportionalität der Segmente und der Quadrate ihrer Grundlinien. Der Satz fehlt wenigstens bei EUKLID.

67. D. 61, 12. Ich übersetze hier τμήματα mit *Sektoren* und glaube, daſs dies das erlösende Wort ist, durch das der Bann gebrochen wird, der bisher noch auf dem ganzen SIMPLICIUSschen Berichte gelastet hat. Da die beiden Sätze von ὡς γὰρ (D. 61, 11) an bis zu τριτημορίῳ (D. 61, 14) in dem Sinne zusammengehören, daſs in ihnen τμήματα beide Male dasselbe bedeutet, und da sie offenbar auch von derselben Hand herrühren, so sind vier Fälle möglich: Entweder bedeutet τμῆμα beide Male *Segment* oder beide Male *Sektor*, in jedem dieser Fälle können die Sätze von SIMPLICIUS oder EUDEMUS herrühren.

Angenommen τμῆμα habe die übliche Bedeutung *Segment* und die beiden Sätze stammten von SIMPLICIUS. Dies ist die Ansicht von DIELS,

USENER, TANNERY und HEIBERG. Der Annahme steht aber Folgendes entgegen. Zunächst schliefst sich ὡς γὰρ offenbar unmittelbar an ἐδείκνυεν an. Das meint auch TANNERY, indem er sagt: „Il veut faire lui-même la démonstration indiquée par EUDÈME.“ Für SIMPLICIUS wären aber die eigenen Worte ὅπερ Εὐκλείδης ... τετράγωνα, die sich nur auf den von δεῖξαι abhängigen Satz bezogen, entschieden hinderlich gewesen, nun mit ὡς γὰρ fortzufahren, um damit an etwas für ihn weit zurückliegendes anzuknüpfen. Sein Sprachgefühl hätte ihn sicherlich eine andere Wendung wählen lassen. Gesetzt aber, es sei doch SIMPLICIUS, der spreche. Dann wäre seine Beweisführung mit dem ersten jener beiden Sätze, nämlich mit ὡς γὰρ ... τμήματα eigentlich zu Ende gewesen. Denn wenn er den EUDEMUS von den ähnlichen Segmenten hatte sprechen lassen, ohne es für nötig zu finden, sofort eine Definition hinzuzufügen, so brauchte er eine solche auch nicht am Schlusse des Beweises zu geben, wo sie nicht hingehört. Sehen wir aber auch darüber hinweg und wenden wir uns zu der Hauptsache, nämlich zu der gegebenen Definition. Ähnliche Segmente sollen also solche sein, die denselben Teil des Kreises ausmachen. Was soll man nun zu einer solchen Definition sagen! Die ist doch total unbrauchbar. Wie wollte man mit ihrer Hülfe in einem gegebenen Falle die Ähnlichkeit zweier Segmente prüfen! Und nun noch gar die Veranschaulichung durch den Drittelkreis! Wenn dies eine wirkliche Erläuterung sein soll und nicht nur leere Worte, so müfste doch ein Drittelkreis, im Sinne eines Segmentes, ein geläufiges Beispiel sein, wovon gar keine Rede ist. Und dann kommt endlich noch das διὸ. *Deswegen* also, weil ähnliche Segmente solche sind, die denselben Teil des Kreises ausmachen, *deswegen* nehmen ähnliche Segmente auch gleiche Winkel auf!

Nun hat ja TANNERY (Mém., p. 227) für alle diese fatalen Situationen, in die man da gedrängt wird, eine sehr einfache Erklärung gegeben: Wir haben es eben hier mit einem typischen Beispiele von der Ungeschicklichkeit des SIMPLICIUS in geometrischen Dingen zu thun. Dazu wird man aber doch füglich fragen dürfen: Was giebt uns denn ein Recht, ein so vernichtendes Urteil über SIMPLICIUS zu fällen? Denn wenn man sich nicht in einem circulus vitiosus bewegen will, so mufs man doch die Ungeschicklichkeit des SIMPLICIUS zunächst durch andere Beispiele begründen, bevor man sie zur Erklärung der vorliegenden Stelle heranziehen darf. Wer aber auch nur bis hierher den Bericht gelesen hat, der mufs von SIMPLICIUS einen Eindruck erhalten haben, der ihm einfach nicht erlaubt, mit gutem Gewissen so geringschätzig zu urteilen, und dieser gute Eindruck wird sich gegen den Schlufs des Berichtes hin nur noch steigern. Es liegt in der That nicht der Schatten einer Berech-

tigung vor, dem SIMPLICIUS eine solche Ungeschicklichkeit, wie sie hier erforderlich wäre, zuzutrauen. Ungeschicklichkeit wäre in diesem Falle übrigens eine euphemistische Bezeichnung, denn die Sache liegt noch viel schlimmer: Kurz vorher hat SIMPLICIUS gesagt, er wolle nur einige wenige Erläuterungen hinzufügen, und nun läfst er sich beikommen, sogar eine ganz neue Definition zu erfinden, und diese Definition erfindet er überdies ganz zwecklos, denn nach der Interpretation TANNERYS kommt er ja doch nicht zum Ziele, und er erfindet sie schliefslich sogar — was besonders gravierend ist — angesichts der ihm vorliegenden und ihm wohl bekannten euklidischen Definition, die er selbst einige Zeilen später (D. 61, 32) ganz richtig citiert!

Bevor man sich entschliefsen wird, alle diese Ungeheuerlichkeiten zu glauben, wird man zunächst doch wohl untersuchen wollen, ob die Stelle nicht noch andere Interpretationen zuläfst. Das Wort τμῆμα wieder in der Bedeutung *Segment* zu nehmen und jene beiden Sätze dem EUDEMUS zuzuschreiben, würde aber nicht viel ändern. Einiges würde gemildert, anderes aber verschärft werden. Denn nun müfste man schliefslich den HIPPOKRATES für den ganzen Unsinn verantwortlich machen, was doch wohl nicht sein darf und was auch auf keinen Fall befriedigt. Dann bleibt aber nichts anderes übrig, als τμῆμα einmal die Bedeutung *Sektor* beizulegen. Über die Berechtigung dieser Interpretation werde ich nachher noch sprechen und hier nur noch annehmen, der Autor jener beiden Sätze sei EUDEMUS. Der Leser aber möge entschuldigen, wenn sich diese Untersuchungen etwas in die Länge ziehen. Allein es handelt sich hier nicht nur um die weitaus wichtigste und schwierigste Stelle des ganzen eudemischen Referates, sondern zugleich auch um eine Stelle, deren Interpretation von ausschlaggebender Bedeutung ist für die Beurteilung des Zustandes der geometrischen Wissenschaft zur Zeit des HIPPOKRATES.

EUDEMUS führt also jetzt den durch ἐδείκνυεν angekündigten Beweis, wenigstens der Hauptsache nach, wirklich durch. Schon *dafs* er es thut, ist befriedigend. Denn die Andeutung, die der Satz τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ... τοῖς κύκλοις giebt, wäre nicht ausreichend gewesen, und das Fehlen einer weiteren Ausführung dürfte füglich befremden. Der Satz ὡς γὰρ ... τμήματα schliefst sich jetzt in bester Ordnung an ἐδείκνυεν an. Dafs τμήματα nun eine andere Bedeutung hat als zuvor, dafür spricht schon die Thatsache an sich, dafs *überhaupt* jetzt eine Definition folgt. Das wäre nicht nur unnötig sondern sogar ungehörig, wenn ὅμοια τμήματα dasselbe bedeutete wie zuvor. Und nun die Definition selbst! Die ist für Sektoren so typisch, so unzweideutig bezeichnend, dafs sie, aus dem Zusammenhange herausgenommen, sicherlich von jedem, der τμῆμα nur in r allgemeinen Bedeutung „ein abgeschnittenes Stück“ kennt, sofort auf

Sektoren bezogen würde. Wer wird denn jemals aus zwei Kreisen entsprechend gleiche Stücke anders als in Sektorenform herausschneiden! Und wer noch zweifeln wollte, dem müfste der letzte Zweifel durch das Beispiel des Drittelkreises genommen werden. Der Drittelkreis als *Sektor* aufgefafst, ja das ist ein Beispiel, das sich sehen lassen kann. Der Sektor mit dem Centriwinkel von 120 Grad, dessen Sehne die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist, das ist ein Beispiel, das auch in den ältesten Zeiten jedem geläufig war und das sehr wohl durch ein οἷον eingeführt werden durfte. Nunmehr steht denn auch der ganze Beweis des von HIPPOKRATES an die Spitze gestellten Hauptsatzes in seinen Grundlinien deutlich vor uns: Zuerst hat HIPPOKRATES die Proportionalität der Kreise und der Quadrate ihrer Durchmesser bewiesen, vermutlich ebenso wie EUKLID, dann ergab sich das Entsprechende für die Sektoren und nach Abzug der Dreiecke, von denen er nicht zu sprechen brauchte, auch für die Segmente und daraus endlich jener Hauptsatz. (Mit Rücksicht darauf, dafs der Satz τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ... nach meiner Auffassung von EUDEMUS weiter ausgeführt wird, habe ich auch die Klammer, in die er bei DIELS eingeschlossen ist, weggelassen.)

An den ersten Hauptsatz schliefst sich nun ein zweiter, eingeleitet durch διὸ. *Jetzt* ist dieses διὸ an seinem Platze: Weil die ähnlichen Sektoren denselben Teil des Kreises ausmachen, d. h. gleiche Centriwinkel besitzen, deswegen nehmen auch die ähnlichen Segmente gleiche Winkel auf. Jetzt braucht USENER dieses διὸ, mit dem auch DIELS nichts anzufangen wufste, nicht mehr in ⟨δεύτερον⟩ δ' ὅτι aufzulösen, im Gegenteil, dieses διὸ ist jetzt für uns von ganz unschätzbarem Werte, denn es enthält die eigentliche Bestätigung der Thatsache, dafs die Beziehung zwischen Centriwinkel und Peripheriewinkel dem HIPPOKRATES sehr wohl bekannt war. In der That, wie könnte sich auch HIPPOKRATES an diese feinen Untersuchungen über die Möndchen, die sich ganz auf den Eigenschaften der ähnlichen Segmente aufbauen, herangewagt haben, ohne über die wichtigsten dieser Eigenschaften orientiert zu sein! Die Argumente, die BRETSCHNEIDER dagegen ins Feld führt, sind ganz haltlos.

Zwei Hauptsätze sind es also, die HIPPOKRATES an die Spitze seiner Abhandlung stellt: Der eine bezieht sich auf den Flächeninhalt, der andere auf die Winkel der ähnlichen Segmente. USENER (Praef., p. XXVII) hat darin vollkommen Recht, dafs auch der zweite von EUDEMUS ausdrücklich genannt werden mufste und genannt worden ist. Das ist schliefslich auch durch das πρῶτον (D. 61, 5) deutlich genug gesagt.

So zeigt sich denn also, dafs durch die hier zu Grunde gelegte Hypothese die ganze Stelle, die bisher in tiefem Dunkel lag, vollständig erleuchtet wird: jeder Satz hat seinen guten Sinn, jedes Wort hat seinen

richtigen Platz, alles fügt sich aufs beste zusammen zu einem vernünftigen und erfreulichen Ganzen. Aber von dieser Stelle aus dringt jetzt zugleich Licht in das ganze eudemische Referat. Denn die Beziehung zwischen Centriwinkel und Peripheriewinkel und die damit zusammenhängenden Sätze spielen in den folgenden Beweisen eine sehr wichtige Rolle, und wenn man sich dabei auch die Überzeugung bildete, daſs sie dem Hippokrates muſsten zu Gebote gestanden haben, so fehlte doch bisher eine direkte Bestätigung. Eine solche giebt aber jetzt unsere Interpretation. Ich will übrigens nicht unterlassen hinzuzufügen, daſs auf diese Interpretation, in Form einer Vermutung, bereits Allman hingewiesen hat. Denn er sagt (A., p. 69, Anm. 41): „Here τμῆμα seems to be used for sector . . .“ Aber er giebt dieser Vermutung gar keine Folge und wiederholt p. 75 die unbrauchbare Definition der ähnlichen Segmente.

Ich verzichte darauf, mich ausführlicher über die vierte Möglichkeit auszusprechen, nämlich mit Beibehaltung des Wortes *Sektor* jene zwei Sätze (nicht aber auch den mit διὸ beginnenden Schluſssatz, der sicher eudemisch ist,) dem Simplicius zuzuweisen. Für diese Annahme scheint mir nur wenig zu sprechen, gegen sie aber recht viel, was sich indessen zum gröſsten Teile schon aus dem Gesagten ergiebt.

Daſs nun mit meiner Erklärung, die ich auch in der Übersetzung befolgt habe, alle Schwierigkeiten überwunden seien, behaupte ich keineswegs. Vielmehr wird jetzt durch sie die neue Schwierigkeit eingeführt, daſs derselbe Autor dasselbe Wort, nämlich τμῆμα, hintereinander in verschiedener Bedeutung gebraucht haben muſs. Aber diese Schwierigkeit ist doch nur noch eine äuſserliche, die gewiſs nicht in Betracht kommt gegenüber dem Fortschritte, daſs nun für die wichtigste Stelle des eudemischen Referates endlich eine Erklärung gewonnen ist, die nicht nur an sich vernünftig, d. h. frei von inneren Widersprüchen ist, sondern die auch ganz sicher dem wirklichen Sachverhalte entspricht. Daſs nun zunächst τμῆμα ebenso gut für Sektor wie für Segment gebraucht werden kann, daran ist bei der allgemeinen Bedeutung dieses Wortes nicht zu zweifeln. Läſst doch sogar Simplicius zu, daſs man selbst ein Möndchen mit τμῆμα bezeichnen könne (s. Anm. 37). Euklid hat ja allerdings für Sektor das besondere Wort τομεύς (Euklid III def. 10). Ob aber dieses Wort, das schon bei Euklid keine Rolle spielt, bereits früher gebraucht wurde, ist ungewiſs, sicher dagegen ist, daſs τμῆμα auch in anderer Bedeutung wie Segment von griechischen Mathematikern benutzt wurde. Vermutlich muſste eben allemal erst der Zusammenhang oder eine besonders hinzugefügte Erklärung die Bedeutung des Wortes feststellen, wie es sich ja schlieſslich auch im vorliegenden Falle verhält, wo die Definition sofort auf Sektoren hinweist. Wir werden übrigens später einem Falle

begegnen, der hierfür als weiteres Beispiel dienen kann (s. Anm. 90). Es wäre ferner auch denkbar, dafs sich in unserem Berichte ursprünglich noch genauere unterscheidende Bezeichnungen befunden hätten, die aber verloren gegangen sind.

Nach alledem beantworte ich nun die in der Einleitung aufgeworfenen Fragen durch folgende Thesen:

1) *Die Definition, dafs ähnliche Segmente solche seien, die gleichvielte Teile ihrer Kreisflächen ausmachen, ist weder von HIPPOKRATES noch von SIMPLICIUS noch sonst jemals gegeben worden, vielmehr bezieht sich diese Definition auf ähnliche Sektoren.*

2) *Es ist nicht wahr, dafs HIPPOKRATES die Beziehung des Peripheriewinkels zu seinem Centriwinkel nicht gekannt habe. Er hat diese vielmehr sehr wohl gekannt und daher natürlich auch die Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen.*

3) *HIPPOKRATES hat die ähnlichen Segmente nicht wie EUKLID als solche definiert, die gleiche Winkel aufnehmen. Vielmehr war dies für ihn ein Satz, den er mit Hülfe der ähnlichen Sektoren bewies. Vermutlich hat er daher ähnliche Segmente als solche definiert, die zu ähnlichen Sektoren gehören.*

68. D. 61, 20. Das in diesen Worten enthaltene Programm fehlt in der *Aldina*, in der dieser und der folgende Satz zusammengezogen sind. ALLMAN ist hier wieder BRETSCHNEIDER gefolgt.

69. D. 61, 27. Die Figur fehlt in den Handschriften, sodafs wohl angenommen werden darf, dafs auch EUDEMUS eine solche nicht gezeichnet hatte. Das hier konstruierte Möndchen ist natürlich identisch mit dem über der Quadratseite, von dem ALEXANDER (D. 56, 1—21) sprach.

70. D. 61, 29. Im Griechischen wird hier immer der bestimmte Artikel gebraucht. Wörtlich wäre also zu übersetzen: „Über der gegebenen Geraden . . ., der dem gegebenen . . .“ Doch verträgt sich dies nicht mit unserem Sprachgebrauche.

71. D. 61, 33. EUKLID III def. 11.

72. D. 62, 3. Mit Absicht wörtlich übersetzt. Wir sagen natürlich jetzt: „weil das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten ist“.

73. D. 62, 23. Die Figur fehlt in den Handschriften. Falls EUDEMUS überhaupt eine gezeichnet hatte, so hatte er doch jedenfalls keine Buchstaben dazu gesetzt, ferner die Hülfslinien BE, AE, ΓE, ΔE, AZ, ΓZ nicht gezeichnet und von den beiden Diagonalen $B\Gamma$, $A\Delta$ nur eine gezogen. Siehe hierzu Anm. 77, sowie TANNERY (Praef., p. XXVIII); in Bezug auf die Konstruktion des Trapezes s. TANNERY (l. c.) und USENER (Praef., p. XXIII).

74. D. 62, 28. Unter den Diagonalen sind hier die Verbindungslinien BE, $E\Delta$ verstanden.

75. D. 62, 30. Ich lese diese Stelle mit HEIBERG (Phil., p. 340) καὶ ⟨αἱ⟩ γωνίαι ⟨ἴσαι⟩, καὶ τὰ ἑξῆς. Von einer den Inhalt berührenden Lücke des Textes, die BRETSCHNEIDER (B., p. 111, Anm. 1) und ALLMAN (A., p. 71, Anm. 43) glaubten annehmen zu müssen, kann also kaum gesprochen werden. Die Andeutung ist ja für den angekündigten Beweis völlig ausreichend, denn mit καὶ τὰ ἑξῆς ist die Gleichheit von BE und $E\Gamma$ gemeint, an die sich dann die Gleichheit der vier in E zusammentreffenden Linien anschliefst.

Obwohl nach dem Vorgange von BRETSCHNEIDER dieser Beweis, dafs um das Trapez ein Kreis beschrieben werden kann, von CANTOR (*Vorl.* I², p. 197—198) noch immer dem HIPPOKRATES zugeschrieben wird, so kann doch kaum noch ein Zweifel darüber bestehen, dafs er von SIMPLICIUS herrührt. Bei dieser Gelegenheit möge bemerkt werden, dafs die Zuthaten des SIMPLICIUS im allgemeinen gar nicht so schwer zu erkennen sind. Wenn SIMPLICIUS etwas hinzufügt, so sagt er es entweder ganz direkt selbst, oder aber er deutet es in einer meist leicht zu verstehenden Weise an, z. B. dadurch, dafs er in der ersten Person spricht. Die Änderung der Sprechweise ist oft ein viel sichereres Erkennungszeichen als die Kriterien, von denen bald die Rede sein wird. Im vorliegenden Falle wird der Leser durch den Wechsel der Person, der sich in dem Übergange von ὑποτίθεται zu δείξεις ausspricht und auf den auch ALLMAN (l. c.) hinweist, darauf aufmerksam gemacht, dafs der Kommentator eine Erklärung einschiebt. Aber auch viele andere Umstände lassen dies deutlich erkennen, z. B. — von dem EUKLIDcitate natürlich gar nicht zu reden — der Umstand, dafs bei dem Beweise Buchstaben benutzt werden, während EUDEMUS keine gebraucht hat (s. Anm. 77). Vor allem aber würde sich der Beweis einer so einfachen Sache nicht mit der von SIMPLICIUS selbst hervorgehobenen bündigen Darstellungsart des EUDEMUS vertragen. Überläfst doch EUDEMUS viel wichtigere Dinge ruhig dem Leser, im vorliegenden Falle sogar die Hauptsache, nämlich die eigentliche Quadratur des Möndchens.

Ist nun aber der Beweis dem SIMPLICIUS zurückzugeben — und dies ist die übereinstimmende Meinung aller, die den Bericht kritisch untersucht haben —, so fallen auch die von BRETSCHNEIDER und CANTOR daran angeknüpften, auf HIPPOKRATES bezüglichen Bemerkungen dahin. Gerade dieser Beweis war es nämlich, auf den die Behauptung gegründet wurde, HIPPOKRATES habe die Beziehung zwischen Peripheriewinkel und Centriwinkel noch nicht gekannt.

HEIBERG (Phil., p. 340) giebt zwar zu, dafs der Beweis von SIMPLI-

CIUS stamme, glaubt aber, daſs die Worte D. 62, 24—26 von EUDEMUS herrühren, der hier wie öfters nur den Ausgangspunkt des Beweises des HIPPOKRATES kurz angedeutet habe. Seine Worte seien: „*καὶ ὅτι μὲν περιληφθήσεται κύκλῳ τὸ τραπέζιον δείξεις διχοτομήσας τὰς τοῦ τραπεζίου γωνίας*". Ich kann dieser Ansicht aber nicht beistimmen. Denn abgesehen von dem auffallenden *δείξεις* steht auch selbst nur der Andeutung des Beweises das entgegen, was vorhin in Bezug auf die bündige Art des EUDEMUS gesagt worden ist. Zudem sind die Gründe HEIBERGS nicht zwingend. Denn die Worte *καὶ ὅτι μὲν* ... sind als Gegensatz zu *ὅτι δὲ* ... (z. 30) durchaus nicht notwendig, vielmehr ist *ὅτι δὲ* ..., auch ohne vorausgehendes *ὅτι μὲν* ..., eine sehr beliebte Art, einen Satz zu eröffnen (s. z. B. D. 66, 10 und D. 66, 14). Auch der Hinweis auf D. 65, 9 ist nicht überzeugend. Denn als sicher eudemisch kann dort zunächst nur der erste Satz bezeichnet werden, der noch keinerlei Andeutung zu einem Beweise enthält. Und wenn auch der darauf folgende Beweis wirklich von EUDEMUS herrühren sollte (was ich nicht glauben kann), so könnte man daraus gar nichts auf den vorliegenden Fall schlieſsen. Übergeht doch auch EUDEMUS das eine Mal die Quadratur des Möndchens, ohne auch nur eine Andeutung für nötig zu finden, während er sie das andere Mal demonstriert. Endlich aber darf man doch füglich dem SIMPLICIUS zutrauen, daſs er im stande gewesen sei, das Fehlen des Beweises empfunden zu haben, wenn doch der entsprechende Beweis bei dem folgenden Möndchen — sei es von EUDEMUS oder ihm — ausdrücklich geführt wird.

76. D. 62, 32. Unter Durchmesser ist hier verstanden, was wir Diagonale nennen würden, nämlich die Linie $B\Gamma$.

77. D. 63, 1—11. Diese ganze Herleitung: „Da nämlich $B\Delta$ ... und so auch wie $\Gamma\Delta$" darf mit Sicherheit dem SIMPLICIUS zugewiesen werden, obwohl sie von DIELS-USENER (natürlich abgesehen von den beiden EUKLIDcitaten) dem EUDEMUS zugeschrieben wird. Auch ALLMAN (A., p. 71), TANNERY (Praef., p. XXVIII; Mém., p. 221 und p. 228—229) und HEIBERG (Phil., p. 340) betrachten die Ausführung als nicht eudemisch. SIMPLICIUS nimmt sich hier unnötigerweise die Mühe, noch ausdrücklich nachzuweisen, daſs der Winkel $B\Delta\Gamma$ ein stumpfer sei, was eigentlich schon der Augenschein lehrt. Wenn aber auch dieser Beweis entbehrlich ist, so hat ihn doch SIMPLICIUS, entgegen der Meinung von TANNERY (l. c.) und USENER (D. 63, 6 n. und 9 n.), ganz korrekt und lückenlos geführt. Nur darf nach *Εὐκλείδου* (D. 63, 8) kein Punkt gesetzt werden, vielleicht ist auch zwischen *αἱ* und *ὑπὸ* (D. 63, 6) ein *μὲν* ausgefallen, wie ich bei der Übersetzung angenommen habe. Auch das zweite EUKLIDcitat ist ganz in der Ordnung und eine Lücke nach *ἐντὸς* (D. 63, 9) liegt

nicht vor. Der Winkel $AB\Gamma$, von dem die USENERsche Note spricht, kommt überhaupt gar nicht in Betracht.

Nun folgt allerdings noch im Texte auf das zweite EUKIDcitat der merkwürdige Satz: „ἡμίσεια ἄρα ἡ ὑπὸ ΓAZ γωνία ἐστὶ τῆς ὑπὸ $BA\Gamma$“. Diesen Satz, von dem TANNERY (Praef., p. XXVIII) sagt: „de ἡμίσεια ... $BA\Gamma$ despero“, habe ich in der Übersetzung unterdrückt, denn er ist einfach ein Unsinn, der weder mit dem Vorhergehenden noch mit dem Folgenden in Zusammenhang steht. Wäre nämlich ΓAZ die Hälfte von $BA\Gamma$, so wäre das Dreieck $A\Gamma Z$ gleichseitig, woraus dann weiter folgen würde, daſs $B\Delta = 2A\Gamma$ wäre, was nicht der Fall ist. Wie schon BRETSCHNEIDER (B., p. 112, Anm. 3) ganz richtig vermutet, handelt es sich hier um ein bloſses Einschiebsel, das irgend ein Unkundiger, wahrscheinlich in der Meinung, der Auſsenwinkel $BA\Gamma$ sei gleich $A\Gamma Z + \Gamma AZ$, also gleich $2\Gamma AZ$ (ein Fehler, der übrigens auch noch heute sehr beliebt ist), an den Rand geschrieben hat und das dadurch in den Text geraten ist. Daſs ein so offenkundiger und zudem noch so völlig zweckloser Unsinn, der plötzlich mitten in einer sonst ganz korrekten Entwickelung auftaucht, nicht auf Rechnung des SIMPLICIUS gesetzt werden darf, ist wohl selbstverständlich. Amüsant ist übrigens, wie sich BRETSCHNEIDER mit diesem Einschiebsel abfindet: erst korrigiert er den Satz, dann übersetzt er den korrigierten Satz falsch und schlieſslich erklärt er ihn als überflüssiges Einschiebsel.

Daſs nun der vorliegende Beweis, es sei $BA\Gamma$ ein stumpfer Winkel, wirklich von SIMPLICIUS herrühre, geht nach TANNERY (l. c.) erstens daraus hervor, daſs für EUDEMUS keine Veranlassung vorlag, für eine so einfache Sache einen ausdrücklichen Beweis in seine *Geschichte der Geometrie* aufzunehmen, und zweitens daraus, daſs EUDEMUS zu dieser zweiten Quadratur entweder überhaupt keine Figur gezeichnet oder doch wenigstens keine Buchstaben dabei benutzt hatte. Dies erkennt man deutlich, wenn man die Sätze, die unzweifelhaft von EUDEMUS herrühren, nämlich D. 62, 13—23; 62, 30—63, 1; 63, 11—14; 63, 15—18, genauer betrachtet. Man sieht dann, wie sich EUDEMUS mühsamer Umschreibungen bedient, die mit Sicherheit darauf schlieſsen lassen, daſs die auftretenden Linien nicht durch Buchstaben bezeichnet waren. Diese Umschreibungen scheinen mir für das Fehlen der Buchstaben noch beweiskräftiger zu sein, als die Art der Bezeichnung, die SIMPLICIUS benutzt und die nach TANNERYS Meinung EUDEMUS nicht gewählt haben würde (s. Anm. 83).

78. D. 63, 11—14. Ich übersetze absichtlich wörtlich, auch mit Rücksicht auf die Ausführungen am Schlusse von Anm. 77. Mit Buchstaben macht sich die Sache natürlich viel kürzer: Da $B\Gamma^2 > 2\Gamma\Delta^2$ ist, weil der Winkel $BA\Gamma$ ein stumpfer ist, so folgt, daſs $B\Delta^2 < B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$.

Denn es ist $B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 > 3\Gamma\Delta^2$, während nach Voraussetzung $B\Delta^2 = 3\Gamma\Delta^2$ ist. Diese letztere Begründung (D. 63, 14—15) ist wieder dem SIMPLICIUS zuzuweisen und nicht, wie bei DIELS, dem EUDEMUS.

79. D. 63, 20. Vor *οἶμαι* sollte ein Komma stehen. Dann würde man auch nicht in Versuchung kommen, mit BRETSCHNEIDER (B., p. 113) zu übersetzen „wie ich sicher glaube". Diese Übersetzung ist allerdings unrichtig, denn *σαφής* hat nicht die Bedeutung „sicher", und im Texte müſste dann auch nicht *σαφῆ* sondern *σαφῶς* stehen. Wäre die Übersetzung BRETSCHNEIDERS richtig, so würde in der Stelle geradezu ein direkter Beweis für die Richtigkeit der Ansicht TANNERYS liegen, daſs SIMPLICIUS das Werk des EUDEMUS selbst nicht vor sich gehabt, sondern vielmehr aus zweiter Hand citiert habe. Die Übersetzung BRETSCHNEIDERS ist aber, wie gesagt, unzulässig.

80. D. 64, 6. Der Beweis für die Quadratur dieses Möndchens ist ja gewiſs nicht schwer, sonst hätte ihn EUDEMUS auch nicht übergangen. Immerhin muſs auch hier wieder hervorgehoben werden, daſs die beiden Wendungen, die SIMPLICIUS dem Beweise giebt, doch gewiſs ganz korrekt gestaltet sind und daſs von einer Ungeschicklichkeit auch hier nicht wohl gesprochen werden kann.

81. D. 64, 9. Die Figur fehlt in den Handschriften. In Bezug auf die Konstruktion s. ALLMAN (A., p. 72, Anm. 46), USENER (Praef., p. XXIV—XXV) und TANNERY (Praef., p. XXIX und Mém., p. 229—230).

82. D. 64, 13. Hier beginnt nun die viel besprochene altertümliche Ausdrucksweise: *ἡ ἐφ' ᾗ ΑΒ*, d. h. die (Gerade), bei der *Α*, *Β* (stehen), *τὸ ἐφ' ᾧ Κ*, d. h. der (Punkt), bei dem *Κ* (steht). EUKLID und die folgenden griechischen Mathematiker sagen dafür bekanntlich kürzer *ἡ ΑΒ* und *τὸ Κ*. Diesem Unterschiede in der Bezeichnung ist auch in der Übersetzung Rechnung getragen worden, insofern die umständliche, ältere Schreibweise stets durch „die Gerade *AB*" und „der Punkt *K*", die neuere dagegen kurz durch „*AB*" und „*K*" wiedergegeben ist.

Der Umstand nun, daſs sich EUDEMUS bei der vorliegenden und bei der folgenden Quadratur wiederholt der altertümlichen Ausdrucksweise bedient, ist von BRETSCHNEIDER (B., p. 114, Anm. 2) dahin gedeutet worden, daſs EUDEMUS hier allemal die eigenen Worte des HIPPOKRATES anführe. Aber diese ältere Ausdrucksweise findet sich neben der neueren auch noch bei ARISTOTELES, sodaſs die Interpretation BRETSCHNEIDERS nicht ausreichend begründet ist. Inwieweit nun das Vorkommen der älteren Schreibweise als Kriterium benutzt werden kann, um zwischen HIPPOKRATES und EUDEMUS oder aber zwischen EUDEMUS und SIMPLICIUS zu unterscheiden, darüber wird bald noch ausführlicher zu sprechen sein. Hier sei nur noch bemerkt, daſs dieses Kriterium es war, auf Grund

dessen ALLMAN die erste Ausscheidung zwischen EUDEMUS und SIMPLICIUS vorgenommen hatte (s. Anm. 10, sowie A., p. 72, Anm. 45).

83. D. 64, 18. Wir treffen gleich hier an einer unzweifelhaft eudemischen Stelle auf die neuere Bezeichnungsweise ἐπὶ τὸ *B*, die sich in den folgenden sechs Zeilen nicht weniger als *neunmal* wiederholt. TANNERY (Praef., p. XXIX) würde gerne ἐπὶ τὸ ἐφ' ᾧ *B* korrigieren, sieht sich aber mit Rücksicht auf das doch etwas zu häufige Auftreten dieser neueren Schreibart genötigt, darauf zu verzichten. Immerhin meint er, dafs EUDEMUS nur in der Bezeichnung von Punkten, nicht aber auch in der von Linien abwechsele, worauf DIELS (l. c.) erwidert, dafs sich EUDEMUS nach dem Vorgange des ARISTOTELES gewifs auch bei Linien der kürzeren Bezeichnung bedient habe, und dafs überhaupt dieses Hülfsmittel nicht ausreiche, um zwischen EUDEMUS und SIMPLICIUS zu unterscheiden. In der That ist zunächst schlechterdings gar nicht einzusehen, warum sich EUDEMUS zwar bei Punkten, nicht aber auch bei Linien die Freiheit der Bezeichnung gewahrt haben sollte. Macht doch die sprachliche Konstruktion absolut keinen Unterschied zwischen Punkten und Linien. In Wahrheit findet man denn auch eine ganze Reihe von Stellen, an denen Linien und Liniengebilde nach der neuen Art bezeichnet sind und die von DIELS, wie mir scheint mit Recht, dem EUDEMUS zugewiesen werden: 64, 23; 65, 7; 65, 8; 65, 25; 65, 26; 65, 29; 67, 36; 68, 6 u. s. w. TANNERY schreibt nun allerdings diese Stellen, mit Ausnahme von 67, 36, einfach dem SIMPLICIUS zu, aber offenbar nur jenem Kriterium zuliebe, während ein anderer als dieser formelle Grund nicht vorliegt, nun auch gleich alle diese Stellen zu streichen. Im übrigen würde auch schon die eine Stelle 67, 36, die von TANNERY dem EUDEMUS gelassen wird, zur Bestätigung der Ansicht von DIELS ausreichen.

Hat sich nun aber nachweisbar EUDEMUS auch bereits der neueren Bezeichnung bedient, so ist es doch gewifs nur natürlich, wenn man annimmt, er habe für seinen eigenen Gebrauch die neuere, einfachere Schreibweise der älteren, umständlicheren vorgezogen. Diese Annahme wird noch wesentlich durch die Thatsache gestützt, dafs von HIPPOKRATES den EUDEMUS etwa hundert Jahre, von EUKLID aber nur etwa dreifsig Jahre trennen, und dafs bei EUKLID die ältere Bezeichnung bereits verschwunden ist. EUDEMUS wird daher diese Bezeichnung nur da benutzt haben, wo er durch seine Vorlage, also hier durch die Worte des HIPPOKRATES, dazu aufgefordert wurde. Denn dafs HIPPOKRATES zu der vorliegenden komplizierten Konstruktion eine Figur gezeichnet hatte, wäre auch ohne die ausdrückliche Bestätigung durch EUDEMUS selbstverständlich, und ebenso selbstverständlich dürfte die Benutzung von Buchstaben sein. Auf Grund dieser Überlegungen gewinnt daher die Hypothese, die BRET-

schneider allerdings etwas voreilig und ohne ausreichende Begründung aufgestellt hatte, nachträglich doch etwelche Berechtigung. Dafs sich die eudemische Darstellung der vorliegenden und der folgenden Quadratur verhältnismäfsig enge an den Wortlaut des Originaltextes anschliefst, wird auch noch durch andere Überlegungen wahrscheinlich gemacht. Verglichen nämlich mit der ersten und zweiten Quadratur bieten die dritte und vierte nicht unerhebliche Schwierigkeiten dar. Während daher Eudemus über jene frei referieren konnte, wird er sich bei diesen mit gutem Grunde nicht allzu weit von seiner Vorlage entfernt haben. Die beiden letzten Referate nehmen denn auch in der That mehr als doppelt so viel Raum ein wie die beiden ersten und sie sind so ausführlich gehalten, dafs der Unterschied zwischen der Darstellung des Eudemus und der des Hippokrates nicht sehr grofs gewesen sein wird.

84. D. 64, 23. Die Handschriften haben *ἡ μὲν ἐφ' ᾗ EZ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ E πεσεῖται*. Da hier ein offenkundiger Schreibfehler vorliegt, so korrigierte Bretschneider (B., p. 114, Anm. 1) *ἐπὶ τὸ B*, eine Korrektur, die auch von Diels adoptiert wurde. Die Korrektur ist aber falsch. Denn dafs die Verlängerung von *EZ* nach *B* gelange, ist ja vorausgesetzt worden und braucht nicht noch einmal durch *φανερὸν δὴ* (und zum Überflusse sogar noch ein weiteres Mal durch die folgende Parenthese) bestätigt zu werden. Die Konstruktion *φανερὸν δὴ ὅτι ἡ μὲν ... ἡ δὲ ...* läfst vielmehr deutlich erkennen, dafs jetzt von den beiden zuletzt genannten Verbindungslinien von *B* nach *Z* und *H* etwas ausgesagt werden soll. Die richtige Korrektur lautet daher vielmehr umgekehrt *ἡ μὲν ἐφ' ᾗ BZ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ E πεσεῖται.*

85. D. 64, 23—24. Tannery (Praef., p. XXIX) weist diesen in der Parenthese befindlichen Satz dem Simplicius zu, was mir aber nach der eben gegebenen Korrektur nicht mehr erforderlich erscheint.

86. D. 64, 27. Hier endlich begeht jetzt Simplicius eine wirkliche Ungeschicklichkeit — nach der in Anm. 31 hervorgehobenen und leicht entschuldbaren allerdings die einzige, die ihm zum Vorwurfe gemacht werden kann. Über diese kann nun jeder, dem noch nie im Leben ein Beweis mifsglückt ist, so hart urteilen, als er will. Simplicius beweist nämlich die Gleichheit von *BH* und *EK* mit Benutzung des dem Trapeze umgeschriebenen Kreises, den man zu diesem Beweise natürlich gar nicht braucht. Nachträglich empfindet er dann das Bedürfnis, doch noch ausdrücklich zu beweisen, dafs es wirklich einen solchen Kreis giebt, und bei diesem Existenzbeweise benutzt er dann wieder umgekehrt die Gleichheit von *BH* und *EK*.

87. D. 64, 32—65, 1. Dem Wortlaute von Euklid III 3 zufolge ist mit Tannery (Praef., p. XXIX) die ursprüngliche Lesart der Hand-

schriften ἡ οὖν ΓΔ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΕΗ μὴ διὰ τοῦ κέντρου beizubehalten.

88. D. 65, 9. Diese Worte schliefsen sich offenbar direkt an die Konstruktion des Trapezes (D. 64, 7—24) an. Darin sind auch DIELS-USENER (D. 65, 7 n.) und TANNERY (Mém., p. 219) einig. Die beiden Zeilen 65, 7—8, die vorausgehen, müssen daher anderswo untergebracht werden, wovon noch die Rede sein wird (s. Anm. 92). Dafs nun von dem hier gegebenen Beweise der erste Satz (der einfach die Thatsache ausspricht, dafs dem Trapeze ein Kreis umgeschrieben werden könne) dem EUDEMUS angehört, wird von niemandem bestritten; er ist auch unentbehrlich. Ausgenommen ist natürlich φημι, womit SIMPLICIUS an seine erste, voreilige Erwähnung des umgeschriebenen Kreises anknüpft. Schon dieses φημι läfst eigentlich erwarten, dafs das, was jetzt gesagt werden soll, von SIMPLICIUS gesagt werden wird. In der That mufs ich mit TANNERY gegen DIELS-USENER und gegen HEIBERG (Phil., p. 341) annehmen, dafs der ganze Beweis von 65, 10 τὸ μὲν γὰρ . . . an bis zu 65, 23 τὸ τμῆμα von SIMPLICIUS herrühre. Die Gründe sind ähnliche wie die bei der zweiten Quadratur angeführten: Der Beweis einer so einfachen Thatsache verträgt sich nicht mit der Bündigkeit des EUDEMUS. Hat dieser doch auch mit Recht darauf verzichtet, einen Beweis für $EK = KB = BH$ zu geben.

Da aber gerade die vorliegende Stelle so sehr verschieden interpretiert worden ist, so mufs sie doch noch eingehender besprochen werden. Aufser dem ersten unbestrittenen Satze werden von DIELS-USENER noch als eudemisch angesprochen: der zweite (τὸ μὲν . . . κύκλος), der vierte (ἐὰν οὖν δείξω . . . τραπέζιον) und der Schlufssatz (65, 23 γεγράφθω οὖν τὸ τμῆμα). Dafs der zweite und vierte von derselben Hand stammen, ist klar, der vierte aber kann nach meiner Überzeugung nur von SIMPLICIUS herrühren. Wer in einer so aktuellen Sprache ankündigt: „ἐὰν οὖν δείξω“, der verpflichtet sich auch, den Beweis wirklich zu geben. Bei einer Ankündigung dieser Art kann man nicht stehen bleiben. Ganz entscheidend aber dürfte das folgende Argument sein. Wenn φημι (65, 9) auf SIMPLICIUS zu beziehen ist, was keinem Zweifel unterliegt, so kann das nur drei Zeilen später folgende δείξω ganz unmöglich plötzlich auf eine andere Person bezogen werden, ohne dafs auf einen Wechsel in der Person ausdrücklich hingewiesen worden wäre. SIMPLICIUS konnte überhaupt nicht zugeben, dafs in seinem Berichte irgend jemand in der ersten Person redete, dem er nicht durch eine Wendung wie „sagte er“ oder dergl. ausdrücklich das Wort erteilt hätte. Denn nach den vielen Einschiebungen, in denen er selbst in der ersten Person redete, war die allgemeine Einführung λέγει δὲ ὧδε (D. 60, 30) des EUDEMUS als Sprecher nicht mehr

ausreichend. Dafs also der Beweis von ihm herrühre, das sagt SIMPLICIUS im Grunde genommen auch hier wieder ganz deutlich selbst (s. Anm. 75). Mit diesem Beweise sind nun aber auch die Schlufsworte γεγράφθω οὖν τὸ τμῆμα so eng verbunden, dafs man sie ohne Gewalt nicht davon trennen kann. Man sieht und hört förmlich, wie SIMPLICIUS erleichtert aufatmet: Die verschiedenen Beweise haben ihm doch einige Mühe verursacht, jetzt ist er endlich am Ziele und er freut sich, sagen zu können γεγράφθω οὖν τὸ τμῆμα.

Nun ist aber noch eine Schwierigkeit zu überwinden. Denn mitten in dem Beweise des SIMPLICIUS befindet sich der Satz 65, 15—16 ὅπερ τμῆμα καὶ τὸ τρίγωνον περιέξει τὸ ἐφ' οὗ *EZH*, der zwar von DIELS-USENER dem SIMPLICIUS, von TANNERY (Praef., p. XXX) und HEIBERG aber, wegen der altertümlichen Schreibweise, dem EUDEMUS zugewiesen wird. Diese Annahme ist indessen ohne die weitgehendsten Textänderungen nicht aufrecht zu erhalten. So glaubt TANNERY (Mém., p. 219 und 222) zunächst τμῆμα streichen, sodann den ganzen Satz aus seinem Zusammenhange herausnehmen und ihn mit γεγάφθω οὖν τὸ τμῆμα vereinigen zu sollen. Und dies alles, um schliefslich einen Satz zu erhalten, der niemanden befriedigen kann und der ohne Gewaltthätigkeit auch gar nicht so übersetzt werden darf, wie es TANNERY thut. Zu alledem ist dann TANNERY auch noch genötigt, eine Lücke im Texte anzunehmen. HEIBERG, der die Unhaltbarkeit der TANNERYschen Erklärung erkennt, setzt an ihre Stelle eine andere, etwas weniger gekünstelte, die sich aber auch nicht halten läfst. Denn er nimmt an, dafs vor dem Satze ὅπερ τμῆμα ... *EZH* ein Satz ausgefallen sei, der die Vorschrift enthalten habe, über *EH* ein Segment zu beschreiben, das den Segmenten über den drei gleichen Trapezseiten ähnlich sei. An diesen Satz reihe sich dann in natürlicher Weise ὅπερ τμῆμα ... *EZH*. Aber jener angeblich ausgefallene Satz würde eine ganz falsche Vorschrift enthalten: denn nicht das um *EZH* beschriebene Segment, sondern jedes der beiden Teilsegmente *EZ* und *ZH* ist ähnlich jenen dreien *EK*, *KB*, *BH*. Und wenn man ein ähnliches über *EH* beschreiben wollte, so würde es ganz sicher nicht durch *Z* gehen.

Zu all diesen Verlegenheiten und Widersprüchen führt aber nur das starre Festhalten an dem besprochenen Kriterium, demzufolge die alte Ausdrucksweise stets auf EUDEMUS, die neue aber stets auf SIMPLICIUS zurückzuführen sei. Nun möchte ich fragen: Wäre es wirklich etwas so Unnatürliches, wenn SIMPLICIUS, nachdem er sich so und so oftmal als Referent der alten Schreibweise hatte bedienen müssen, nun auch einmal da, wo er selbst spricht, diese alte Bezeichnung, mit oder ohne Absicht, benutzt haben würde? Man mache doch die Probe an sich selbst. Wer

über eine Arbeit eingehend referiert, tritt zu ihr schliefslich in ein solches Verhältnis, dafs er sich dabei unwillkürlich der darin gebrauchten Ausdrücke gelegentlich auch selbst bedient. Und „τὸ τρίγωνον τὸ ἐφ' οὗ *EZH*" war für SIMPLICIUS doch schliefslich auch griechisch und nicht viel fremdartiger als für uns etwa „das mit *EZH* bezeichnete Dreieck". Ein Grund also, das Auftreten des τὸ ἐφ' οὗ mit „ecce EUDEMUS!" zu begrüfsen, liegt ganz gewifs nicht vor, und wenn DIELS den in Rede stehenden Satz dem SIMPLICIUS zuweist, so kann ich dem nur beistimmen.

Aber ὅπερ τμῆμα kann doch nicht auf das vorhergehende τμῆμα bezogen werden, meint HEIBERG. Und doch bezieht es sich in der That darauf. Nur darf περιέξει nicht in dem einseitig mathematischen Sinne von „umgeschrieben sein" gedeutet werden. SIMPLICIUS hat hier offenbar die später (D. 65, 24—25) folgenden Worte οὗ ἐκτὸς περιφέρεια ἡ *EKBH* im Auge und er will einfach der Vollständigkeit halber sagen, dafs dasselbe Segment, das dem Trapeze umgeschrieben ist, zugleich auch das Dreieck *EZH einschliefst*, dafs also dieses Segment wirklich den äufseren Bogen liefert. Es handelt sich also nur um eine ganz harmlose Bemerkung, die durch die alte Schreibweise zu einer unnötigen Berühmtheit gelangt ist.

„Cet endroit est peut-être celui qui se trouvait le plus défiguré par les interpolations de SIMPLICIUS, et dont par suite la restitution exacte est le plus difficile." Mit diesen Worten charakterisiert TANNERY (Mém., p. 230) die hier ausführlich besprochene Stelle. Ich glaube diese Stelle in einer Weise interpretiert zu haben, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läfst, und die jedenfalls das für sich hat, dafs sie den Text nicht als einen ganz korrupten, sondern als einen in bester Ordnung befindlichen erscheinen läfst.

89. D. 65, 9. Durch diese Wendung soll der alten Bezeichnungsart Rechnung getragen werden, während „das Trapez *EKBH*" der neuen entsprechen würde (s. Anm. 82). Es sei noch darauf hingewiesen, dafs hier und auch noch an mehreren anderen Stellen (65, 16; 67, 15; 67, 21; 67, 23 u. a.) ἐπί mit dem Genetiv konstruiert wird.

90. D. 65, 13. Die griechischen Mathematiker hatten kein eigenes Wort für „Radius", sie sagten dafür ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (SIMPLICIUS sagt 65, 12; 65, 13; 65, 22 ἀπὸ statt ἐκ). Aber nicht umgekehrt bedeutet ἡ ἐκ τοῦ κέντρου jedesmal soviel wie Radius. Das kann erst der Zusammenhang entscheiden (s. den Schlufs der Anm. 67). Im vorliegenden Falle soll nun gerade bewiesen werden, dafs die aus dem Mittelpunkte nach *B* gezogene Gerade ein Radius sei.

91. D. 65, 18. Ich schliefse mich der Vermutung von DIELS (65, 18 n.) an, dafs die Lesart der *Aldina* hier die richtige sei.

92. D. 65, 7—8. Hier finden nun die beiden Zeilen ihren Platz, die eine ungeschickte Umstellung erfahren hatten (s. Anm. 88). Dafs diese Umstellung durch SIMPLICIUS verschuldet worden sei, halte ich nicht für wahrscheinlich, wenigstens wüfste ich dafür keine rechte Erklärung zu geben. Vielmehr glaube ich, die verkehrte Anordnung auf Rechnung eines Abschreibers setzen zu sollen, da die Stelle in der vorliegenden Form (bei DIELS wie auch in der *Aldina*) korrupt ist. Denn nicht das ganze Segment EZH, sondern die beiden Teilsegmente EZ und ZH sind den drei Segmenten EK, KB, BH ähnlich. Dies hat auch BRETSCHNEIDER (B., p. 116, Anm. 2) ganz richtig erkannt, sodafs ich die Worte von DIELS (65, 7 n.) nur so verstehen kann, dafs BRETSCHNEIDER vielleicht nicht den richtigen sprachlichen Ausdruck gefunden hat; denn in der Sache hat er unzweifelhaft recht. Ich lese daher, wie BRETSCHNEIDER, etwa: ... *τμῆμα κύκλου, δῆλον ὅτι τὰ τμήματα* EZ ZH *ὅμοια ἑκάστῳ* ... TANNERY hatte also eigentlich gar keine Ursache, eine Lücke im Texte anzunehmen, denn der vorliegende Satz ist nach der einfachen Korrektur genau der, mit dem er die angebliche Lücke ausfüllt.

Dafs nun die genannten Segmente, z. B. EK und EZ, ähnlich sind, liegt auf der Hand, da sie den Peripheriewinkel EHK gemeinschaftlich haben. Der Umstand aber, dafs EUDEMUS mit keiner Silbe die Ähnlichkeit begründet, darf doch wohl so gedeutet werden, dafs er sie für einleuchtend hielt und dafs er in der von HIPPOKRATES allenfalls gegebenen Begründung nichts gefunden hatte, was ihm mitteilenswert erschienen wäre. Kurzum das Stillschweigen des EUDEMUS spricht deutlich für die Richtigkeit der Interpretation, die in Anm. 67 seinen einleitenden Worten gegeben wurde. Zugleich fällt auch, soweit es sich um die vorliegende Stelle handelt, der Vorwurf dahin, SIMPLICIUS habe das eigentlich Wichtige unerklärt gelassen und sich nur mit Unwichtigem befafst.

93. D. 65, 24—66, 2. Diese Sätze weist DIELS, wie mir scheint mit Recht, vollständig dem EUDEMUS zu, während TANNERY (Praef., p. XXX), nur wegen der neuen Schreibweise, verschiedene Kürzungen vornimmt. Dadurch aber beeinträchtigt er ganz unnötiger Weise die Deutlichkeit. In dem ersten Satze z. B. hat EUDEMUS sicherlich nicht unterlassen und auch nicht unterlassen dürfen, die drei Dreiecke ausdrücklich zu nennen, aus denen sich die dem Möndchen gleiche geradlinige Figur zusammensetzt.

Wenn übrigens BRETSCHNEIDER (B., p. 117) diese geradlinige Figur ein Fünfeck nennt, so kommt dem ebenso wenig Berechtigung zu wie den Betrachtungen, die CANTOR (I², p. 195) an dieses angeblich erste „Vieleck mit einspringendem Winkel“ anknüpft.

Endlich ist zu bemerken, dafs in dem letzten der hier bezeichneten

Sätze δυνάμει ausgefallen ist, was sich in der Folge noch einige Male wiederholt. In der Übersetzung wurde „in der Potenz" allemal in Klammern beigefügt.

94. D. 66, 10—12. In diesem Satze streicht TANNERY (Praef., p. XXX) als nicht eudemisch EKH, was aber schon HEIBERG (Phil., p. 342) als unzulässig bezeichnet hat.

95. D. 66, 14—22. Auch diese Stelle, die zweite der beiden schon in der Einleitung hervorgehobenen, ist gar nicht so korrupt, wie sie gewöhnlich bezeichnet wird. Vielmehr läfst sie sich durch ganz geringfügige Änderungen auf die ursprüngliche Form zurückführen. Dazu ist aber vor allem nötig, dafs die von USENER (D. 66, 18 n.) vorgenommene Korrektur, durch die die ganz richtige Lesart BE der Handschriften in die unrichtige BK verwandelt wurde, wieder zurückgenommen werde. Lassen wir in der That nach dieser notwendigen Restitution einfach die Formeln sprechen, so wie sie der Text liefert. Dieser aber liefert in dem angegebenen Intervalle genau die folgenden sieben Relationen:

1) Nach Voraussetzung ist

$$EZ^2 = \tfrac{3}{2} EK^2$$

(also $EZ > EK$).

2) Ferner ist

$$KB > BZ,$$

weil der Winkel bei Z stumpf ist.

3) Es ist aber

$$BK = KE$$

(also auch $KE > BZ$ und erst recht $EZ > BZ$).

4) Hieraus aber *folgt:*

$$BE > 2BZ.$$

5) Es mufs daher sein:

$$KE^2 > 2KZ^2,$$

denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt:

6) $$\frac{EB}{BK} = \frac{EK}{KZ},$$

oder

$$EK \cdot BK = EB \cdot KZ;$$

folglich wegen 3) und 4)

7) $$EK^2 > 2KZ^2,$$

w. z. b. w.

Man sieht also, dafs die Formelsprache, wie sie sich aus den Handschriften ergiebt, absolut korrekt ist: es ist nichts hinzuzufügen, nichts wegzulassen, nichts zu ändern. Ist dies aber einmal festgestellt, so ist für die Textkritik jetzt ein sicherer Boden gewonnen. Und nun ergiebt

sich, dafs die *Worte*, die im Texte die Relation 4) begleiten, nämlich *κἂν ἡ ἐφ' ᾗ BE μείζων ᾗ τῆς ἐφ' ᾗ BZ ἢ διπλασία μήκει* einer Korrektur bedürfen, *aber nicht die Relation selbst.* Diese Relation $BE > 2BZ$ hat nämlich den Charakter einer *Schlufsfolgerung*, und keineswegs den einer *Bedingung* oder einer *Konzession.* Gegen die ungehörige Wendung *κἂν ᾗ* hat sich also die Kritik zu richten: *hier* liegt der Irrtum. Die richtige Erkenntnis des Irrtums führt aber auch sofort zu einer Vermutung über seine Entstehung. Die Stelle wird (unzweifelhaft wenigstens dem Sinne nach) ursprünglich geheifsen haben: „*φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ἐφ' ᾗ BE μείζων τῆς* . . .“ Irgend ein Abschreiber schrieb nun zunächst *μείζων ἢ* statt *μείζων*, da dies eine geläufige Kombination ist, die leicht in die Feder fliefst. Ein folgender bemerkte, dafs *μείζων* ja schon mit dem Genetiv konstruiert sei, und dafs also *ἢ* wohl ein Schreibfehler sein müsse. Er korrigierte daher *ἢ* in *ᾗ*, und nun mufste dem Konjunktiv zuliebe *καὶ* in *κἂν* verwandelt werden. Dieses *κἂν ᾗ* hat dann (wenn es gestattet ist, in der Reihe dieser Vermutungen auch noch die letzte auszusprechen) in unseren Tagen USENER dazu verleitet, BE in BK zu verwandeln, und so ist die vorliegende Stelle zu stande gekommen. Zu der USENERschen Lesart ist übrigens doch noch zu bemerken, dafs sie auch an und für sich ganz unstatthaft ist. Denn $BK > 2BZ$ bedeutet, dafs eine Dreiecksseite gröfser sei als die Summe der beiden andern, und das ist eine so offenkundige Verkehrtheit, dafs sie niemandem, auch nicht in Form einer Hypothese, in den Mund gelegt werden kann. Darauf läfst sich so wenig eine Betrachtung aufbauen als etwa auf der Voraussetzung „auch wenn 2 gröfser wäre als 5“.

Zur Restitution des Folgenden ist jetzt nur noch nötig, das Komma vor *καὶ ἡ ἐφ' ᾗ KE* zu streichen, *ὥστε* mit USENER als *ἔστει* zu lesen und das darauf folgende *μήκει καὶ* als verkehrt zu unterdrücken.

Nachdem nun, wenigstens dem Gedankengange nach, der Beweis für die Relation $EK^2 > 2KZ^2$ mit Sicherheit wiederhergestellt ist, entsteht allerdings die zweite Frage, nämlich ob der Beweis auf EUDEMUS-HIPPOKRATES zurückzuführen ist. Diese Frage glaube ich entschieden verneinen zu müssen. Schon der Satz 66, 14—15: *ὅτι δὲ . . . οὕτως* schliefst sich seinem ganzen Tone nach an die vorangehenden Worte des SIMPLICIUS, nicht aber an die des EUDEMUS an, was sich namentlich auch in der Wiederholung von *ἡ ὑπὸ EKH γωνία* bekundet. Sodann aber halte ich es aus bereits früher entwickelten Gründen (s. Anm. 88) für unerlaubt, *δείξω* (66, 17) anders als auf SIMPLICIUS zu beziehen. EUDEMUS würde es übrigens auch gar nicht der Mühe wert gefunden haben, für die in die Augen springende Thatsache, dafs der Winkel bei Z ein stumpfer ist (ist doch sein Nebenwinkel ein spitzer, da er der Seite

$EK < EZ$ gegenüberliegt), einen besonderen Beweis anzukündigen. Endlich aber scheint es mir unzulässig, anzunehmen, dafs HIPPOKRATES die Relation $EK^2 > 2KZ^2$ auf einem so umständlichen Wege abgeleitet habe. Der Satz, dafs die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Dreiecksseite in der Potenz gröfser sei als die beiden andern zusammen, gehörte gewissermafsen zum alltäglichen Handwerkszeuge des HIPPOKRATES. Mit diesem Satze arbeitete er, damit führte er seine Beweise, nichts konnte ihm vertrauter sein als dieses Hülfsmittel. Auch im vorliegenden Falle ist es wieder dieser Satz, mit dem alles erledigt wird und um den sich alles dreht, wie es ja auch bei der zweiten Quadratur der Fall gewesen war. Und diesen Satz sollte HIPPOKRATES in seiner einfachsten Erscheinung, nämlich bei dem stumpfwinkligen Dreiecke KZB, übersehen haben? Er sollte nicht auf den ersten Blick die Relation $KB^2 > 2KZ^2$, die ja mit $EK^2 > 2KZ^2$ identisch ist, erkannt haben? Und wenn er auch wirklich diese Relation zunächst auf einem andern Wege gewonnen hätte, — er sollte dann auch nachträglich nicht bemerkt haben, dafs die Relation eigentlich selbstverständlich ist? Dies zu glauben, ist mir einfach unmöglich.

An den Satz D. 66, 10—12 dürfte also EUDEMUS-HIPPOKRATES einfach die Worte angeschlossen haben: „ἡ γὰρ ἐφ' ᾗ *BK* μείζων ἐστὶ τῆς ἐφ' ᾗ *KZ* ἢ διπλασία δυνάμει, διότι καὶ γωνία ἡ πρὸς *Z* μείζων ὀρθῆς, ἴση δὲ ἡ *BK* τῇ *KE*· ὥστε . . . (66, 21). Wenn SIMPLICIUS gefunden hatte, dafs dieser kurze Beweis nicht verständlich genug sei, und wenn er ihn daher durch einen etwas weiter ausgeführten, immerhin aber ganz korrekten ersetzte, so war er als Kommentator durchaus entschuldigt.

96. D. 66, 24—67, 2. Bei DIELS ist dieser Satz dem EUDEMUS zugeschrieben. Er dürfte aber doch wohl mit Sicherheit von SIMPLICIUS herrühren, was auch die Meinung von ALLMAN (A., p. 74), TANNERY (Praef., p. XXX) und HEIBERG (Phil., p. 342) ist. Der Satz ist übrigens ganz lückenlos, denn die Zahlen sollen nur als ungefähres Beispiel dienen, das aber nicht wörtlich zu nehmen ist.

97. D. 67, 4. In diesem von EUDEMUS herrührenden Satze streicht TANNERY (Praef., p. XXX) mit Unrecht πάντα und εἴπερ als nicht eudemisch. Durch εἴπερ wird ja aber gerade πάντα in einschränkendem Sinne erklärt. Es ist also gar nicht die Meinung des EUDEMUS, dafs HIPPOKRATES wirklich ganz allgemein alle Möndchen quadriert habe. SIMPLICIUS erklärte allerdings (D. 60, 23—27), offenbar im Hinblick auf diese Stelle, man könnte wohl sagen, HIPPOKRATES habe den Beweis allgemein geführt. Aber auch er ist keineswegs dieser Meinung, wie er bald genug zeigt (s. auch Anm. 59).

HEIBERG (Phil., p. 343) hält den Satz, wenigstens der Form nach,

für nicht eudemisch. Eudemus hat aber doch jedenfalls ein zusammenfassendes Schlufswort gesprochen, und die Übereinstimmung seiner Worte mit denen des Simplicius dürfte darauf zurückzuführen sein, dafs sich Simplicius (l. c.) fast wörtlich auf diese Stelle bezieht. Insbesondere bezieht sich sein καθόλου offenbar gerade auf das πάντα des Eudemus.

98. D. 67, 8. Diese Stelle hat Bretschneider wieder gänzlich mifsverstanden, denn er übersetzt (B., p. 119): „Allerdings aber suchte er den Kreis durch Monde auf der Sechsecksseite zu quadrieren, wie Alexandros dies gleichfalls angiebt.“ Es ist das gerade das Gegenteil von dem, was Simplicius sagt (s. auch Anm. 44).

99. D. 67, 14. Die Figur fehlt in den Handschriften.

100. D. 67, 27. Usener (67, 27 n.) fügt nach ΘI noch HI hinzu, was ich nicht für erforderlich halte.

101. D. 67, 28—29. Tannery (Praef., p. XXX) und Heiberg (Phil., p. 343) weisen, vermutlich wegen der neuen Bezeichnung, diesen Satz dem Simplicius zu. Sachlich gehört der Satz aber zur Vervollständigung der Beschreibung und stilistisch ist hier die neue Bezeichnung (die für mich überhaupt nicht mafsgebend ist) ganz wohl begründet, sodafs ich mit Diels den Satz dem Eudemus lasse.

102. D. 67, 32—36. Heiberg (Phil., p. 343) möchte diese langatmige Parenthese dem Simplicius zuweisen. Da aber wenigstens der erste Teil für das Verständnis durchaus notwendig ist, so schliefse ich mich der Interpretation von Diels an. Wenn übrigens Allman (A., p. 74, Anm. 50) die Parenthese dem Simplicius zuschreibt mit der Motivierung: „the word ἡ ὑποτείνουσα could scarcely have been used by Eudemus in the sense of sub-tense, as it is in this passage“, so vergifst er, dafs dieses Wort bereits an einigen früheren Stellen (D. 62, 33; 63, 13) in derselben Bedeutung vorgekommen ist, und zwar an Stellen, die er selbst als eudemisch anerkannt hat. Das Wort ὑποτείνουσα hatte eben früher thatsächlich eine allgemeinere Bedeutung als unser Wort Hypotenuse.

103. D. 68, 3—6. Dafs dieser Satz von Simplicius stammt, ergiebt sich durch die auch von Usener (68, 3 n.) hervorgehobene Übereinstimmung mit Euklid XII 2. Eudemus hatte die beiden Satzteile mit ganz anderen Worten ausgedrückt (D. 61, 6—9). Nicht uninteressant ist übrigens das von Simplicius vor κύκλοι hinzugefügte ὅμοιοι.

104. D. 68, 6—11. Diese Ausführungen, die Tannery (Praef., p. XXX) und Heiberg (Phil., p. 343) gegen Diels dem Simplicius zusprechen (vermutlich wieder wegen der neuen Schreibweise), schliefsen sich so enge an die Worte des Eudemus an (während ihr Anschlufs an die vorausgehende Erklärung des Simplicius nicht natürlich erscheint), dafs ich sie ebenfalls als eudemisch betrachten mufs.

105. D. 68, 16—24. TANNERY (Praef., p. XXX) weist, wieder wegen der neuen Bezeichnung, diese Sätze dem SIMPLICIUS zu, womit auch HEIBERG (Phil., p. 343) einverstanden ist. Ich muſs sie aber mit Rücksicht auf ihren Inhalt mit DIELS für eudemisch halten. Dafür spricht auch die auffallende Übereinstimmung der Worte: *κοινοῦ οὖν . . . τοῦ τριγώνου* mit der entsprechenden eudemischen Wendung D. 62, 5—6.

106. D. 68, 28—30. Auch diesen Satz halte ich mit DIELS für eudemisch. Mit Rücksicht auf die von SIMPLICIUS (D. 60, 28) gegebene Erklärung sollte, wie mir scheint, überhaupt keine Stelle ohne zwingenden Grund dem EUDEMUS aberkannt werden.

107. D. 68, 32. Damit schlieſst das eudemische Referat. Ich glaubte deswegen auch den Absatz schlieſsen zu sollen, was bei DIELS nicht geschieht.

Nach meiner Überzeugung ist nun der Ausscheidungsprozeſs zwischen EUDEMUS und SIMPLICIUS soweit gefördert, daſs nur noch ganz wenige Stellen, und jedenfalls nur solche von untergeordneter Bedeutung, als zweifelhaft angesehen werden können.

108. D. 68, 34. Mit diesen Worten kehrt nun SIMPLICIUS wieder zu dem eigentlichen Thema seines Kommentares zurück. Er hat jetzt alles erforderliche Material gesammelt, die Berichte von ALEXANDER und EUDEMUS (den er als den Kompetenteren bezeichnet) entwickelt und er wendet sich nun zur Beantwortung der Frage, was ARISTOTELES mit der Quadratur vermittels der Segmente gemeint habe. Darüber hatte er schon früher (D. 55, 26 *λέγοι δὲ ἂν* s. Anm. 36) eine Vermutung geäuſsert, die er nun aber zu Gunsten einer anderen aufgiebt.

109. D. 69, 1. Das war eben diese erste Vermutung, die sich auf die Möndchen über den Seiten des Sechsecks bezog.

110. D. 69, 2. An dieser Stelle schlieſst BRETSCHNEIDER (B., p. 121), in der Meinung, der Satz sei zu Ende (die *Aldina* stimmt aber, abgesehen von einem ausgefallenen *διὰ*, wörtlich mit der Ausgabe von DIELS überein), seine Übersetzung ab, indem er diesen Satzteil folgendermaſsen wiedergiebt: „Die Quadratur des Kreises aber durch Segmente, die ARISTOTELES als irrig angreift, oder die durch Monde, die er gleichfalls bekrittelt, stellt auch ALEXANDROS sehr richtig in Zweifel, wobei er bemerkt, sie sei die nämliche wie die durch Monde.“

Nach allen den mitgeteilten Proben glaube ich nicht zu viel gesagt zu haben, wenn ich in der Einleitung zu meiner Arbeit bemerkte, es dürfte an der Zeit sein, wenn die mathematische Litteratur endlich einmal in den Besitz einer wirklich zuverlässigen Übersetzung des so wichtigen SIMPLICIUSschen Berichtes gelangen würde.

111. D. 69, 3. Gemeint ist die von ALEXANDER mitgeteilte Quadra-

tur, die durch Zerlegung des ganzen Kreises in Möndchen angestrebt wurde (D. 58, 1—9).

112. D. 69, 6. Im Texte heifst es τῶν τριῶν ἐν τῷ ἐλάττονι. Die hier gegebene Ergänzung der verstümmelten Stelle, nämlich τῶν τε τριῶν ⟨καὶ τῶν⟩ ἐν τῷ ἐλάττονι (scil. κύκλῳ), rührt von Tannery (Praef., p. XXX) her.

113. D. 69, 8. Euklid III def. 6.

114. D. 69, 9—10. Mit dieser Wendung (s. auch Anm. 37) giebt also Simplicius die zuerst geäufserte Vermutung (D. 55, 26) auf. Er findet, dafs es der Bedeutung von τμῆμα besser entspreche, anzunehmen, Aristoteles habe die vierte Quadratur des Hippokrates (Kreis mit Möndchen zusammen) im Auge gehabt. Diese Annahme unterzieht er nun einer genauen Prüfung.

115. D. 69, 30—34. Wer die überaus verständigen Darlegungen des Simplicius, der die Situation hier vollkommen beherrscht, vorurteilsfrei liest, wird nicht wohl mit Tannery (Praef., p. XXXI) einen Irrtum annehmen wollen. Simplicius kann doch mit ἀορίστων nicht gemeint haben, diese Seiten seien gänzlich unbestimmt oder willkürlich, so wenig er einige Zeilen später (D. 69, 34) mit πως hat sagen wollen, die Segmente seien in ganz beliebiger Weise bestimmt. Wer mit solcher Sachkenntnis und mit solcher Sicherheit die Gründe zu entwickeln weifs, warum die Quadraturen des Hippokrates nicht als allgemeine bezeichnet werden können, der sollte doch wohl vor Mifsverständnissen dieser Art geschützt sein. Es ist aber zu hoffen, dafs nun überhaupt das Mährchen von der Ungeschicklichkeit des Simplicius aus der Welt verschwinde.

Was nun endlich das angebliche ψευδογράφημα des Hippokrates anbetrifft, so ist hier nur zu wiederholen, was bereits früher (Anm. 44) gesagt wurde: Ein Geometer von dem Range des Hippokrates ist eines solchen Trugschlusses einfach nicht fähig. Wenn auch sehr wohl zugegeben werden kann, dafs Hippokrates bei seinen Konstruktionen als letztes Ziel die Quadratur des Kreises im Auge hatte, so fehlt doch jede Berechtigung, anzunehmen, er habe geglaubt, durch die uns überlieferten Quadraturen die Aufgabe bereits gelöst zu haben. Wenigstens giebt Eudemus keinerlei Anhaltspunkte für eine solche Annahme. Wenn nun aber auch der Vorwurf des Aristoteles, sofern er sich wirklich auf Hippokrates bezog, jeder Begründung entbehrte, so haben wir doch alle Ursache, uns darüber zu freuen, dafs er überhaupt erhoben wurde. Denn diesem Umstande allein verdanken wir den Bericht des Simplicius.

Zürich, Januar 1902.

Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert.

Von Axel Anthon Björnbo in Köbenhavn.

Kürzlich hatte ich Gelegenheit zwei Handschriften Cod. Basil. F II 33 und Cod. Paris. 9335[1]), die beide für die Geschichte der Mathematik im Mittelalter sehr wertvoll sind, zu vergleichen. Beide sind im 14. Jahrh. geschrieben und enthalten gröfstenteils (der Pariser Codex vielleicht ausschliefslich) lateinische Übersetzungen aus dem Arabischen von Gerhard v. Cremona. Beide sind vielfach verwendet worden, obwohl sie keineswegs gleichwertig sind; denn der Baseler Codex (B.) ist nur mit Vorsicht zu benutzen, während der Pariser Codex (P.) in jeder Beziehung zuverlässig ist.

Folgende Schriften, die in beiden Codices stehen, habe ich verglichen: Theodosius *De habitationibus* (*περὶ οἰκήσεων*[2]), Alkindi *De aspectibus*[3]), Pseudo-Euklid *De speculis* und *Liber trium fratrum.*[4])

Was Theodosius *De habitationibus* betrifft, genügt es zu konstatieren, dafs B. nur einen Auszug der Gerhardschen Übersetzung enthält, während wir in P. das ganze Werk finden. Für eine Ausgabe kann also P. zu Grunde gelegt werden, während B. wertlos ist.

Von den zwei optischen Werken geben die zwei Codd. wohl den-

1) Vgl. P. Tannery, *Sur le „Liber augmenti et diminutionis" compilé par Abraham*; Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, p. 45—47.

2) Unediert; eine Ausgabe des griechischen Textes hat Hultsch in Vorbereitung.

3) Unediert; handschriftlich auch im Cod. Cracoviens. 569 (14. Jahrh.). In Cod. Coll. Corp. Chr. 254 (Oxford) stehen nicht zwei Werke von Alkindi, sondern nur das hiesige; nur ist die Vorrede später hinzugefügt.

4) Herausgegeben von M. Curtze (Nova acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher 49, Nr. 2). Den Inhalt von B. giebt Curtze hier p. 111—112 an. In B. fol. 129^r—130^r steht, wie Curtze annimmt (cf. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 381), der Text (*de tribus notis*), den er nach Cod. Vindob. 5277 ebenda ediert. Letztere Handschrift (von J. Vögelin im Anfang des 16. Jahrhunderts geschrieben) ist, wie ich beim Kollationieren von Menelaos' *Sphärik* und Clavus' *Radices Geographiae* erfahren hat, auch mit gewisser Vorsicht zu benutzen.

selben Text, B. aber in einer ziemlich verdorbenen Form. Der betreffende Abschreiber (es sind mehrere, die an B. gearbeitet haben) schreibt flüchtig und recht schwer leserlich; was aber schlimmer ist, er schreibt ganz ohne Verständnis und Interesse ab und hat aufserdem seine Vorlage sehr oft mifsverstanden. Wir warnen deshalb vor unkritischer Benutzung von B. fol. 65—172. Wo andere Abschreiber thätig waren, ist B., wie es scheint, besser, so z. B. fol. 197—219, die PTOLEMAIOS' Perspective (ὀπτικά), die ich mit GOVIS[1]) Ausgabe oberflächlich verglichen habe, enthalten.

Um unsere Kritik von B. mit Beispielen zu belegen, führen wir einige Varianten von *liber trium fratrum*, für dessen Ausgabe B. die Hauptquelle ist, an:

{ In der Ausgabe steht p. 116 Zeile 4: „et declinabitur ex eo, quod
{ In P. heifst derselbe Passus: „et *declarabitur* ex eo, quod
{ narravimus . . . . . .". — p. 118 Z. 10: „causa autem in utendo orthogonio
{ narrabimus . . . . . .". — in P.: „causa autem in utendo orthogonio
{ supra aliis non est, nisi mensurans, quoniam cum oportet, ut sit quanti-
{ *sine* aliis non est, nisi *quoniam mensurans rem* oportet, ut sit quanti-
{ tas . . . . . .". — p. 118 Z. 17: „Incipiamus ergo, nam manifestum <est> illud,
{ tas . . . . . .". — in P.: „Incipiamus ergo *nunc narrare* illud,
{ quod voluimus." — p. 158 Z. 19: „ . . . . . . que sit innitamentum in aliis
{ quod uoluimus." — in P.: „ . . . . . . que sit *iuuamentum* in aliis
{ ex sua geometria."
{ ex *scientia geometrie*."

Im letzteren Beispiel korrigiert der Herausgeber „in aliis" in „MILEI" (d. h. MENELAI, der im *liber trium fratrum* mehrmals erwähnt wird). Nach P. fällt diese Korrektur weg, was eine weitere Bedeutung hat, weil es sich hier um eine Nachricht über MENELAOS aus Alexandria handelt, die mit unseren sonstigen Kenntnissen durchaus nicht übereinstimmt[2]), so dafs die Glaubwürdigkeit der drei Brüder dadurch beeinträchtigt werden könnte.

Um nicht mifsverstanden zu werden, füge ich noch die Bemerkung hinzu, dafs CURTZE, die erste Autorität, was die Mathematik des Mittelalters betrifft, den Baseler Codex natürlich tadellos interpretiert; es ist eben der Codex selbst, der so schlecht ist, dafs Scharfsinn und Kritik einen im Stiche lassen. Es wäre zu wünschen, dafs CURTZE, der es am besten kann, eine neue Ausgabe vom *liber trium fratrum* besorgen wollte, und zwar auf Grundlage der Pariser Handschrift.

---

1) *L'Ottica di* CLAUDIO TOLOMEO *da* GILBERTO GOVI, Torino 1885 (nach cod. Ambros. T. 100).

2) Vgl. CURTZE, l. c. p. 167.

Dafs der Pariser Codex in der That ein überaus guter ist, was schon öfters hervorgehoben ist, dafür habe ich weitere Proben, weil ich den darin enthaltenen Mileustext (MENELAOS' Sphärik) mit mehreren anderen, und zwar mit Cod. Parisin. Arsenalis 1035, Cod. S. Marco Venet. Cl. XI 63 & 90 und Cod. Vindobon. 5277 verglichen habe. Es zeigt sich wieder, dafs P. über den anderen gleichzeitigen Mss. vom 14. Jahrh. steht.

Ein genaues Inhaltsverzeichnis von P. habe ich nirgends gefunden. LIBRIS[1]) Angaben, die sich hauptsächlich auf das alte Verzeichnis in P. selbst stützen, sind ungenau. In DELISLES[2]) Katalog kommen auch Fehler vor. Ich benütze deshalb die Gelegenheit diese Lücke auszufüllen.

Die Handschrift führt die Bezeichnung »Codex Parisinus latinus 9335 (olim Suppl. 49)«, besteht aus 160 paginierten Textfolien und einem Vorsatzblatt mit einem alten Inhaltsverzeichnis. Der Beschreibstoff ist Pergament. Die Schrift (mittelalterl. italien. Minuskel) steht auf eingeritzten Zeilen (immer 51 auf jeder Seite) in zwei Kolonnen. Blattfläche 36 × 23, 5 cm. Schriftfläche (ein bischen variirend) c. 23, 3 × 13, 6 cm. Die 16 Quaternionen zu je 5 Doppelfolien sind ganz in Ordnung[3]), der Codex also vollständig. Der Einband ist neu. Der ganze Codex ist ungewöhnlich gut erhalten und hübsch geziert mit rot-blauen Initialen. Die Schrift, teils mit schwarzer, teils (die Überschriften) mit roter Tinte, ist leicht leserlich. Orthographie und Abkürzungen, die nicht zu reichlich vorkommen, ziemlich konsequent.

Der ganze Text ist von einer Hand geschrieben. Wenigstens zwei neuere Hände haben aber Korrekturen, Erklärungen, Zahlenbeispiele und Randfiguren hinzugefügt, die indefs vom Grundtext leicht zu unterscheiden sind.[4]) Die erste Hand schreibt Zahlen mit Buchstaben oder (an den Figuren und in den Tafeln) mit römischen Zahlzeichen, die älteste der anderen Hände (die zweite) mit arabischen. Die ursprünglichen Figuren sind sehr genau und hübsch, die später hinzugefügten flüchtig hingeworfen.

Die erste Hand hat wenigstens zwei Muster vor sich gehabt; denn die Varianten vom zweiten Muster sind am Rande angegeben, und zwar immer mit den Worten: »in alio libro ...«. Es steigert dies natürlich den Wert des Textes.

---

1) LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, p. 297 ff.

2) L. DELISLE, *Inventaire des Mss. latins conservés à la bibl. nation. sous les numéros 8823—18613* (Paris 1863—1871), p. 28.

3) Auf der Kehrseite des letzten Blattes jeder Quaternion stehen unten die Anfangsworte der ersten Seite der folgenden.

4) TANNERY, l. c. pag. 45, hat eine andere Auffassung. Diese wird er jedoch, glaube ich, nicht festhalten, wenn er die Randnoten mit dem unten erwähnten Inhalt von fol. 134r vergleicht.

Von Subskriptionen giebts nur zwei, deren keine von der ersten Hand herrührt.

fol. 1^r steht unten »Ismael Bullialdus[1]) fol. 160.«

fol. 134^r (ursprünglich unbeschrieben) steht »dicta atque notata per me Johannem Pontana[2]) (vielleicht Fontana) physicum uenetum et probata pro declaratione speculi ardentis quedam sunt principia declaranda.« Die ganze Seite 134^r ist von Pontana beschrieben, während die Kehrseite 134^v unbeschrieben ist. In dieser bisher übersehenen Subskription haben wir, glaube ich, die, wie die Orthographie zeigt, ziemlich alte zweite Hand, die den ganzen Codex überarbeitet hat.[3]) Ein Beispiel einer dritten Hand haben wir fol. 82^r col. 1 unten, wo »Euclidis« (von der ersten Hand mit roter Tinte geschrieben) in »Ptolomei«[4]) (von einer neueren Hand mit brauner Tinte) korrigiert ist.

Aus den Subskriptionen darf man vielleicht schliefsen, dafs der Codex ziemlich früh in Venedig in Pontanas Besitz war, und später von Ismael Bouillaud nach Paris gebracht worden ist.

Einen Wink darüber, wo der Codex ursprünglich geschrieben wurde, giebt uns vielleicht der Umstand, dafs Cod. Arsenalis 1035[5]) folgende Subskription führt: »Ego frater Jacobus Carpensis, prior monasterii Sancte Marie extra Neapolim, ordinis Montis Oliveti, subscripsi«. Dieser Codex, der im Jahre 1525 im Besitz von Franciscus de Medicis war, ist um die Mitte des 15. Jahrh. geschrieben. Die Schrift ist der in P. sehr ähnlich, und der im Cod. Arsenal. stehende Mileustext ist eine Abschrift von dem in P.

---

1) Ismael Bouillaud, franz. Astronom (* Loudun 1605, † Paris 1694), seiner Zeit berühmter Gelehrter, hat viel gereist; so war er mehrmals in Italien.

2) Diesen Johannes Pontana kann ich leider mit keinem der unter diesem Namen bekannten Gelehrten identifizieren: a) Joh. Jovianus Pontanus (* Cerreto 1426, † Napoli 1503) berühmter Staatsmann in Napoli; er schrieb über Physik und scheint sich auch für Mathematik interessiert zu haben (vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1901, 353). b) Joh. Pontana (* Helsingör 1571, † Holland 1639), Arzt, Physiker und Mathematiker, war wahrscheinlich nie in Italien. c) Joh. Pontana († 1572), Königsberger Professor, war wahrscheinlich nie in Italien. — Johannes Fontana (1540—1610) hat 1599 Bemerkungen über eine Überschwemmung in Rom publiziert.

3) Ist Tannerys Auffassung richtig, so ist Pontana der, der den ganzen Pariser Codex geschrieben hat.

4) Dasselbe bemerkt Steinschneider, *Hebr. Übers.* II, p. 512.

5) Vgl. *Catalogue des manuscrits de la bibl. de l'Arsénal par* H. Martin II, p. 246. Paris 1886. — Das hier erwähnte Olivetanerkloster wurde bald nach dem Jahr 1411 gegründet; vgl. Cappelletti, *Le chiese d'Italia* XIX, p. 509. Ein Jacobus Carpensis (ursprünglich Arzt) war Ordensgeneral 1476—1480, ein anderer desselben Namens 1492—1493; vgl. S. Lancelotti, *Historiae Olivetanae* (1623), lib. 1, p. 54—56.

Der Inhalt von Cod. Par. 9335 ist folgender[1]):

1. Theodosios: σφαιρικά (fol. 1r—19r).[2]) fol. 1r: *Pars prima libri theodosii de speris incipit.* Spera est figura corporea, una quidem superficie contenta, intra quam ...... [22 Sätze] ....
fol. 5r: *Expleta est pars prima libri theodosii de speris, uiginti duas continens figuras. Pars secunda libri theodosii incipit* ...... [22 Sätze] ......
fol. 12v: *Pars secunda libri theodosii de speris expleta est. Incipit pars tertia libri theodosii de speris.* ...... [13 Sätze] ....
fol. 19r: ..... Et propter hoc etiam erit arcus $\overline{tk}$ maior arcu simili arcui $\overline{ie}$. Et illud est quod demonstrare uoluimus. *Explicit pars tertia libri theodosii de speris, que est eius pars ultima, cum qua totus finitur liber.*

2. Autolykos: περὶ κινουμένης σφαίρας (fol. 19r—21v).[3]) fol. 19r: *liber autoloci de spera mota incipit.* Punctum equali motu dicitur moueri, cum quantitates equales et similes ....
fol. 21v: ...... ergo unusquisque duorum circulorum $\overline{abgd}$, $\overline{bed}$ est maior, quoniam centrum eorum est centrum spere. Et illud e. q. d. u. *Expletus est liber autoloci de spera mota.*

3. Hypsikles: ἀναφορικός (fol. 22r—23r).[4]) fol. 22r: *Liber esculei de*

---

1) Das kursiv Gedruckte ist im Codex rot geschrieben oder doch rot unterstrichen.

2) Ich habe nicht das genügende Material zur Verfügung, um feststellen zu können, ob dieser Theodosios-Text ediert ist. In der Druckausgabe von Antonio Giunti (Venetiis 1518) steht ein anderer Theodosios-Text mit bezw. 33, 31 und 15 Sätzen, den ich auch in cod. S. Marco Venet. Lat. VIII 32 (Valentinellis Katalog XI, 90), cod. reg. Suec. 1261, cod. Palatin. 1351, cod. S. Marco Florent. 213 und in B. (Basil. F II 33) gefunden habe, während der hiesige Text (Paris. 9335) auch in cod. S. Marco Venet. 332 (Valentinellis Katalog XI, 6) steht. In der hiesigen Text (P.), der kürzeren, vermute ich die Übersetzung von Gerhard von Cremona, in der anderen die von Plato von Tivoli. Sicher feststellen kann ich vorläufig nur, daſs in der That zwei verschiedene Übersetzungen vorliegen, von denen die kürzere aus dem Arabischen übersetzt, während die andere von Campanus überarbeitet und kommentiert ist; denn in der kürzeren kommt das Wort „meguar" (vgl. unten) vor, und die längere wird in dem obengenannten cod. S. Marco Venet. VIII 32 mit folgenden Worten bezeichnet: „liber theodosii de speris cum commento capani (Campani)". Es stimmt dies mit den Berichten überein, nach welchen sowohl Gerhard von Cremona wie Plato von Tivoli die Sphärik des Theodosios aus dem Arabischen übersetzten; vgl. Leclerc, *Historie de la médecine arabe* II, p. 392, 410 und Boncompagni, Atti dell' accademia pontif. dei Nuovi Lincei 4, 1851, 251 ff. und 447.

3) Ob diese Übersetzung ediert ist, habe ich nicht feststellen können. Daſs sie nach dem Arabischen gemacht ist, zeigt der Umstand, daſs die Weltachse oder der Kugeldurchmesser „meguar spere" genannt wird (vgl. Leclerc, l. c. II, p. 392, 416).

4) Ediert von K. Manitius, der die Übersetzung in P. dem griechischen Text zur Seite gestellt hat. (Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz. Dresden 1888). — Die Übersetzung steht auch in B. (fol. 64).

ascensionibus incipit. Si fuerint quotlibet quantitates ....
fol. 23r: ...... modum quo operati fuimus. *Expletus est liber esculei de ascensionibus.*

Anhang 1. (fol. 23r—23v).[1]) fol. 23r: Figura per quam monstratur, quod omnis trianguli in semicirculo cadentis unius duorum laterum in alterum multiplicatio est equalis multiplicationi diametri in perpendicularem que cadit super basim trianguli ....

Anhang 2. (fol. 23v): Postquam cordam gradus siue regulam ptolomei sciuerimus et uoluerimus scire cordas medietatis gradus .....

4. TÂBIT IBN KORRAH: Einleitung in's Almagest (fol. 23v—25r).[2]) fol. 23v: *liber quem edidit tebit filius chore de his que indigent expositione antequam legatur almagesti.* Quatuor[3]) diei est circulus maior qui describitur super duos polos ....
fol. 25r: ...... Et cum fuerint in oppositione solis, aut propinque oppositioni, erunt retrogradi. *Expletus est liber tebit filii chore de his que indigent expositione antequam legatur almagesti.*

5. THEODOSIOS: περὶ οἰκήσεων (fol. 25r—28v).[4]) fol. 25r: *liber theodosii de locis in quibus morantur homines incipit, qui sic exorsus est.* Illis quorum habitationes loca sub polo consistant septemtrionali, spere medietas apparens semper eis apparet. ....
...... [12 Sätze] ....
fol. 28v: ...... Et manifestum est nobis, quod totum residuum dierum ad residuum noctium est secundum proportionem. Et illud est q. d. u. *Expletus est liber theodosii de locis habitationum.*

Anhang (fol. 28v): *Ordo qui est post librum euclidis secundum quod inuenitur in scriptis iohanicii.*[5]) | *Euclidis de aspectibus tractatus unus* | *Theodosii de speris tractatus tres* | *Autolici de spera mota tractatus unus* | *Euclidis de apparentibus tractatus unus* | *Theodosii de locis habitabilibus tractatus unus* | *Autholici de ortu et occasu duo tractatus* | *Theodosii de die et nocte duo tractatus* | *Esculei de ascensionibus tractatus unus* | *Arsodochi de elongationibus planetarum et earum magnitudinibus tractatus unus* |.

---

1) Der Ursprung von Anhang 1 und 2 ist mir nicht bekannt.
2) Vgl. STEINSCHNEIDER, Zeitsch. für Mathem. **18**, 1873, p. 335.
3) Cod. Vindob. 5277 (VÖGELIN) hat „aequator".
4) Dieses Werk ist von AURIA in lat. Übers. ediert (Rom 1587, 4°, sehr selten). Der hiesige Text ist wahrscheinlich nicht ediert.
5) Diese Aufrechnung der mittleren Bücher ist mehrmals abgedruckt. Vgl. STEINSCHNEIDER, Zeitsch. für Mathem. **10**, 1865, p. 464; HEIBERG, *Litt. Stud. üb. Euklid*, p. 152; K. MANITIUS, l. c. XI ff. — „Johannicius" ist nach STEINSCHNEIDER HONAIN BEN ISAK.

6. ARCHIMEDES: κύκλου μέτρησις (fol. 28ᵛ—30ʳ).[1]) fol. 28ᵛ: *Liber Arsamithis de mensura circuli.* Omnis circulus triangulo orthogonio est equalis ....
fol. 30ʳ: ...... Et illud est q. d. u.

7. AHMED BEN JUSUF: de arcubus similibus (fol. 30ʳ—31ᵛ).[2]) fol. 30ʳ: *Epistola abuiafar ameti filii josephi de arcubus similibus.* Hic, postquam optauit ei bona euenire, cui epistolam mittit, inquit: Si loqui inceperis de arcubus similibus ....
.... [9 Figuren] ....
fol. 31ᵛ: ...... Nam differt conparationis in eis: sunt equalitas et diuersitas et similitudo et dissimilitudo.

8. JAKOB ALKINDI: De quinque essentiis (fol. 31ᵛ—32ᵛ).[3]) fol. 31ᵛ: *liber de quinque essentiis* [in margine prima manu: uel substantiis][4]), *quem iacob alchildus filius ysaac compilauit ex dictis aristotilis.* Sapiens [id est aristocilis], ubi dialecticam incepit, dixit, quod scientia cuiusque rei que inquiritur, cadit [uel continetur] sub phylosophia ......
(5 Kapitelüberschriften: „*De yle*", „*de forma*", „*De motu*", „*De loco*" & „*de tempore*") ....
fol. 32ᵛ: ...... Et ipsa est instans meditatum quod coniungit [uel continuat] inter preteritum ex eo et inter futurum. *Expletus est liber de quinque substantiis secundum aristotelem phylosophum.*

9. MENELAOS: σφαιρικά (fol. 32ᵛ—54ᵛ).[5]) fol. 32ᵛ: *Tractatus primus libri milei de figuris spericis.* Declarare uolo qualiter faciam supra punctum datum ....
fol. 54ᵛ: ...... qui transit per spacium quod est inter duo puncta $\overline{e}$, $\overline{d}$, scilicet per punctum $\overline{l}$, et equidistat arcui $\overline{bg}$, et illud est q. d. u.

Anhang (fol. 54ᵛ—55ʳ).[6]) fol. 54ᵛ: Volo ostendere quod omnium trium linearum proportionalium proportio prime ad secundam duplicata est proportio prime ad terciam ....

1) Genau dieselbe Übersetz. ist von HEIBERG nach cod. Dresd. Db. 86 ediert (Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890, p. 464 ff.).

2) Ediert von CURTZE als Anhang zur Ausgabe der Geometrie des JORD. NEMORARIUS; Mitteil. des Coppernicusvereins **6** (Thorn 1887).

3) Ob diese Schrift ediert ist, weiſs ich nicht.

4) Die Randbemerkungen der ersten Hand, die fast immer Angaben von Varianten sind, werden wir im folgenden immer in [ ] setzen.

5) Zwischen dieser Übersetzung und den lateinischen Ausgaben von MAUROLYCUS (Messana 1558) und HALLEY (Oxford 1758) sind groſse Abweichungen. Eine Ausgabe dieser Übers. (über die nähere Aufschlüsse bei STEINSCHNEIDER, Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 483 ff.) habe ich in Vorbereitung.

6) Über den Ursprung dieses Anhangs ist mir nichts bekannt.

10. MUHAMMED, HAMED et HASAN IBN MUSA IBN SCHAKIR: liber trium fratrum (fol. 55r—63v).[1]) fol. 55r: *Verba filiorum moysi filii sekir, id est, maumeti, hameti, hasen.* Propterea quia uidimus, quod conueniens est necessitas scientie mensure figurarum superficialium ....
fol. 63v: ...... qui uocet ut sciatur demonstratio super operationem eius. *Completus est liber auxilio dei.*

Anhang. (fol. 63v—64r).[2]) fol. 63v: Iste modus est sufficiens in arte eptagoni cadentis in circulo. Sit ergo circulus $\overline{abd}$ in circuitu centri $\bar{g}$. Quando ergo uoluerimus facere in eo eptagonum equalium laterum ..... [3 Figuren].

11. AHMED BEN JUSUF: de proportione et proportionalitate (fol. 64r—75r).[3]) fol. 64r: *Epistola ameti filii iosephi de proportione et proportionalitate incipit.* Iam respondi tibi, ut scias, quod quesiuisti de causa geometrice proportionis ....
fol. 75r: ...... qui est sufficientia nostra et tutor bonus. *finit epistola ameti filii ioseph de proportione et de proportionalitate.*

12. JAKOB ALKINDI: de aspectibus (fol. 75r—82r).[4]) fol. 75r: *liber iacob alkindi de causis diuersitatum aspectus et dandis demonstrationibus geometricis super eas.* Oportet, postquam optamus complere artes doctrinales, et exponere in eo quod antiqui premiserunt ....
fol. 82r: ...... Ergo $\overline{dg}$ minor sentitur angulo minore, qui est $\overline{dag}$, et maior angulo maiore, qui est $\overline{bag}$. Et i. e. q. d. u. *Explicit liber de aspectu.*

13. Pseudo-EUCLID: de aspectibus (fol. 82r—83v).[5]) fol. 82r: *Tractatus Euclidis* [corr. in „Ptolomei" von der dritten Hand] *de speculis.* Preparatio speculi in quo uideas alterius ymaginem et non tuam. sit $\overline{ab}$ paries supra superficiem $\overline{bg}$ orthogonaliter erecta ....
fol. 83v: ...... Neque etiam aliquid uisibilium simul cum omnibus uidetur. Et i. e. q. d. u.

---

1) Über CURTZES Ausgabe vgl. oben.

2) Dieser Anhang, dessen Ursprung mir unbekannt ist, steht nicht in CURTZES Ausgabe. AL-HAZEN IBN HEITHAM hat eine Schrift über das Siebeneck im Kreise verfaſst. Vgl. LECLERC l. c., I, 520.

3) Eine Ausgabe dieser Übersetzung hat CURTZE in Vorbereitung. Er wird dazu auſser P. auch cod. Vind. 5277 anwenden. Vgl. CURTZE, *ANARITII Comm. in EUCLIDEM*, Prolegom. XXVII—XXIX.

4) Das Werk ist meines Wissens unediert. Eine Ausgabe der hiesigen Übers. habe ich in Vorbereitung. Vgl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* II, p. 512.

5) Diese Schrift ist wahrscheinlich arabischen Ursprunges, wenigstens nicht identisch mit EUKLIDS Katoptrik. Vgl. ROSE, *Anecd.* II, p. 21; HEIBERG, EUCLIDIS *opera* VII, Prolegom. LI. Dieser Text ist unediert; ich habe ihn mit dem vorhergehenden kollationiert. Vgl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* II, p. 512.

14. Tideus: de speculis (fol. 84^{r}—88^{v}).[1]) fol. 84^{r}: *Sermo de eo, quod homo in speculo et in eo, quod non est speculum (?), et de causis illius, quem collegit ea ex libris antiquorum tideus filius theodori aRuegoiu (?) medicus.* Scias quod illud, quod uidet homo in speculo terso boni ferri, uidetur uerius; ferrum enim bonum tersum ....
fol. 85^{v} col. 1: ...... propter paruitatem que accidit lumini egredienti ab oculo scilicet strictura [id est piramidis que est ut pinea procedens ab oculo] pinealis oculi. *Ista*[2]) *que sequuntur sunt in principio libri apolonii de piramidibus. Ee (?) sunt axiomata que premitit in libro illo.* Cum continuatur inter punctum aliquod et lineam continentem circulum ....
fol. 86^{r} col. 1: ⟨De speculis comburentibus⟩[3]) De sublimiori quod geometre adinuenerunt, et in quo antiqui solliciti fuerunt .... (Kapitelüberschrift fol. 86^{r} col. 2): *Radices super quas est conuenienta.* Radius solaris egreditur ex corpore solis ....
fol. 88^{v}: ...... Et sunt fortioris combustionis omnibus speculis, quoniam radii conuertuntur ex tota superficie eorum ad punctum unum.

15. Euklid: ὀπτικά (fol. 88^{v}—92^{r}).[4]) fol. 88^{v}: *liber de aspectibus euclidis incipit.* Radius egreditur ab oculo super lineas equales rectas et accidit post ipsum ...... [38 Sätze] ....
fol. 92^{r}: ...... cum fuerit linea que protrahitur ex loco uisus ad centrum circuli secundum dispositionem quam diximus. Et i. e. q. uoluimus declarare.

16. Al-Narizi (??): Commentar zu Euklids Elementen Buch X (fol. 92^{v}—110^{v}).[5]) fol. 92^{v}: *Abbacus.* Cum quantitates ad inuicem comparantur,

1) Unediert.

2) Das folgende (fol. 85^{v}—86^{r}) ist abgedruckt in der Heibergschen Apollonius-Ausgabe, Prolegomena S. LXXV ff.

3) Der erste Teil des hiesigen Tideustextes (fol. 84^{r}—85^{v}) steht in B. (fol. 109—110) unter dem Titel: „Thydeus, de speculis.“ Der Anhang nach Apollonios (fol. 85^{v} col. 1—86^{r} col. 1) steht nicht in B. Der letzte Teil des hiesigen Textes (fol. 86^{r} col. 1—88^{v}) steht in B. (fol. 105—106) und in Cod. S. Marco Venet. XI 90 (fol. 90^{r}—94^{r}) bezw. mit den Überschriften „Thides, de speculis comburentibus vel de sectione mukesi“ und „Liber de speculis comburentibus“.

4) Dieser Text, der, wie ich von der Verwechselung der Figurbuchstaben ū und z̄ schließe, eine Übersetzung nach dem Arabischen ist, ist nicht ediert. Vgl. Heiberg, l. c. Prolegom. XL, und Steinschneider, *Hebr. Übers.* II, p. 511.

5) Das hiesige Werk ist identisch mit dem letzten Teil vom Kommentar des Al-Narizi zu Euclid X, und es nimmt in Curtzes Ausgabe (s. oben) die Seiten 252—386 ein. Übrigens ist es als zweifelhaft zu betrachten, ob dieses Stück wirklich dem Al-Narizi gehört. Vielleicht haben wir hier vielmehr den: »liber judei super decimum euclidis tractatus I« (vgl. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonense*, Roma 1851, p. 3—7, wo ein Verzeichnis der Übersetzungen von Gerhard v. Cremona nach c. Vatic. 2392 abgedruckt ist). Steinschneider (*Hebr. Übers.* II, p. 532—533) ist unsicher, glaubt aber das „judei“ = Said (d. h. Said abu Othman, X. Jahrh.). Leclerc sieht in „judei“ den Sind ben Ali (Leclerc, l. c. II, p. 507). Über die Mög-

alie earum sunt communicantes, alie incommunicantes; communicantes uero sunt, quibus una quantitas inuenitur communis ....
fol. 110ʳ: ...... et est radix radicis illius surda. Et similiter faciemus semper usque in infinitum. Et i. e. q. d. u. *Expletus est liber* ....

17. Alchwarizmi: Algebra (fol. 110ʳ—115ᵛ).[1]) fol. 110ʳ: *liber maumeti filii moysi alchoaresmi*[2]) *de algebra et almuchabala incipit. Hic* post laudem dei et ipsius exaltationem inquit ....
fol. 115ᵛ: ...... *liber hic finitur.*

Anhang (fol. 115ᵛ—116ᵛ). fol. 115ᵛ: *In alio tamen [libro] repperi interposita suprascriptis.* Quod si quis dixerit tibi: diuisi decem in duas partes et multiplicaui .... [keine Figuren] ....
fol. 116ᵛ: ...... et proueniunt uiginti quinque dragme, cuius radix est quinque.

18. Abubekr (?): Liber mensurationis (fol. 116ᵛ—125ᵛ).[3]) fol. 116ᵛ: *liber in quo terrarum corporumque continentur mensurationes abhabuchri, qui dicebatur heus, translatus a magistro Girardo cremonensi in toleto de arabico in latinum, abreuiatus incipit. Cuius hec sunt Verba:* Cum aliquis tibi dixerit: est quadratum equilaterum et orthogonium cuius quodque latus est decem ....
(Kapitelüberschriften: *Capitulum quadrati altera parte longioris. — C. quadrati cuius caput est breuius. — C. aride diuerse uel [quadrati] diuerse latitudinis. — C. dimidii aride. — C. aryde [uel latitudinalis] expanse. — C. de triangulis. — C. trianguli duorum equalium laterum et acutorum angulorum. — C. trianguli orthogonii. — C. trianguli ambligonii. — C. men-*

---

lichkeit, daſs ursprünglich Pappos Verfasser dieses Kommentars ist, vgl. Heiberg, *Litt. Stud. üb. Euklid*, p. 169—170, und Woepcke, Mémoires présentés à l'ac. des sc. XIV, p. 658—720. — Der ganze Anaritiustext steht in cod. reg. Suec. 1268 fol. 144—205 (saec. XIII—XIV). Ein Vergleich mit Curtzes Anaritiusausgabe zeigt, daſs diese dem Herausgeber unbekannte Handschrift eine sehr gute ist, aber leider giebt sie keine sicheren Aufschlüsse über die Echtheit des letzten zweifelhaften Teiles des Kommentars zum 10. Buche der Elemente.

1) Ediert von Libri, l. c. I, p. 253—297, und zwar nach P.; vgl. auch Boncompagni, l. c. p. 28—53.

2) Man kann hier auch »alchoarismi« lesen. Vgl. Tannery, l. c., p. 46.

3) Meines Wissens ist dieses Werk unediert; vgl. Boncompagni, l. c. p. 55 und Suter, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 10, 1900, p. 216. — Im Verzeichnisse über Gerhards Übersetzungen steht dies Werk nicht, dagegen ein »liber de practica geometrie tr. I«, der vielleicht die hiesigen Nummern 18—20 einschlieſst; keine dieser Nummern stimmt jedoch mit der „Geometria practica" in B. (fol. 154—159) überein. Bemerke auch »Liber abubecri rasis qui dicitur almansorius tract. X« und »Liber divisionum almansoris continens CLIIII capitula cum quibusdam confectionibus eiusdem«; vgl. Boncompagni, l. c. p. 55—60, und Chasles, Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris t. XIII, p. 503 ff.; vgl. Leclerc, l. c. II, 413 und 512—518.

surationis circuli. — C. mensurationis semicirculi. — C. portionis semicirculo maioris. — C. portionis que est minor semicirculo. — C. corporum. — C. solidi longioris altera parte et scientie mensurationis eius. — C. aree solidi similis fanethei. — C. solidi similis cuidam pisci triangulo chaburi nomine. — C. solidi serratilis. — C. corporis domui similis. — C. aree columne. — Area corporee piramidis que est similis cumulo tritici. — C. mensurationis spere.)

. . . .

fol. 125^v: . . . . . . et hec est eius forma. *Expletus est totus liber mensurationis.*

19. SEID ABUOTHMAN: Anhang zu 18. (fol. 125^v—126^r).[1]) fol. 125^v col. 1: *Incipit liber Saydi abuothmi.* Scias quod scientia figurarum superficialium et corporearum est, ut noscas, quid in figura, cuius area queritur . . . . . . (nur 2 Figuren [Quadrat und Würfel oder Parallelepipedon] und fol. 125^v col. 2 die Kapitelüberschrift: »*Capitulum quadratorum*«) . . . . fol. 126^r: . . . . . . hec ergo sunt ea que in omni contingunt quadrato ⟨corr. ex: triangulo⟩.

20. ABD-EL-RAHMAN (?): Anhang zu 18. (fol. 126^r—126^v). fol. 126^r: *Incipit liber aderameti.*[2]) Scias, quod aree cuiusque quadrati orthogonii, siue sit equalium laterum siue diuersorum, noticia est, ut multiplices unum laterum suorum continentium angulum rectum in secundum, et quod fuerit, erit eius area . . . . . . [keine Figuren] · . . . . fol. 126^v: . . . . . . et propterea multiplices quod aggregatur in terciam altitudinis. Quod enim prouenerit, erit area illius corporis.

21. ABRAHAM (?): liber augmenti et diminutionis (fol. 126^v—133^v).[3]) fol. 126^v: *liber augmenti et diminutionis, uocatus numeratio diuinationis, ex eo quod sapientes indi posuerunt, quem abraham compilauit et secundum librum, qui indorum dictus est, composuit.* In ipso est capitulum de censibus. Deinde de . . . . fol. 133^v: . . . . . . tunc dic ei, quod nihil accepit. Expletus est liber.

Anhang (fol. 133^v col. 1)[4]) von nur 17 Zeilen: Si tres uiri tenuerint tres res diuersi generis, et uolueris scire, quam illarum quisque eorum teneat, noscas . . . .

---

1) Unediert; vgl. LECLERC, l. c. II, p. 511—512; STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* II, p. 532, 670—671; und Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. 18, 1864, p. 166 ff.

2) Unediert; TANNERY liest hier »aderamen«, was kaum richtig sein kann, selbst wenn das Wort so gelesen werden könnte. Im alten Inhaltsverzeichnis steht: »liber Aderameti«.

3) Ediert von LIBRI, l. c. I, p. 304 ff. Über den unbekannten Verfasser s. TANNERY l. c.; ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 27, und ebenda 1896, p. 39, 1899, p. 94—95. Wie TANNERY kann auch ich versichern, dafs LIBRIS Ausgabe ganz zuverlässig ist.

4) Ursprung unbekannt.

fol. 133^v col. 2 ist leer. — fol. 134^r (unliniert und ohne Kolonnen) enthält die oben erwähnten »dicta atque notata per me Johannem Pontana [Fontana?] physicum uenetum ....«
fol. 134^v ist leer.

22. Jakob Alkindi: de gradibus (fol. 135^r—139^v).[1]) fol. 135^r: *liber iacob alkindi phylosophi de gradibus. Verba ipsius:* Quja primos ueteres, ut de uirtutibus cuiusque medicine singillatim in caliditate[2]) et frigiditate et humiditate[2]) et siccitate loquerentur, ualde sollicitos fuisse cognoui .... [mit mehreren medicinischen Tafeln] ....
fol. 139^v col. 2 Mitte: ... *Explicit liber alkindi de gradibus compositarum medicinarum.*

Anhang (letzte Hälfte von fol. 139^v col. 2): Medicine galieni compositio quam secundum andromachum edidit in octaua parte libri X tractatuum. Receptio huius medicine que in libro galieni ......

23. fol. 140^r—141^r: *Capitulum cognitionis mansionis luna* [2 groſse Tafeln mit einem kleinen Text am Rande fol. 140^r].[3])

24. Tâbit ibn Korrah: de motu octavae sphaerae (fol. 141^r—143^r).[4]) fol. 141^r. *Tractatus patris asen thebit filii core in motu accessionis et recessionis. Tractatus de narratione motus accessionis et recessionis et descriptione figure illius secundum ipsius qualitatem in orbe.* Imaginabor speram equationis[5]) diei et tres circulos in ea signatos ...... (eine groſse Figur, 3 Tafeln und eine Kapitelüberschrift: »*Capitulum qualiter equetur hic motus*«) ....
fol. 143^r (nach dem Schluſs von Tafel 3): *Expletus est tractatus ascein* (oder *asceni* oder *ascem*) *tebit filii core de accessione et recessione.*

25. Al-Farabi: de scientiis (fol. 143^v—151^v).[6]) fol. 143^v: *liber Alfarabii de scientiis, translatus a magistro Girardo cremonensi in toleto de arabico in latinum. Cuius in eo hec sunt uerba:* Nostra in hoc intentio est famosas scientias comprehendere ....
fol. 151^v: ...... et licet ut deducatur homo ad illud, quod pertinet sibi ipsi cum mendacio et eo, quod errare facit, sicut sit mulieribus et infantibus. *Completus est liber.*

---

1) Vgl. Leclerc, l. c. I, p. 165.

2) Bemerke hier die Abkürzungen: calĩtate = caliditate und humĩtate = humiditate.

3) Meines Wissens nicht untersucht; vgl. Nr. 26 unten.

4) Über dieses Werk, welches die sog. Trepidationstheorie behandelt, siehe Steinschneider, Zeitschr. für Mathem. **18**, 1873, p. 335; **19**, 1874, p. 96; u. *Hebr. Übers.* II, p. 588—589. Die Ausgaben von 1480, 1509 und 1518 sind sehr selten.

5) Cod. Vindob. 5277 (vgl. oben S. 68, Anm. 3)) hat „equatoris".

6) Vgl. Steinschneider, *Al-Farabi, des arabischen Philosophen Leben und Schriften* (St. Petersburg 1869), und *Hebr. Übers.* I, p. 292—293. Ein anderer Text des Werkes findet sich in der Gesamtausgabe, Paris 1638.

26. Harib ibn Zeid: Liber Anoe (fol. 151^{v}—160^{v}).[1] fol. 151^{v}: *liber anoe hic incipit. In hoc libro est rememoratio anni, et horarum eius, et reditionum anoe in horis suis, et temporis plantationum, et modorum agriculturarum, et rectificationum corporum, et repositionum fructuum.* Harib filii zeid episcopi, quem composuit mustansir imperatori. Iste liber positus est rememoratio (sic!) ...... [Text bis fol. 152^{v} incl.] .... fol. 153^{r} — 160^{v}: Tafel mit Überschrift: »*hec est autem forma tabularum, et ordinis earum, et nominationis mensium in capitibus suis, et nominationis mansionem in eis*«).

Man sieht sofort, daſs der hier referierte Inhalt aus 4 Teilen, 4 Sammlungen, besteht, und zwar: 1—11 (mit Ausnahme von 8): die mittleren Bücher; 12—15: optische Lehrbücher; 16—21: Algebra und Rechenkunst (inkl. Flächen- und Körperberechnungen); 22—26: Nachtrag von einigen astronomischen, philosophischen, medicinischen und calendarischen Werken, d. h. Werken, die mit der Mathematik selbst nichts zu schaffen haben. Es ist deshalb kein Zufall, daſs eben zwischen Nr. 21 und 22 ursprünglich ein leeres Blatt (fol. 134) war. — Da der Codex also nicht, wie es sonst so oft der Fall ist, von einem Konglomerat zufälligerweise neben einander stehender Werke besteht, sondern von mehreren mit Umsicht geordneten Sammlungen, ist es sehr zu bedauern, daſs nicht jede Sammlung für sich ediert worden ist, um so mehr, weil wir annehmen dürfen, daſs sie abgeschrieben sind nach mehreren vom Abschreiber mit einander verglichenen ähnlichen Sammlungen, die dann direkt von Gerhard von Cremona herrühren dürften.[2])

1) Ediert von Libri, l. c. I, p. 393—458; vgl. Steinschneider, Zeitsch. der deutschen morgenl. Gesellsch. **18**, 1864, p. 126 ff.; Leclerc, l. c. II, p. 425—426; Caussin, Notices des manuscrits de la bibl. nat. **12**, 1831, p. 244—245, wo ein anderer Verfasser eines „liber Anua" und einer „tabula mansionis" erwähnt wird.

2) Steinschneider hat angenommen, daſs alle Werke, die in P. stehen, von Gerhard übersetzt worden sind (Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **18**, 1864, p. 147). Andere oder vielmehr alle anderen hegen nach ihm dieselbe Ansicht, die sicherlich auch die richtige ist. Von den obigen Nummern 1—26 fehlen in dem von Boncompagni veröffentlichten Verzeichnisse über Gerhards Übersetzungen (nach Cod. Vatic. 2392) nur 13, 15, 18—21, von denen jedoch 18 ausdrücklich dem Gerhard zugeschrieben wird. 18—20 bildeten, wie oben erwähnt, vielleicht die »practica geometria«, es fehlen also nur noch 13, 15 und 21. Eine nähere Untersuchung von anderen Handschriften, die diese Werken enthalten, sowie eine genaue Identifikation der handschriftlich erhaltenen Übersetzungen mit den verschiedenen Verzeichnissen von Gerhards Übersetzungen wird wohl einmal diese Lücke ausfüllen.

Ein Beitrag zur Beurteilung des Pietro Antonio Cataldi.

Von G. Wertheim in Frankfurt a. M.

Die Bibliotheca Mathematica hat in ihrer neuen Folge begonnen, auf kleine Ungenauigkeiten in der zweiten Auflage von Cantors *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* aufmerksam zu machen, damit die dritte Auflage dieses klassischen Werkes, die wohl nicht mehr lange auf sich warten lassen wird, möglichst fehlerfrei werde. Es scheint mir aber, daſs auch weitergehende Änderungen in demselben erforderlich sein werden, daſs das Gesamturteil über einzelne Mathematiker zu modifizieren sein wird, namentlich wenn der einzige Gewährsmann Cantors direkt oder indirekt der berüchtigte Libri war, den Cantor selbst neuerdings in seinem auf dem internationalen Mathematiker-Kongreſs in Paris 1900 gehaltenen Vortrag *Sur l'historiographie des mathématiques* zwar milde aber treffend charakterisiert hat.

Zu den mathematischen Schriftstellern, über welche durch Libri eine falsche Meinung verbreitet ist, gehört Pietro Antonio Cataldi. Eine solche Meinung, wenn sie einmal festen Fuſs gefaſst hat, zu erschüttern, ist nicht leicht, da der Irrtum vielfach ungeprüft von einem Schriftsteller in den andern übergeht, und auf diese Weise eine um so weitere Verbreitung findet, je bedeutender das Werk ist, das ihn übermittelt. So habe ich vor drei Jahren den Nachweis geführt, daſs die Kettenbrüche von Bombelli erfunden sind, mehr als 40 Jahre bevor Cataldi sich der Sache bemächtigt und dieselbe ungebührlich breit getreten hat. Trotzdem ist es nicht sicher, ob es in diesem Falle nicht ebenso gehen wird, wie mit der „Cardanischen Formel“ und der „Pellschen Gleichung“. Diese Erwägung hat mich veranlaſst, einige Schriften Cataldis etwas genauer anzusehen, um mir ein Urteil über den Mann und seine Leistungen überhaupt zu bilden, und es sei mir gestattet, hier eine vollständige Analyse einer der ersten Schriften Cataldis zu geben, und einige Bemerkungen daran zu knüpfen.

Es ist das die Schrift über vollkommene Zahlen, die aus 4 + 48 Quartseiten besteht. Auf dem Titelblatt steht oben: „Soli Deo Omnis Honor Et Gloria.“ Dann folgt der Titel: *Trattato De' Numeri Perfetti Di Pietro Antonio Cataldo.* In Bologna, Presso gli Heredi di Giovanni Rossi

M · DC · III. Con licenza de' Superiori." Das zweite Blatt ist überschrieben: „Deo Aeterno Omnipotenti Cui sit semper omnis honor et gloria" und enthält die Widmung an Gott, unter dessen Schutze die Schrift erscheine, und dem als dem vollkommensten und besten Wesen eine Abhandlung über die vollkommenen Zahlen gewidmet werden müsse, zumal er ihm die Gnade erwiesen habe, seinen Geist zu erleuchten, sodafs er trotz der vielen Gefahren, der Schwäche und der Krankheiten, aus denen ihn Gottes Allmacht und Barmherzigkeit, wie er hoffe, bald befreien werde, den Gegenstand leicht und klar von neuem habe bearbeiten können. Denn es sei ihm im Mai 1594 eine Kassette, welche aufser verschiedenen Wertsachen diese Arbeit und viele andere arithmetische und geometrische Erfindungen enthalten habe, gestohlen, und obwohl er bekannt gemacht, dafs ihm an dem Geld und den Gold- und Silbersachen nichts gelegen sei, und obwohl inzwischen das Jubeljahr gefeiert sei, nicht zurückgegeben. Er bittet Gott, die Herzen der Diebe zu rühren, dafs sie die Gefahr, in der ihre Seelen sich befinden, erkennen und das Gestohlene zurückgeben. Zuletzt fleht er, Gott möge ihm beständig Glauben, Hoffnung und Liebe verleihen, sodafs er in diesem Leben zum Ruhme Gottes und zum Nutzen des Nächsten arbeite und in der ewigen Glückseligkeit den Herrn lobe und anbete.

Aus der hierauf folgenden Vorrede an die Leser erfahren wir, dafs die Arbeit schon 1588 abgeschlossen war. CATALDI weist dann u. a. darauf hin, dafs PACIUOLO in seiner *Summa* (fol. 8 recto) 9007199187632128 fälschlich für eine vollkommene Zahl erklärt habe, denn sie sei gleich $2^{26}(2^{27}-1)$ und $2^{27}-1$, d. i. 134217727 sei durch 7 teilbar. Zuletzt bittet er die Leser, denen die Werke von CARLO BOVILIO (CHARLES DE BOUVELLES) bekannt seien, ihm Nachricht zu geben; dieselben enthielten eine Arbeit über vollkommene Zahlen; diese Arbeit wolle er prüfen und eventuell den Studierenden mitteilen, was für sie Nützliches darin vorkomme. Denselben Wunsch spricht er in Betreff des Werkes über Proportionen von VOLUNNIO RODOLFO Spoletino (Rom 1516) aus.

Die Arbeit selbst beginnt mit der Definition der vollkommenen, der überschüssigen und der mangelhaften Zahlen und lehrt sodann die Auffindung der vollkommenen Zahlen nach EUKLID IX, 36. Es sind danach bekanntlich die beiden Reihen

(I) $1,\quad 2,\quad 2^2,\quad \cdots,\quad 2^n$ [1]

(II') $1,\quad 1+2,\quad 1+2+2^2,\quad \cdots,\quad 1+2+\cdots+2^n$, d. i.

(II) $1,\quad 2^2-1,\quad 2^3-1,\quad \cdots,\quad 2^{n+1}-1$

1) Der Kürze halber ist hier und im Folgenden die Potenzbezeichnung angewandt; CATALDI schreibt natürlich 1, 2, 4, 8, ...

zu bilden und die einander entsprechenden (die untereinander stehenden) Glieder zu multiplizieren. Wenn das genommene Glied von II eine Primzahl ist, so ist das Produkt eine vollkommene Zahl; ist aber das Glied von (II) zusammengesetzt, so hat das Produkt, wie Cataldi weiterhin darlegt, aufser den Divisoren, die einer Primzahl entsprechen würden, noch andere Divisoren, ist also eine überschüssige Zahl.

Cataldi sucht dann durch eine Reihe von Beispielen den Satz herzuleiten, dafs $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ nur dann eine Primzahl sein kann, aber nicht auch sein mufs, wenn $n + 1$ eine Primzahl ist. Er schliefst folgendermafsen:

Es ist $1 + 2 + 2^2 = 7$ durch 7 teilbar, und da $2^3, 2^4, 2^5$ bei der Division durch 7 wieder bezw. die Reste $1, 2, 2^2$ geben, so ist auch $2^3 + 2^4 + 2^5$, ebenso weiter $2^6 + 2^7 + 2^8$, u. s. w. durch 7 teilbar. Hieraus folgt, dafs jeder der Ausdrücke

$$2^3 - 1,\quad 2^6 - 1,\quad 2^9 - 1, \cdots$$

durch 7 teilbar ist, dafs mithin keiner derselben, mit Ausnahme des ersten, eine vollkommene Zahl liefern kann.

Weiter ist $1 + 2 = 3$ durch 3 teilbar, somit ist es auch $2^2 + 2^3$, ebenso $2^4 + 2^5$, u. s. w. Es ist daher jeder der Ausdrücke

$$2^2 - 1,\quad 2^4 - 1,\quad 2^6 - 1, \cdots$$

durch 3 teilbar, und keiner derselben, mit Ausnahme des ersten, kann eine vollkommene Zahl liefern.

Die Verbindung der beiden erhaltenen Resultate ergiebt, dafs die Summe der 6 ersten, die der 6 folgenden, u. s. w. Glieder von (I), ebenso die Summe der 12 ersten, die der 12 folgenden, u. s. w., die Summe der 18 ersten, die der 18 folgenden, u. s. w. Glieder von (I) sowohl durch 7 als auch durch 3 teilbar ist.

Ebenso folgt aus

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31,$$
$$1 + 2 + \cdots + 2^6 = 127,$$
$$1 + 2 + \cdots + 2^{10} = 2047 = 23 \cdot 89,$$
$$1 + 2 + \cdots + 2^{12} = 8191,$$

dafs die Ausdrücke

$2^5 - 1,\ 2^{10} - 1,\ 2^{15} - 1$ durch 31,
$2^7 - 1,\ 2^{14} - 1,\ 2^{21} - 1$ „ 127,
$2^{11} - 1,\ 2^{22} - 1,\ 2^{33} - 1$ „ 23 und durch 89,
$2^{13} - 1,\ 2^{26} - 1,\ 2^{39} - 1$ „ 8191

teilbar sind, und so ergiebt sich, daſs nur diejenigen Ausdrücke $2^{n+1}-1$ Primzahlen sein, also zu vollkommenen Zahlen führen können, bei denen $n+1$ Primzahl ist, daſs aber, wie sich im Falle $n+1=11$ gezeigt hat, auch wenn $n+1$ Primzahl ist, $2^{n+1}-1$ trotzdem zusammengesetzt sein kann.

Man hat also in den Fällen, in denen $n+1$ eine Primzahl ist, die Summe der Reihe $1+2+2^2+\cdots+2^n$ zu bilden (das letzte Glied mit 2 zu multiplizieren und vom Produkte 1 abzuziehen) und zu untersuchen, ob diese Summe eine Primzahl oder zusammengesetzt ist. Das geschieht, indem man die Summe der Reihe nach durch alle Primzahlen dividiert, die kleiner als die Quadratwurzel[1]) aus derselben sind. Geht keine dieser Divisionen auf, so ist die Summe $2^{n+1}-1$ eine Primzahl und das Produkt $2^n(2^{n+1}-1)$ eine vollkommene Zahl.

Hieran schlieſst Cataldi eine Reihe weiterer Bemerkungen:

Nicht bloſs die Summe der beiden ersten, die der beiden folgenden Glieder, u. s. w. der Reihe (I) ist durch 3 teilbar, sondern überhaupt die Summe zweier beliebigen aufeinander folgenden Glieder, und zwar ist diese Summe gleich dem 3fachen des ersten der beiden Glieder.

Ebenso geht 7 in die Summe von je 3, 15 in die von je 4, 31 in die von je 5, 63 in die von je 6, 127 in die von je 7 aufeinander folgenden Gliedern von (I) auf.

Weiter ist 3 in der Summe der beiden ersten Glieder von (I) 1 mal, in der Summe der beiden folgenden Glieder 4 mal, in der Summe der beiden dann folgenden Glieder 16 mal enthalten, u. s. w. Ebenso ist 7 in der Summe der 3 ersten Glieder 1 mal enthalten, in der Summe der 3 folgenden Glieder 8 mal, in der der 3 dann folgenden Glieder 64 mal, u. s. w. Ähnlich verhält es sich mit den Divisoren 15, 31, 63 u. s. w.

Die Endungen der Glieder von (I) sind, wenn man das erste Glied unberücksichtigt läſst, 2, 4, 8, 6. Wenn das letzte Glied, das man nimmt, auf 8 endigt, so endigt die Summe auf 5, ist also eine zusammengesetzte Zahl und kann deshalb keine vollkommene Zahl liefern. Für die noch verbleibenden Endungen 2, 4, 6 endigt die Summe bezw. auf 3, 7, 1. Somit endigen die vollkommenen Zahlen auf 6 oder 8.

Nach diesen Vorbemerkungen, welche die Seiten 3—10 ausfüllen, berechnet Cataldi S. 11—22 die 7 ersten vollkommenen Zahlen. Um zu zeigen, daſs jede der Zahlen $2^{13}-1=8191$, $2^{17}-1=131071$,

1) Der Satz: Eine Zahl N ist eine Primzahl, wenn sie durch keine der Primzahlen teilbar ist, die $<\sqrt{N}$ sind, rührt nicht von Legendre her, wie man nach Bachmann, *Elemente der Zahlentheorie* S. 25 annehmen könnte, sondern ist schon von Leonardo Pisano angewandt worden (*Scritti*, ed. Boncompagni, Bd. I, S. 38).

zu bilden und die [illegible] ...mmene Zahl liefern.
Glieder zu multipl... [illegible] unter $\sqrt{8191} \sim 91$
zahl ist, so ist ... [illegible] ...weise durch die unter $\sqrt{52}$...
von (II) zusamm... [illegible] und abgedruckt und nel...
darlegt, aufser ... [illegible] ...tersuchung der dritten
andere Divisor... [illegible] nämlich die dritte Zahl da...
Catald... [illegible] multipliziert und zum Produ...
zuleiten, da... [illegible] Zahl für irgend einen Divis...
sein kann. [illegible] ...en Quotient handelt es sich
schliefst ... [illegible] ...est der zweiten Zahl für den...
Es ... [illegible] Produkt 3 addiert. Die Divi-
sion dur... [illegible] der zweiten benutzten Divisor
ebenso ... [illegible] ...ssen sich also abkürzen; die Divi...
jeder ... [illegible] ..., 719 sind dann in gewöhn...
[illegible] noch, dafs die Darstellung S. 18
du... [illegible] ...anger" unterbrochen ist, und dafs Ca...
ei... [illegible] ...druck der Divisionen von 524287
[illegible] nach Ermittlung der 7^ten^ vollkom...
[illegible] ..., weitere derartige Zahlen auf di...
[illegible] ...ante la gratia di Dio, al quale eterna...

[illegible] Divisoren Summen einiger überschüssigen Z...
[illegible] ...33816 = 256 · 511, 2016 = 32 · 63, 838...
[illegible] Weiter enthalten die S. 28—40 eine Ta...
[illegible] mit ihren sämtlichen Divisoren. Die P...
[illegible] dann zum Schlufs zusammengestellt, und
[illegible] S. 40 die Schrift.
[illegible] noch ein Anhang. Cataldi hat die Abhand...
[illegible] vollkommene Zahlen gelesen. Dieselbe ...
[illegible] zu Paris 1510 durch Henricus Stefanus
[illegible] des Bouvelles. Cataldi hat in der Arbeit n...
[illegible] wert wäre, zumal Bouvelles seine Behauptu...
[illegible] über die Arbeit schweigen, wenn sie ...
[illegible] ...heite, und davon müsse er die Anfänger be...
[illegible] nicht im Vertrauen auf das Ansehen eines so
[illegible] Ansichten in sich aufnehmen. Er widerlegt
[illegible] ganze Reihe von Aussprüchen des Bouvell...

[illegible] war mir nicht zugänglich, wohl aber die i...
[illegible] erwähnte Arbeit von M. Fontès, ...

die, wenn CATALDI die Wahrheit berichtet, allerdings recht befremdlich sind:

Die Summe $2^{n+1}-1$ ist immer eine Primzahl, wenn sie auf 1 oder 7 endigt.

Alle auf 4 oder 6 endigenden Potenzen von 2 liefern vollkommene Zahlen. U. s. w.

Ferner macht CATALDI darauf aufmerksam, daſs BOUVELLES den von ihm ausgesprochenen Satz: „Jede vollkommene Zahl, mit Ausnahme von 6, giebt bei der Division durch 9 den Rest 1“ ohne Beweis gelassen habe. Er selbst giebt dann einen richtigen, aber sehr schwerfällig abgefaſsten Beweis[1]), der sich kurz so ausdrücken läſst:

Nach der Definition ist $2^n(2^{n+1}-1)$ eine vollkommene Zahl für jedes n, für welches $2^{n+1}-1$ eine Primzahl ist. Nun ergeben sich für den Divisor 9 die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Reste:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2^n	1	2	4	8	7	5	1	2	4	8	7	...
$2^{n+1}-1$	1	3	7	6	4	0	1	3	7	6	4	...

Da $2^{n+1}-1$ eine Primzahl sein soll, so fallen die Reste 6, 0, 3 (mit Ausnahme des dem Falle $n=1$ entsprechenden Restes 3) weg. Es bleiben also für $2^{n+1}-1$ im Falle vollkommener Zahlen bei der Division durch 9 nur die Reste 1, 7, 4, denen als Reste von 2^n bezw. 1, 4, 7 entsprechen, und da sowohl $1 \cdot 1$ als auch $4 \cdot 7$ für den Divisor 9 den Rest 1 liefert, so ist der Satz bewiesen. Auch der Anhang schlieſst mit einem „Laus Deo“.

Dann kommt ein Druckfehler-Verzeichnis, und zuletzt wird die Tabelle der Zahlen mit ihren Divisoren von 751 bis 800[2]) fortgesetzt, worauf zum allerletzten Male „Laus Deo“ gedruckt ist.

Das ist der Inhalt der Schrift, von der CANTOR (*Vorlesungen* II², S. 771) mit Recht sagt, daſs sie mehrere Jahrhunderte früher genau ebenso hätte verfaſst werden können, da nichts neues darin zu finden sei. Freilich ist es sehr anzuerkennen, daſs sie den Gegenstand vollständig fehlerfrei und nicht ohne Geschick behandelt, auch daſs CATALDI den erwähnten Satz von BOUVELLES mit einem Beweise versehen hat. Einen wirklichen Fortschritt hat die Theorie der vollkommenen Zahlen erst durch FERMAT erfahren. Derselbe spricht 1640 in einem Briefe an MERSENNE (*Varia*

1) Hiernach ist die Bemerkung in CANTORS *Vorlesungen* II², S. 385 zu modifizieren.

2) Nicht bis 1000, wie CANTOR (*Vorlesungen* II², S. 771) nach LIBRI IV, S. 91 berichtet. Es müſste denn noch ein Nachtrag existieren, welcher in dem Exemplar der Königl. Hof-Bibliothek zu Berlin fehlte.

Opera mathematica S. 176 = *Oeuvres* T. II, p. 195) drei Sätze aus, die er gefunden und nicht ohne Mühe bewiesen habe, und auf welchen er ein grofses Gebäude aufzurichten hoffe. Wichtig ist namentlich der dritte dieser Sätze, da er erheblich die Anzahl der Divisionen verringert, die man auszuführen hat, um zu erkennen, ob 2^p-1 eine Primzahl sei oder nicht. Der Satz lautet: „Wenn p eine Primzahl ist, so ist 2^p-1 nur durch Primzahlen von der Form $2kp+1$ teilbar, wo k eine ganze Zahl bedeutet.“ Um z. B. mit Hülfe dieses Satzes $2^{11}-1=2047$ zu prüfen, hat man die Division nur mit den Primzahlen der Form $22k+1$, die kleiner als $\sqrt{2047}\sim 45$, also nur mit 23 zu versuchen; es ergiebt sich $2047=23\cdot 89$, und dafs $2^{13}-1=8191$ eine Primzahl ist, erkennt man daran, dafs es weder durch 53 noch durch 79 teilbar ist; ebenso erfordert die Untersuchung von 131 071 nur die Division mit 103, 137, 239 und 307.

Auffallend ist bei Cataldi die häufige Anrufung Gottes.[1]) Nach Libri IV, S. 90 hat er auch den ersten 1602 unter dem Namen *Perito Annotio* veröffentlichten Teil seiner *Pratica aritmetica* Gott gewidmet. Libri sagt, er sei von einer tiefen Frömmigkeit gewesen, aber die Äufserungen dieser Frömmigkeit sind in fast allen seinen Schriften so übertrieben, dafs sie wahrhaft widerwärtig werden. Man lese z. B., was er in der Einleitung zu den 1613 in Bologna erschienenen *Due lettioni date nella Accademia erigenda* sagt. Bei einem Geistlichen mag dergleichen am Platze sein, aber bei einem Mathematiker ist es schwer, den Gedanken abzuweisen: Er spielt den Frommen, er spricht salbungsvoll, um sich bei den Machthabern in Gunst zu setzen und äufsere Vorteile zu erzielen.

Einen unangenehmen Eindruck macht auch das Prahlen mit Schriften, die er schon verfafst habe oder noch verfassen werde; das soll dem Senat imponieren. Die immer wieder vorgebrachten Klagen über seine körperliche Schwäche sollen einerseits Mitleid, andererseits Bewunderung über die trotz dieser Schwäche vollbrachten Leistungen und die Hoffnung auf grofsartige Werke erwecken, die von einem solchen Manne nach seiner Wiederherstellung zu erwarten seien. So versäumt Cataldi nichts, was ihn bei den einflufsreichen aber wenig sachverständigen Männern der Stadt in Gunst setzen kann. Er ergreift das Wort in Streitfragen, die längst abgethan sind[2]), und macht in salbungsvollem Stil und scheinbar im Interesse der Studierenden auf Fehler längst verstorbener Schriftsteller

1) Es war das durchaus nicht eine Sitte der Zeit. Ich habe eine ganze Reihe Bücher daraufhin angesehen und bei den meisten nichts derartiges, bei einigen wenigen nur am Ende „Laus Deo“ gefunden.

2) Scaligers *Cyclometrica elementa* waren 1594 erschienen; gegen ihn waren Jacob Christmann 1595, van Roomen 1597, Ludolph van Ceulen vor 1597 aufgetreten;

aufmerksam, deren Bücher in die Hand zu nehmen, keinem Anfänger in den Sinn gekommen wäre.[1]) Genug, je mehr man sich mit CATALDI beschäftigt, um so mehr befestigt sich die Überzeugung, dafs er ein Streber im schlimmsten Sinne des Wortes gewesen ist.

Von einem solchen Manne kann es nun auch nicht Wunder nehmen, dafs er die Erfindung seines Vorgängers BOMBELLI, ohne denselben zu nennen, in einer besonderen Schrift breit getreten hat. Dafs diese Erfindung sein Eigentum sei, sagt er freilich nicht selbst; das hat erst LIBRI gethan, der sogar eine schon von HERON angewandte und von vielen italienischen Mathematikern dargestellte Methode der Quadratwurzel-Ausziehung als von CATALDI herrührend erklärt hat.

VIETA, der ebenfalls SCALIGER bekämpft hatte, war 1603, CLAVIUS 1612 gestorben und — 1620 kam CATALDIS *Diffesa d'ARCHIMEDE*.

1) Die Schrift des BOUVELLES, die 1510 erschienen war, greift er 1608 an. BOUVELLES war schon 1553 gestorben, und es ist nicht anzunehmen, dafs Anfänger auf einer italienischen Universität die Schriften dieses Franzosen noch studiert haben sollen.

Galileis Atomistik und ihre Quellen.

Von Ernst Goldbeck in Berlin.

Galileis Atomistik, die uns im ersten Tage der *Discorsi* mitgeteilt wird, verdient das Interesse des Historikers besonders deswegen, weil sie die erste derartige in rein physikalischer Absicht aufgestellte Lehre der Neuzeit ist. Die Ansätze einer Atomistik, die wir bei Nicolaus v. Cusa und Giordano Bruno finden, entspringen, wie deren Systeme überhaupt, dem metaphysischen Bedürfnis und können nur in beschränkter Weise mit Galileis Lehre in Parallele gesetzt werden. Andrerseits scheint von einem besonderen Einfluſs dieser Gedanken Galileis auf die Folgezeit nicht die Rede sein zu können. Es mag dies daran liegen, daſs er alle Probleme, die die Antike und das Mittelalter an die Atomistik angeknüpft hatten, ineinandergeflochten und so ein Gewebe hergestellt hatte, das dem eindringenden Verständnis die erheblichsten Schwierigkeiten entgegensetzte, sowie auch daran, daſs er manche entscheidende Wendung nicht allzudeutlich heraustreten lieſs. Daher ist das Interesse an dieser Doktrin ein vorwiegend historisches. Gelingt es aber die einzelnen Fäden zu trennen, so ergiebt sich der Vorteil, daſs hier in engem Bezirk die Verbindungen zwischen Antike, Mittelalter und Neuzeit klar vor Augen treten und die Einflüsse deutlich werden, die sich in Galileis Denken kreuzen.

Galileis Atomistik ist schon in Kurd Lasswitz' eindringendem und umfassendem Buch über *Die Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton*[1]) Gegenstand einer ausführlichen Erörterung geworden. Aber diese Erörterung steht mehr im Dienste eines gewissen erkenntniskritischen Standpunktes, als des rein historischen Interesses, und so kommt es, daſs mancherlei Hinweise, die sich in dem groſsen Werke leicht auf Galilei hätten beziehen lassen, dennoch schlieſslich, wo die Sprache auf ihn kommt, unerwähnt bleiben, so daſs die Arbeit einer Analyse in die einzelnen historischen Beziehungen trotz aller dankenswerten Unterstützung durch Lasswitz' Untersuchungen schlieſslich doch von vorn an zu leisten war.

1) Hamburg und Leipzig, 1890, Bd. 2, S. 37 ff.

Wann und wie sich GALILEI zur Atomistik bekehrt hat, wird wenigstens aus den bis jetzt vorliegenden Quellen kaum zu entscheiden sein. Die grofse in der nationalen GALILEI-Ausgabe[1]) als „Juvenilia" bezeichnete Kompilation vieler kurz und bündig gefafster Ansichten zahlreicher antiker und mittelalterlicher Denker über Probleme der Naturphilosophie thut auch der Lehren LEUCIPPS und DEMOCRITS einige Male Erwähnung, jedoch immer nur in wenigen Zeilen und darunter einmal in ablehnender Weise. Aber die „Juvenilia" sind keine eigene Arbeit GALILEIS. Aus ihnen ist kein Aufschlufs über persönliche Meinungen des jungen GALILEI zu erwarten. Zur Zeit der von VENTURI um das Jahr 1590 angesetzten Abhandlungen „de motu"[2]) ist allerdings, wie wir später wahrscheinlich machen werden, eine Hinneigung zu atomistischen Anschauungen, vielleicht schon im Gefolge der allgemeinen Abneigung gegen ARISTOTELES zu vermuten. Jedenfalls lag die Möglichkeit, aus antiken Darlegungen sich über die atomistische Lehre zu unterrichten, bequem genug da. Wenn nicht anders konnte GALILEI aus ARISTOTELES' Polemik, die ihm sicher bekannt war, vielleicht auch schon früh aus LUCREZ sich ausreichend orientieren. Aber Genaueres und zeitliche Festlegungen über den ersten Eintritt in die atomistische Doktrin, sowie über die innere Angliederung der zugehörigen Probleme und die selbständige Weiterbildung zu ermitteln, dürfte recht schwierig sein. Verstreute Spuren können so gedeutet werden, dafs die Beschäftigung mit diesen Ideen nie völlig abrifs. Eine zusammenhängende Darstellung erfolgte erst, wie schon gesagt, gegen das Lebensende im ersten Tag der *Discorsi* (1638), aber auch da nicht ohne merkliche Vorsicht, die manche energische Wendung unterdrückt haben mag, eine Vorsicht, die nicht allein der Schwierigkeit des Stoffes, sondern auch besonders der Gefährlichkeit der vorgetragenen Ansichten der Kirche gegenüber entsprang.

GALILEIS Darstellung selbst ist dem Charakter des Dialogs entsprechend keine systematische. Sie wird durch die Bedürfnisse der inneren Konsequenz, aber auch durch das Bestreben nach leichter Fafslichkeit und lebensvoller Abwechslung beeinflufst. Die Analyse mufs dieses kunstvolle, aber undurchsichtige Gewebe auflösen. Mit den Fäden, die dann in die Vergangenheit zurückleiten werden, treten zugleich auch die Einzelheiten heraus, die GALILEI von den Denkern vor ihm übernahm. Diese sich von selbst herausstellende Sonderung in Problemgruppen der Einteilung unserer Untersuchung zu Grunde zu legen, mufste schon deswegen ratsam er-

1) *Le opere di* GALILEI. Edizione nazionale I (Firenze 1890).

2) VENTURI, *Memorie e lettere inedite finora o disperse di* GALILEO GALILEI, p. II, p. 330 (das Buch war uns nicht zugänglich). Die Abh. „de motu" s. GALILEI, *Opere*, ediz. naz. I, p. 243—419.

scheinen, als so vielleicht am ersten der Eindruck der Dunkelheit beseitigt wird, den GALILEIS eigene Darstellung trotz aller augenfällig von ihm aufgewendeten Kunst hervorruft.

1. Das Vakuum.

1. Die Atomistik fällt mit der Leugnung eines Vakuums. Daher hatte ARISTOTELES in seinem Kampfe gegen die mechanisch-atomistische Naturbetrachtung der Widerlegung eines leeren Raumes besondere Aufmerksamkeit geschenkt.[1])

Bereits die oben erwähnten Abhandlungen GALILEIS „de motu" zeigen eine energische Bekämpfung der von ARISTOTELES gegen das Vakuum ausgesprochenen Gründe. Es ist sehr wahrscheinlich, daſs demgemäſs schon damals GALILEI das Vakuum in irgend einer Gestalt für möglich hielt. Wer die Gründe eines entschiedenen Gegners der Atomistik seinerseits an einem entscheidenden Punkt zu widerlegen trachtet, wird selbst leicht in den Verdacht kommen Anhänger einer Atomenlehre zu sein. Aber GALILEI bekennt sich auf jenem Standpunkt gar nicht und auch späterhin nur vorsichtig zu der Lehre DEMOKRITS. Eine sichere Entscheidung, ob er schon zu Anbeginn seines selbständigen Forschens in das feindliche Lager übergegangen sei, läſst sich nicht gewinnen. Zu beachten bleibt allerdings, daſs er in den *Discorsi*, also beinahe fünfzig Jahre später, in ganz ähnlichen Wendungen und diesmal deutlich in atomistischer Absicht auf die aristotelischen Einwände gegen das Vakuum ablehnend zurückkommt.

Was die Einzelheiten dieser Widerlegung der aristotelischen Angriffe gegen das Leere anlangt, so gehören sie nicht in den Rahmen dieser Untersuchung. Die bloſs aus Begriffen abgezogenen, in der Konsequenz des Systems liegenden Einwendungen interessieren GALILEI sowenig zu Beginn seiner Laufbahn, wie an ihrem Ende. Er würdigt nur die der Bewegungslehre entnommenen Gesichtspunkte einer eingehenden Betrachtung. Da aber diese Überlegungen mehr für die Bewegungslehre ins Gewicht fallen, als für die Atomistik, so muſs es genügen, hier den Grundgedanken anzugeben. GALILEI giebt ihn folgendermaſsen wieder (gekürzt): Ein und derselbe Körper bewegt sich in verschieden dichten Medien mit Geschwindigkeiten, die sich umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten, so daſs wenn die Dichtigkeit des Wassers 10mal so groſs ist, als die der Luft die Geschwindigkeit in der Luft 10mal gröſser sei, als die im Wasser. Dementsprechend muſs, da die Dichtigkeit des Vakuums 0 ist, jeder Körper

1) In der Physik.

der im erfüllten Medium in einer gewissen Zeit eine gewisse Strecke zurücklegt, sich im Vakuum momentan bewegen etc. Übrigens weicht diese Wiedergabe von der des ARISTOTELES einigermaſsen ab. Dessen Darstellung ist zwar im Wesen dieselbe, ist jedoch in der Form viel verklausulierter und die Schluſswidersprüche sind anders ausgedrückt. Die Form, die GALILEI der aristotelischen Widerlegung giebt, entstammt gewissen Kommentaren der aristotelischen Physik. Ob, wenn es ein Vakuum giebt, sich ein Körper in der Zeit oder momentan darin bewegen würde, ist eine alte Frage der Scholastik. GALILEI vermag nun die Prämisse bereits nicht zuzugeben, wonach die Geschwindigkeit der Dichtigkeit des Mediums umgekehrt proportional sein soll, und damit ist die ganze Widerlegung hinfällig. Übrigens geht sein Interesse an dieser Stelle sowohl in „de motu" als in den *Discorsi* weit mehr auf die hierher gehörigen Fragen der Bewegungslehre, als auf die Atome und ihre Hohlräume. Denn, wenn auch wirklich eine Bewegung im Vakuum nicht stattfände, so würde doch die Annahme eines Vakuums dadurch nicht widerlegt. Daher entsteht jetzt die Frage, wie stellt sich eigentlich GALILEI zur Existenz eines Vakuums?

2. GALILEI knüpft seine Auseinandersetzungen über die Konstitution der Materie in den *Discorsi* an das Problem der Kohärenz der Körper an. Er führt die Kohärenz auf zwei Ursachen zurück, auf die Kraft „des vielbesprochenen Abscheus der Natur einen leeren Raum zuzulassen und, wenn diese nicht genügen sollte, auf ein zweites Bindemittel, einen Leim, der die Teile des Körpers fest zusammenhält".[1])

Zwei plangeschliffene Marmor-, Glas- oder Metallplatten haften aneinander und setzen ihrer Trennung beträchtlichen Widerstand entgegen. Diese Erscheinung führt GALILEI auf den „horror vacui" zurück. „Die Natur will selbst auf kurze Zeit den leeren Raum nicht zulassen, der zwischen beiden Platten entstehen würde, bevor der Zusammenfluſs der umgebenden Luftteilchen denselben einnehmen und ausfüllen konnte."[2]) Dieselbe Kraft, die hier zwischen den beiden Platten wirkt, bedingt auch das Zusammenhalten der Teile eines festen Körpers. Aber diese Kraft des „horror vacui" kann gemessen werden und zeigt sich dann kleiner als die Kohärenz der festen Körper. Sie kann also nur eine Teilursache sein. Daher ist noch das zweite Bindemittel nötig. Dieses ist allerdings kein Leim, vielmehr ist es wieder kein anderes als ein Vakuum, freilich aber

1) *Op.* XIII p. 15; OETT. p. 11. Die Ausgabe von ALBÈRI bezeichnen wir als *Op.*, die Übersetzung der *Discorsi* von v. OETTINGEN (OSTWALDS Klassiker d. exact. Wiss. 11) mit OETT. Wir citieren aus dieser hier und da verbesserten Übersetzung des „ersten Tages".

2) *Op.* l. c.; OETT. p. 12.

kein ausgedehntes, endliches, sondern ein intramolekulares, sehr kleines. Die Körper bestehen nämlich aus sehr vielen, sehr kleinen Teilchen, die durch entsprechende Vakuen getrennt sind. Diese Vakuen bilden das zweite Bindemittel.[1])

Zwei Faktoren werden also hier herangezogen: der „horror vacui", d. h. der Abscheu der Natur ein endliches Vakuum zuzulassen; dann die Kraft der kleinen Vakuen, die das zweite Bindemittel ausmacht und die Festigkeit der Körper erklären soll, soweit das endliche Vakuum dies nicht zu leisten vermag.

3. Die Unterscheidung des endlichen Vakuums und des kleinen intramolekularen ist nicht GALILEIS Einfall. Sie ist ihm aus der Antike überkommen und zwar aus des HERON von Alexandria *Pneumatica*. HERON sagt in den „Druckwerken" folgendes: Es giebt Forscher, welche überhaupt jedwedes Vakuum entschieden in Abrede stellen, andere hingegen vertreten die Behauptung, es gebe von Natur zwar kein kontinuierliches Vakuum (*ἄϑρουν κενόν*), aber doch ein in kleinen Teilchen in der Luft, der Feuchtigkeit, dem Feuer und andern Körpern verteiltes. Die letzte Annahme verdient am meisten unsern Beifall".[2]) Diese Aufstellung HERONS gehört dem Physiker STRATON an (3. Jahrh. v. Chr.).[3]) Dafs aber GALILEI HERON gekannt hat, geht aus dem bei VENTURI[4]) abgedruckten Brief GALILEIS über einen bei HERON erwähnten Leuchter hervor. Aufserdem befafs GALILEI die italienische Übersetzung der *Pneumatica* des HERON von ALESS. GIORGI.[5]) Eindringender als diese Notizen wird der Verlauf unserer Untersuchung GALILEIS Abhängigkeit von HERON aufzeigen.

4. Zunächst ist GALILEIS Stellung zum grofsen oder endlichen Vakuum zu kennzeichnen. ARISTOTELES hatte, wie wir sahen, jedwedes Vakuum für unmöglich erklärt und GALILEI hatte diese Meinung, soweit sie sich in einem besonders exakt scheinenden Argument aufthat, bekämpft. Er schliefst diese Widerlegung mit den merkwürdigen Worten: „Also einigen

1) *Op.* XIII p. 23 ff.; OETT. p. 19 ff.

2) HERONIS *Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol. I.* HERONS *von Alexandria Druckwerke und Automatentheater, griechisch und deutsch herausg. v.* WILHELM SCHMIDT, Leipzig 1899 [citiert als SCHM. I], S. 5, Z. 5.

3) Nach den Ausführungen von H. DIELS, *Über das physikalische System des* STRATON; Sitzungsber. d. Kgl. Akad. d. Wiss. in Berlin 1893, S. 110.

4) VENTURI, *Memorie e lettere inedite finora o disperse di* GALILEO GALILEI. Modena 1818, p. 12. Vergl. W. SCHMIDT, *Heron v. Alexandria im 17. Jahrh.*; Abh. z. Gesch. d. Mathem. 8, Leipz. 1898, p. 206.

5) Vergl. *La libreria di* GALILEO GALILEI *descritta ed illustrata di* ANTONIO FAVARO. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem., 19, 1886, p. 271 Nr. 271 des Katalogs: *Spiritali di* HERONE *Alessandrino ridotti in lingua volgare da* ALESSANDRO GIORGI *da Urbino* (1582? oder 1592).

wir uns dahin, dafs ein solches Argument nichts gegen die Annahme des Vakuums bringt; und wenn letzteres auch der Fall wäre, so würden doch nur jene grofsen Vakuen zerstört, welche weder ich, noch, wie ich glaube, die Alten als natürlich sich darbietend annahmen, obwohl sie vielleicht durch Kraft hervorgebracht werden können, wie aus manchen Versuchen folgt, die vorzubringen zu weitläufig sein dürfte."[1])

Aus diesen Worten geht hervor, dafs GALILEIS Untersuchungen mit antiken Anregungen in Zusammenhang standen, dafs ein grofses Vakuum nach seiner Meinung zwar in der Natur nicht vorkomme, dafs es aber auf experimentellem Wege „gewaltsam, durch Kraft" hergestellt werden könne, und dafs ihm solche Experimente bekannt waren. Es ist sehr bedauerlich, dafs GALILEI sich nicht des Genaueren hier geäufsert hat, damit man ermessen könne, inwieweit er thatsächlich einem OTTO VON GUERICKE vorgegriffen habe.

Vielleicht aber sind seine Kenntnisse nicht nennenswert über die antiken Mitteilungen hinausgegangen. Vergleicht man nämlich HERONS Darlegungen, so ergiebt sich deutlicher, was GALILEI eigentlich sagen will. HERON behauptet zunächst zu Eingang der *Pneumatica* an der bereits citierten Stelle, „es gäbe von Natur kein kontinuierliches Vakuum". Im Verlauf der weiteren Darlegungen zeigt er dann, dafs ein solches sich künstlich herstellen lasse. „Nimmt man ein sehr leichtes Gefäfs mit enger Mündung, hält es an den Mund, saugt die Luft aus und läfst es dann los, so bleibt das Gefäfs an den Lippen hängen; denn das Vakuum zieht das Fleisch an, um den leeren Raum wieder zu füllen. Daraus ergiebt sich für das Gefäfs ein kontinuierliches Vakuum. Dies kann man noch anderweitig nachweisen. Will man die (sogenannten) medizinischen Eier, welche von Glas und enghalsig sind, mit einer Flüssigkeit füllen, so saugt man mit dem Munde die darin enthaltene Luft auf, hält ihre Mündung mit dem Finger zu und setzt sie umgekehrt in die Flüssigkeit. Läfst man dann den Finger los, so steigt das Wasser in das entstandene Vakuum hinauf, obwohl die Bewegung der Flüssigkeit nach oben nicht naturgemäfs ist."[2]) Im weiteren Verlauf seiner Darlegungen sagt HERON: „Diejenigen, welche überhaupt ein Vakuum leugnen, mögen dafür wohl mancherlei Beweisgründe ersinnen können und in der Theorie vielleicht einigermafsen überzeugen, weil kein experimenteller Gegenbeweis vorliegt. Wird jedoch auf Grund wahrscheinlicher, sinnlich wahrnehmbarer Vorgänge gezeigt, dafs eine endliche Leere nur auf künstlichem Wege herbeigeführt werden kann, dafs ein Vakuum zwar natürlich ist, aber dafs es nur fein verteilt

1) *Op.* XIII p. 70; OETT. p. 61.
2) SCHM. I p. 9.

vorkommt und dafs bei einer Verdichtung die Moleküle an die Stelle der feinverteilten Vakuen treten, so werden Die keine Ausflucht mehr haben, deren Hypothesen sonst die Wahrscheinlichkeit für sich hatten." HERON tritt hier in dem berechtigten Selbstgefühl des Physikers und Technikers den Philosophen, wie z. B. ARISTOTELES, gegenüber, die aus logischen Argumenten das Leere glaubten bekämpfen zu können. Er gelangt so zu dem mehrfach vorgetragenen Schlufs fast wörtlich, wie GALILEI: „Wir können behaupten, dafs es ein kontinuierliches Vakuum ohne Einwirkung einer äufseren Kraft von Natur nicht giebt, und dafs andrerseits ein solches bisweilen künstlich herbeigeführt wird." Ziehen wir hierzu noch die kleinen Vakua, mit denen sich HERON ausführlich beschäftigt, und denen wir weiter unten unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden haben werden, so können wir seine Meinung in folgende Thesen zusammenfassen:

1. Es giebt kein natürliches kontinuierliches Vakuum,
2. Es giebt ein solches künstlich durch äufsere Kraft,
3. Die Körper bestehen aus kleinen Teilchen, zwischen denen feinverteilte Vakuen liegen. Diese kleinen Vakuen sind natürlich.

5. So spielen also bei HERON wie bei GALILEI zwei Arten von Vakuen eine Rolle, das endliche und die sehr kleinen. Aber GALILEI benutzt das endliche anders als HERON. Dieser führt nur einige Erscheinungen, die wir der Wirkung des Luftdrucks zuschreiben, auf die Kraft des künstlichen Vakuums zurück, während GALILEI das endliche Vakuum oder den stets an seine Stelle tretenden Abscheu der Natur, wie schon gesagt, benutzt, um wenigstens zum Teil die Kohärenz der festen Körper zu erklären.

Die Anregung zu dieser Auffassung ging von dem erwähnten Versuch der Adhäsionsplatten aus. Dieser Versuch mitsamt seiner Deutung ist GALILEI wahrscheinlich aus Kommentaren zum ARISTOTELES bekannt geworden.[1]

Uns darf hier GALILEIS Stellungnahme zum „horror vacui" nur insoweit beschäftigen, als über ihn hinweg der Weg zu der eigentlichen Atomistik zu bahnen ist. Da ist nun zunächst auffallend, dafs GALILEI überhaupt mit dem Begriff eines „horror vacui" hantiert. In sein klares Denken, das der Einmischung aller psychischen Potenzen in den Naturverlauf abhold war, pafst ein solcher Erklärungsgrund nicht hinein. Es ist für jeden, der GALILEIS Denken einigermafsen kennt, überflüssig hierfür Beweise zu bringen. Es möge genügen darauf hinzuweisen, wie deutlich diese

1) Er findet sich z. B. in den *Commentarii collegii Conimbricensis in octo libros physicorum* ARISTOTELIS von 1610 vol. II, p. 90 und nach der Art des Vortrages daselbst wahrscheinlich schon früher, doch sind uns weitere Kommentare, die den Versuch enthielten, nicht in die Hände gekommen.

ablehnende Tendenz in den *Discorsi* wenige Seiten hinter der ausführlichen Beschäftigung mit den „horror vacui“ bei anderer Gelegenheit hervortritt. Der Peripatetiker SIMPLICIO sagt da im Verlauf des Dialogs: Ich mufs fast lachen über die Antipathie des Herrn SALVIATI (GALILEI) gegen das Wort Antipathie, da er es durchaus nicht nennen will, obwohl es so gut alle Schwierigkeiten lösen könnte.[1]) ... Nun mag ja in manchen anderen Fällen die Frage schwer zu entscheiden sein, ob GALILEI wirklich überall zu einer rein mechanischen Betrachtung des Naturverlaufs durchgedrungen ist. Hier liegt jedenfalls die Sache klar.

Bald nachdem nämlich GALILEI den „horror vacui“ eingeführt hat, um die Kohärenz der Teile fester Körper zu erklären, geht er dazu über „die Kraft des Vakuums von andern Kräften zu sondern und zu messen“. Es genügt für unsern Zweck hervorzuheben, dafs diese Sonderung und Messung in der bekannten an Saugpumpen gemachten Erfahrung gipfelt, dafs der „horror vacui“ nur einem Wassercylinder von 18 Ellen Höhe das Gleichgewicht hält, ganz gleich wie grofs der Querschnitt des Cylinders sei.[2]) Hiermit beginnt an die Stelle des unbestimmten Hin- und Herredens über den „horror vacui“ die quantitative Bestimmung zu treten. Diese ersetzt die ursprünglich in der Bezeichnung liegende Vorstellung des Abscheus einer persönlich gedachten Natur durch einen exakten Wert und benimmt so dem Ausdruck mit seinem eigentlichen Sinn seine Gefährlichkeit für das mechanische Denken. Genau dasselbe vollzieht im Grunde GALILEI, wenn er über die Untersuchung des Wesens der Schwerkraft bewufst hinweggeht, um in den Fallgesetzen zu quantitativen Bestimmungen zu gelangen. An dieser Stelle leistet GALILEI Eigenes, hier thut er einen wichtigen Schritt auf ein modernes Denken hin, indem er die Kreise seiner Vorläufer überschreitet.

6. Zugleich gewinnt er mit der quantitativen Bestimmung des „horror vacui“ eine Möglichkeit, diesen zu eliminieren und zu dem zweiten Bindemittel der Körper vorzudringen. Einem Wassercylinder von 18 Ellen Länge hält der „horror vacui“ das Gleichgewicht. Man kann diesen Cylinder auffassen als an seinem oberen Ende in der Pumpe befestigt. Während des Pumpens wird der Cylinder immer länger und länger, bis er diejenige Grenze erreicht, über welche hinaus er zerreifst, wie ein Seil, das an seinem oberen Ende aufgehängt ist und seinem Eigengewicht erliegt. Nun hat aber das Wasser, anders als das Seil, gar keine eigene Kohärenz[3]); es wird allein durch den Widerstand des Vakuums festgehalten. Ein Marmorcylinder, den man ähnlich aufhängen wollte, würde vielmehr Gewicht

1) *Op.* XIII p. 74; OETT. p. 65.
2) diciotto braccia, *Op.* XIII p. 21; OETT. p. 17.
3) Über diese These hat GALILEI viel nachgedacht. Man vergleiche den *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono*; *Op.* XII p. 57 ff.

tragen können, als der gleiche Wassercylinder. Folglich sind seine Teile noch durch ein zweites Bindemittel aneinander gekettet.

7. Dieses zweite Bindemittel wird nun von den kleinen feinverteilten Vakuen hergegeben: Wie können aber diese zahlreichen zwischen den kleinsten Teilen der Körper eingelagerten Hohlräume die Ursache der Kohärenz der festen Körper werden?

Hier meint nun Galilei, „die kleinen Vakuen zögen sich gegenseitig an“ und verhinderten so die Trennung der kleinsten Teile, zwischen denen sie gelagert sind. Würden an einem Körper, z. B. Gold, die Vakuen ausgefüllt, etwa durch Eindringen von Feuerteilchen, so verschwände die Festigkeit des Körpers mit den Vakuen und ihrer gegenseitigen Anziehung, denn die kleinsten Teilchen würden frei beweglich und der Körper wäre geschmolzen; zögen dann die Feuerteilchen wieder ab, der Körper würde kalt, so stellten sich die Vakuen wieder her, ihre Anziehung träte wieder in Kraft und das Metall wäre von neuem fest geworden.

Aber von einer „Anziehung“ der Vakuen zu sprechen, ist an und für sich, besonders jedoch bei Galilei befremdlich. Galilei wendet sich bewufst und manchmal sogar mit Heftigkeit gegen die Vorstellung einer Anziehung, wie gegen alle „qualitates occultae“ überhaupt. Er wundert sich darüber, dafs ein Gelehrter von der Bedeutung Keplers sich derartige Begriffe — nämlich bei Gelegenheit seiner Ausführungen über die Gravitation — bedienen konnte. Desto sonderbarer mutet es uns an, dafs er hier selbst eine Attraktion der Vakuen einführt.

Allerdings lag für ihn hier keine geringe Schwierigkeit vor. Die endlichen Vakuen, denen der „horror vacui“ entsprang, zeigten eine deutliche, wenn auch mechanisch damals rätselhafte Kraftwirkung. Diese konnte aber bei den kleinen Vakuen nicht herangezogen werden, denn diese sind von anderer Art als die grofsen. Sie sind natürlich, während jene künstlich hergestellt waren. Hierin lag für Galilei die Schwierigkeit. Er hatte für die kleinen Vakuen keine angebbare Kraft zur Verfügung, denn über die aristotelische Unterscheidung des „Natürlichen“ und „Gewaltsamen“ hat sich Galilei nie völlig erhoben.[1])

Dafs Galilei den Ausdruck „Anziehung“ gebrauchte, hängt vielleicht damit zusammen, dafs Heron den Vakuen „Anziehung“ zuspricht. Diese hat, wie auch aus den citierten Stellen hervorgeht, den Zweck, die Ausfüllung der Leere herbeizuführen.

Wie dem auch sei, man hat sich in diese halbgeklärte Denkweise

1) Der Nachweis für diese Behauptung, der mit reichem Material ausgestattet werden kann, würde hier zu weit abführen. Übrigens ist die Bemerkung auch schon sonst hervorgehoben worden.

hineinzufinden, um GALILEIS Schwierigkeiten ernstlich würdigen zu können. Dann wird man auch den Einwand v. OETTINGENS[1]) hinfällig finden, den er gegen GALILEIS kleine Vakuen erhebt, die Gesamtkraft der kleinen Hohlräume könne nicht gröfser sein, als die Kraft des beim Wasser gemessenen endlichen Vakuums, das man sich an Stelle des Körpers denken könne. Die erwähnten Messungen beziehen sich aber auf die Kraft des bei den endlichen, künstlichen Vakuen auftretenden „horror vacui" und sind daher für die kleinen, natürlichen Vakuen, denen kein Abscheu der Natur entspringt, gegenstandslos.

Wird also nicht deutlich, was für eine Art von Kraft von den kleinen Vakuen ausgeht, so ist doch verständlich, wie ihre Gröfsenwirkung zu stande kommt. Wenn auch die Wirkung eines einzelnen Hohlraumes sehr gering ist, so wird doch der Gesamteffekt sehr vieler Hohlräume, wenn nur ihre Zahl ausreichend grofs ist, durch Multiplikation ein sehr bedeutender sein können. Eine genügend grofse Menge von Ameisen könnte ein mit Korn beladenes Schiff ans Land ziehen.[2])

8. An dieser Stelle führt GALILEI, ohne dafs man einen inneren Grund angegeben findet, die unendlich grofse Zahl der kleinsten Teilchen und der dazwischen liegenden Hohlräume ein. Das bisher behandelte Problem der Festigkeit starrer Körper wird nun verlassen und in die Behandlung eines anderen Problems eingetreten, wie nämlich ein zusammenhängender Raumteil aus kleinsten Teilchen zusammengesetzt gedacht werden könne. An diese Frage knüpfen sich wieder einige Paradoxieen des Unendlichkeitsbegriffs, so dafs wir GALILEI nunmehr mit zwei neuen Problemen beschäftigt sehen, der Frage nach dem Wesen des Kontinuums und seiner kleinsten Teile, der Indivisibeln und der Frage nach dem Wesen des Unendlichen. Beide Probleme verschlingt unser Denker unter einander und wieder mit seiner endgiltigen Absicht eine atomistische Vorstellung vom Wesen der Materie zu geben. Wir versuchen die Probleme zu sondern und stellen die Frage nach der Natur des Unendlichen voran.

2. Das Wesen des Unendlichen.

1. Das Kontinuum besteht bei GALILEI aus unendlich vielen Indivisibeln, eine Linie z. B. also aus unendlich vielen Punkten. Aus dieser Annahme entspringen aber Schwierigkeiten für den Begriff des Unendlichen.

Eine endliche Strecke soll aus unendlich vielen Punkten bestehen.

1) OETT. p. 130, Anm. 1.
2) *Op.* XIII p. 24; OETT. p. 20.

Eine gröſsere endliche Strecke wird aber mehr Punkte enthalten. Al wird das eine Unendliche gröſser sein müssen, als das andere.

Nun ist aber für Galilei, wie man aus den hierauf bezüglichen Au führungen sieht, das Unendliche immer nur ein absolut Unendliches, de er nicht gestattet, eine verschiedene Gröſse anzunehmen. Dadurch en steht für ihn die Denkschwierigkeit. Die Verschiedenheit der Länge d Strecken bedingt eine verschiedene Zahl der Punkte, die sie enthalte und dabei soll die Zahl dieser Punkte beidemal eine unendliche sein. I Lösung des Rätsels findet Galilei in dem Rückgang auf unsern Intelle Dieser ist ein endlicher, kann also nur Beziehungen zwischen endlich Gröſsen fassen[1]), z. B. der Gleichheit, des Gröſser- oder Kleinerseins. Ab diese Beziehungen kommen dem Unendlichen nicht zu, denn der Intelle kann nicht die Relationen dem Unendlichen zusprechen, die er dem En lichen abgewonnen hat.

Ein Zahlenbeispiel muſs diese These erläutern.[2]) Man kann in d Reihe der natürlichen Zahlen Quadratzahlen und Nichtquadratzahlen unte scheiden. Es giebt also mehr natürliche Zahlen als Quadratzahlen. N hat aber jede Zahl eine Quadratzahl, also ist die Anzahl der Quadratzahl wieder gleich der der natürlichen, wo sie doch soeben kleiner sein soll

Dieses Paradoxon löst sich unter Berufung darauf, daſs die Relation der Gleichheit, des Gröſseren und Kleineren beim Unendlichen ungiltig sin

2. Aber dieses Paradoxon hat noch einen weiteren Zweck. Es füh uns den eigentlichen Sinn der Ansichten Galileis über das Unendlic zu, die in den beiden folgenden Äuſserungen hervortreten[3]): „Es ka weder gesagt werden, ein Unendliches sei gröſser als ein andres, no auch es sei gröſser als ein Endliches. Denn, wenn die unendliche Za gröſser wäre z. B. als Million, so würde daraus folgen, daſs, wenn m von der Million zu andern und immer andern steigend gröſseren Zahl fortschritte, man zur Unendlichkeit gelangen könnte, was indes unmögli ist. Im Gegenteil wenn wir zu immer gröſseren Zahlen fortschreiten, entfernen wir uns umsomehr vom Unendlichen, denn um so gröſser Zahlen werden, desto seltener werden die in ihnen enthaltenen Quadr zahlen. Aber in der unendlichen Zahl können die Quadratzahlen in nic geringerer Menge enthalten sein als alle Zahlen, wie wir soeben erschloss So ist also das Übergehen zu immer gröſseren und gröſseren Zahlen Sichentfernen von der unendlichgroſsen."

Diese merkwürdige Überlegung soll zunächst zeigen, daſs quantitati Relationen nicht allein zwischen unendlichen Gröſsen nicht bestehen, so dern auch nicht zwischen Unendlichem und Endlichem.

---

1) *Op.* XIII p. 35; Oett. p. 30. 2) Ibid. 3) *Op.* XIII p. 37; Oett. p. 32.

Aber das Eigentümliche dieser Aufstellungen steigert sich noch in ihrem weiteren Verlauf: „Wir fanden vorhin, dafs es in der unendlichen Zahl ebenso viele Quadrate (und Kuben) geben müsse, als es Zahlen giebt... Darauf sahen wir, dafs, je gröfsere Zahlen wir nahmen, um so weniger Quadrate unter ihnen vorkamen (und noch weniger Kuben). Nun ist es klar, dafs, zu je gröfseren Zahlen wir fortschreiten, wir uns um so mehr von der unendlich grofsen Zahl entfernen, woraus folgt, dafs, wenn wir die umgekehrte Richtung nach rückwärts einschlagen — denn das vorige Fortschreiten entfernt sich immer mehr von dem vorgesetzten Ziele — die Einheit es allein sei, die wir, wenn überhaupt irgend eine Zahl als unendlich bezeichnen können.“[1])

Man kann es Simplicio nicht verargen, wenn er erklärt, dies nicht zu verstehen. Aber Salviati-Galilei findet „die Sache gar nicht zweifelhaft“. Er fügt zur Erläuterung zweierlei hinzu: Er sagt, die Einheit ist ein Quadrat, ein Kubus u. s. f. Und dann gäbe es keine wesentliche Eigenschaft der Quadrate, Kuben u. s. w., die nicht auch der Einheit zukäme. So haben z. B. zwei Quadratzahlen stets eine mittlere Proportionale zwischen sich. Dasselbe gelte auch von einer Quadratzahl und der Einheit. Zwischen 9 und 1 sei es 3, zwischen 4 und 1 die 2. Kuben haben zwei mittlere Proportionalen zwischen sich. Ebenso z. B. auch 27 und 1, nämlich 9 und 3. „Wir schliefsen daraus, dafs die Einheit die einzige unendliche Zahl sei.“ Und Galilei fährt fort „das sind wunderbare Dinge, die über unsere Einbildungskraft hinausgehen, die uns aber belehren sollten, wie sehr man irrt, wenn man dem Unendlichen dieselben Attribute zuspricht, wie dem Endlichen, während die Wesenheiten dieser beiden unter einander keinerlei Übereinstimmung zeigen“.

3. Die blofse direkte Zergliederung wird das Befremdliche dieser Zahlenspekulationen nicht beseitigen können. Es genügt auch nicht, das Rätsel mit Hinweisen auf ähnliche Erscheinungen, wie sie die pythagoreische Zahlenmystik darbietet, in das Unbestimmte zu verschieben. Galileis sonstige Klarheit und die Tiefe seiner Analyse anderer Probleme legt die Pflicht auf, nicht vorschnell mit Schlagworten solche bisher unverstandenen Gedankenbildungen beiseite zu schieben. Soviel wir sehen, giebt es hier nur noch ein historisches Verständnis, und zwar liefert uns den Schlüssel der Gedankenkreis des Kardinals Nicolaus v. Cusa (1401—1464), dessen Einflufs auf den Beginn des modernen Denkens zwar anerkannt, aber nicht völlig umschrieben ist. Wir ziehen diese Spekulationen hier insoweit heran, als sie auf die vorliegenden Gedankenbildungen Galileis Einflufs gehabt haben.

---

1) *Op.* XIII p. 41; Oett. p. 35.

Im Mittelpunkt der Lehre des Cusanus stehen seine Aufstellunge über den Gottesbegriff. Gott ist zunächst das absolute Maximum, er i dann die Einheit und wird endlich zum absolut Kleinsten, dem Minimu Einige Andeutungen sind nötig, um diese metaphysischen Paradoxie näher zu führen.

Gott ist zunächst das absolut Gröſste, das keinen Zuwachs ken Aber er ist auch das absolute Sein. Als solches fallen ihm die Merkma der Unveränderlichkeit und Einheit zu. Es sind das Konzeptionen, d sich von dem Cusaner rückwärts mit Leichtigkeit in die Anfänge d griechischen Spekulation verfolgen lassen.

Aber diese Einheit des absoluten Seins, des Maximums, Gottes nicht nur Einzigkeit im Sinne des Monotheismus, sondern vielmehr völli innere Geschlossenheit, Abwesenheit der Vielheit, jedes Andersseins, schlieſslich Unteilbarkeit. Aus diesen Annahmen, die die Unveränderli keit und Einheit des absoluten Seins stützen sollen, gegenüber der V änderlichkeit, Vielheit und Teilbarkeit der aus Endlichem zusammen setzten, wechselvollen Welt, steigt der Kardinal zu der Paradoxie emp das absolut Gröſste mit demjenigen gleichzusetzen, dem ebenfalls Abwes heit jeder Vielheit, sowie Unteilbarkeit zukommt, mit dem Punkt, d Minimum. Die Zurückverfolgung dieser Idee in die ausgehende griechis Philosophie, besonders auf den sogenannten Dionysius Areopagita u dessen Vorläufer, gehört nicht mehr in den Rahmen dieser Untersuchung

Jedenfalls besteht also die Thatsache, daſs der Cusaner drei Begri gleichsetzt, das absolute Maximum, die Einheit und das absolute Minimu Die innere Bedeutung dieser Lehre, soweit sie das Maximum und die E heit anlangt, ist leicht erkenntlich. Die Hineinziehung des Minimu wird im Weiteren noch klarer werden.

Auch Nicolaus v. Cusa fühlt das Bedürfnis seine Spekulation dur Beispiele, nämlich aus der Arithmetik und Geometrie näher zu führ Die Zahlenreihe giebt ein Bild seiner Weltanschauung in engster Sche tisierung. Entsprechend dem absoluten Maximum seiner Metaphysik bil er den Begriff einer über alle denkbaren Zahlen hinausgehenden abso gröſsten Zahl. Dieser gegenüber ist die Einheit die absolut kleinste Za unteilbar, das Minimum. Die uns so seltsam anmutende Gleichsetzu des Minimums mit der Einheit entspringt der zu hochgetriebenen We schätzung einer Parallele zwischen dem Punkt als Grundelement der Li und der Einheit als dem der Zahl und findet sich bereits gelegentlich Aristoteles[2]), weiterhin bei späten pythagoreisierenden Platonikern,

1) Siehe besonders die ersten Kapitel des Buches *De docta ignorantia*.

2) Topik, 1. Buch, cap. 18 gegen Schluſs.

MARTIANUS CAPELLA, bei Scholastikern. Aber diese Fäden zurückzuverfolgen, ist hier nicht unsere Pflicht, ebenso auch nicht, die Fülle der Ideen zu entwickeln, die bei CUSANUS mit dieser seiner Aufstellung verknüpft sind.

Vergleicht man nun hiermit GALILEIS Zahlenspekulationen, so ergiebt sich zunächst, wie er dazu kam, die Einheit als die gröfste Zahl hinzustellen. Es sind dies nur die aus dem Ideenkreis des Kardinals zurückbehaltenen Exemplifikationen, deren eigentlicher, allerdings metaphysischer Inhalt abgestorben ist. Nun ist das Maximum bei CUSANUS zugleich das Minimum und so gelangt er, wie GALILEI, dahin, die Einheit als das Maximum aufzustellen.

In ganz entsprechender Absicht werden vom Kardinal die geometrischen Analogieen durchgeführt. Hier spielen Übergänge vom Endlichen zum Unendlichen eine grofse Rolle. Man soll, so lautet die Vorschrift, zunächst die Verhältnisse der Figuren ermitteln, so lange die Strecken endlich sind, und dann den Übergang zum Unendlichen vollziehen.[1]) Läfst man z. B. den Radius eines Kreises wachsen, so wird im Falle der Unendlichkeit die Peripherie zur geraden Linie. Dieses einfachste und andere Beispiele variieren dabei zwei Gedanken: Das Gröfste ist mit dem Kleinsten identisch, und der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen ist mit einer Änderung im Wesen verbunden, der Kreis z. B. wird zur geraden Linie. Für den Kreis verknüpft sich dies mit der Dreieinigkeit. Es sind bei ihm nämlich Zentrum, Durchmesser und Peripherie eins.[2]) Indem sich CUSA — übrigens ähnlich wie andere Denker, z. B. KEPLER[3]) — hier in unergründliche Mystik verliert, setzt er das Zentrum mit der causa efficiens, dem Schöpfer, den Durchmesser mit der causa formalis, dem Regierer, die Peripherie mit der causa finalis, dem Erhalter gleich.

Hiermit vergleiche man die Grenzbetrachtung, die GALILEI in seine Atomistik verwebt. Läfst man die Figur (Figur 1) um die Axe MN rotieren, so kann man für eine beliebige Lage der zu CD parallelen Ebene EF zeigen, dafs der Kegel MHJ gleich sein mufs dem ringförmigen Körper $AEGBFK$. Im Grenzfall, wenn die Ebene durch den Punkt M geht, wird der Kegel zu einem Punkt, der ringförmige Körper zu einem Kreis. „Es scheint mithin, dafs ein grofser Kreis einem Punkt gleich genannt werden

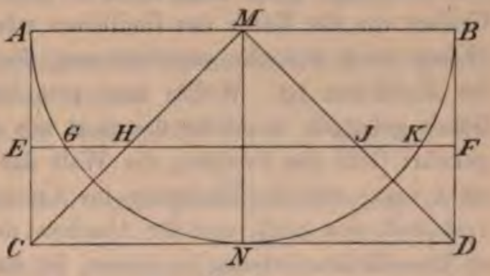


Fig. 1.

1) *De docta ign.* I cap. 12. 2) Ibid. cap. 21.
3) KEPLER ist darin wohl von CUSA abhängig.

kann.“ Dies würde auch für die gröſsten Kreise des Himmelsgewölbes gelten. „Auf Grund solcher Spekulationen erkennen wir, daſs alle Kreisumfänge, seien sie auch noch so verschieden, einander gleich genannt werden können und ein jeder gleich einem Punkt.“[1])

Es ist hier aus dem naiv geknüpften Netz der Spekulationen des Kardinals nur die mathematische Betrachtung, ausgeführt an einem komplizierteren Fall, zurückgeblieben. Aber auch die Wesensänderung beim Übergang vom Endlichen zum Unendlichen, die wir bei Galileis Vorläufer fanden, findet sich bei ihm selbst erhalten. Er erörtert dies an einem geometrischen Ort, auf den es hier nicht ankommt, betrachtet eine Schar von Kreisen, die im Grenzfall in eine gerade Linie übergehen. Er nennt dies „einen merkwürdigen Fall, der die unendliche Verschiedenheit, ja sogar das Widerstreben und die Abneigung der Natur zeigt, auf die eine endliche Gröſse beim Übergang in eine unendliche stöſst“.[2]) Hier begegnen wir sehr merkwürdigen Gedankenbildungen bei Galilei. Diese noch lange nicht ausreichend beobachtet und zusammengefaſst, sind bei ihm keineswegs vereinzelt. Sie zeigen, daſs er bei allem Streben, zu prinzipiell geklärten Methoden vorzudringen, dennoch hier und da dem unentwirrten Denken seines Vorläufers folgt.

Und der Einfluſs dieses Vorläufers erstreckt sich gerade hier in der Atomistik noch weiter. Dieser Übergang ins Unendliche deckt auch die weiteren Rätsel der Zahlenmystik Galileis auf. Wir sahen, daſs man bei Galilei durch Aufsteigen in der Zahlenreihe nicht zum Unendlichen kommt, sondern sich eher von ihm entfernt. Dies wird in des Cusaners Denken verständlich. Er sagt: „Man kommt bei der Zahl in aufsteigender Richtung auf kein absolut Gröſstes.“[3]) Über die Bedeutung dieses Satzes kann nur der Rückgang auf seinen metaphysischen Inhalt aufklären. Cusanus sagt: „Man kann nicht ins Unendliche aufsteigen, weil sonst das Gröſste von der Natur des Endlichen wäre.“ Gott umspannt, als ein dem Wesen nach von ihr verschiedenes, die gesamte Welt, die der Inbegriff des Endlichen ist. Wollte man vom Endlichen aufsteigend zum Unendlichen gelangen, so hieſse das Gott aus der Welt herleiten, wo doch umgekehrt Gott das Primäre, die Welt das Abgeleitete sein soll. Nun versteht man, wie der Übergang ins Unendliche mit einer Wesensänderung verknüpft sein muſs, und der Abscheu, den die Natur empfindet, Endliches zu Unendlichem werden zu lassen, ist ein Schatten jenes alten Gedankens, daſs Gott eben der Grund der Welt, nicht blos ihre Steigerung ist.

---

1) *Op.* XIII p. 31; Oertt. p. 27.
2) *Op.* XIII p. 41; Oertt. p. 35.
3) *De docta ign.* I cap. 6.

Im weiteren wird verständlich, warum die Relationen der Quantität nicht zwischen Unendlichem, aber auch nicht zwischen Endlichem und Unendlichem stattfinden. Was das Unendliche anlangt, so ist dies geschlossen Eines, es läſst keine Differenzen der Gleichheit oder quantitativen Verschiedenheit zu, die überdies nur dem endlichen Intellekt entspringen. Und was die Vergleichung des Endlichen mit dem Unendlichen anlangt, die der gemeine Verstand zu Gunsten des Unendlichen entscheiden würde, so ist das Unendliche = Gott in unfaſsbarer Weise vom Endlichen verschieden. Kein Wissen, vielleicht nur ein ekstatisches Schauen können den endlichen Sinn diesem Unendlichen nähern. Nur im Nichtwissen sind wir Wissende des Absoluten.

In diesen Zügen, die sich übrigens noch in weniger wichtigen Punkten vermehren lieſsen, zeigt sich die Verknüpfung Galileis mit Nicolaus v. Cusa, was die hierher gehörigen Fragen anlangt. Es bestünde noch die Möglichkeit, daſs diese Anregungen Galilei statt aus den Werken des Cusaners aus Giordano Bruno zugeflossen wären. Die Nachprüfung dieser Möglichkeit hat uns wahrscheinlicher gemacht, daſs Galilei hier vom Cusaner abhängt. Die Darlegung der Gründe führt aus dem Rahmen der Untersuchung heraus. Übrigens ist für die Einsicht in den Fortgang der Ideen, um die es sich hier handelt, nicht von Belang, ob Galilei von diesem oder jenem abhängt. Giordano Bruno ist in den hier angezogenen Konzeptionen völlig von Cusanus beeinfluſst. Es ist genau derselbe Ideenzug, in dem beide stehen, und der ursprünglichere Denker ist auch zugleich der ältere. Es genügt gezeigt zu haben, daſs Galilei in derselben Linie sich bewegt.

Zusammenfassend für die weitere Darlegung heben wir noch einmal hervor:

1. Das Unendliche ist dem Wesen nach vom Endlichen verschieden;
2. Der Übergang vom Endlichen ins Unendliche führt demgemäſs einen Wechsel im Wesen herbei;
3. Das Unendliche erreicht man nicht durch Steigerung des Endlichen;
4. Das Unendliche findet man durch Rückwärtsbewegung in der Einheit.

4. Zu den somit wiedergegebenen Anschauungen über das Unendliche tritt bei Galilei nur flüchtig, aber sehr entscheidend noch eine ganz anders gerichtete hinzu, die das Gesamtbild zu ergänzen geeignet ist. Galilei spricht über die Frage, die uns im nächsten Abschnitt eingehender beschäftigen wird, ob die letzten Teile einer Strecke endliche oder nicht von endlicher Ausdehnung, d. h. indivisibel sein müſsten. Diese

letzten Teile würden die Produkte einer unendlichen Teilung sein müssen. Aber eine solche giebt es nicht. Es wird dies in Konsequenz der hier wiedergegebenen Ansichten gesagt. Die fortgesetzte Teilung kann eben nie zu einer unendlichen werden. Andererseits mifst er dieser fortgesetzten Teilung doch auch eine eigentümliche Bedeutung bei. Sie führt nämlich weder zu Endlichem noch auch zum letzten Unteilbaren, sondern zu einem dritten. Galilei sagt: „Zwischen Endlichem und Unendlichem (er meint jetzt das Unendlichgrofse) giebt es noch ein drittes, nämlich das jeder bezeichneten Zahl Entsprechenkönnen, sodafs auf die Frage, ob die Teile eines Stetigen endlich oder unendlich seien, die beste Antwort sein wird, sie seien weder endlich noch unendlich an Zahl, sondern sie seien soviel, als irgend einer angegebenen Zahl entspricht. Nur ist hinzuzufügen nötig, dafs die Teile nicht unter einer begrenzten Zahl liegen, weil sie sonst einer gröfseren Zahl nicht entsprechen könnten, aber es ist nicht nötig, dafs ihrer unendlich viele seien, denn eine angegebene Zahl ist niemals unendlich."[1]) Hier wird neben dem absolut Unendlichen eine neue Art des Unendlichen unterschieden, das durch Steigerung des Endlichen entsteht. Wundt[2]) sagt zur Erörterung des Gegensatzes zwischen infiniten und transfiniten Gröfsen: Der einzige Unterschied liegt in dem zu Grunde liegenden Erzeugungsprincip. Dieses besteht aber im ersten Falle darin, dafs man das Unendliche aus der *endlichen Gröfse* durch unbegrenztes Wachstum *hervorgehen* läfst, während man es im zweiten Falle als einen *fertigen* Begriff denkt, der von Anfang an das Merkmal der Begrenztheit, welches den endlichen Gröfsen zukommt, *nicht* besitzt." Mit diesen aus dem Endlichen gesteigerten infiniten Gröfsen giebt sich Galilei nicht weiter ab. Er beschäftigt sich sonst mit dem Unendlichen im absoluten Sinne. Aber die Tiefe seines Eindringens geht aus dieser Distinktion klar genug hervor.

3. Das Wesen des Kontinuums.

1. Mit seinen Spekulationen über den Begriff des Unendlichen zeigte sich Galilei von neuplatonischen Ideen abhängig, wie sie von Nicolaus v. Cusa zu Beginn des neuzeitlichen Denkens aufgenommen waren. Das zweite Problem, das er in seine Atomistik verwebt hat, die Frage nach dem Wesen des Kontinuums führt über die scholastischen Kommentatoren des Aristoteles auf diesen selbst zurück. Aristoteles hatte in seine Bekämpfung der Atomistik den als stetig aufzufassenden Raumteil an die Stelle des physischen Körpers gesetzt, um durch die Schwierigkeiten, die zwischen der Annahme eines Kontinuums und seinen Atomen, den

1) *Op.* XIII p. 29; Oett. p. 33. 2) *Logik*, Bd. II, 1883, p. 128.

kleinsten Teilchen oder, wie der scholastische Terminus ist, den Indivisibilien sich erheben, die atomistischen Vorstellungen zu zerstören. Die Scholastik hatte dieses Problem aufgegriffen und hin- und hergeschoben. Hier bei GALILEI sehen wir es wieder auftauchen. Dabei ist zu beachten, dafs Galilei nicht zu bemerken scheint, dafs das Wesen der Problemstellung hier geändert ist, dafs es sich nicht mehr um eine Frage der physikalischen Atomistik, sondern der mathematisch-philosophischen Spekulation handelt. Aber gerade in dieser Vermengung oder Verknüpfung der verschiedenen, historisch so entwickelten Fragestellungen liegt die Eigenart der Lehre GALILEIS, aber auch der Grund für die Schwierigkeiten, die sie darbietet, und für den geringen Einflufs, den sie auf die Folgezeit ausgeübt hat, wie für die isolierte Stellung, die sie in seinem eigenen Denken einnimmt.

2. Die erste Frage ist, da doch das Kontinuum teilbar ist, sollen dessen letzte Teile der Gröfse nach als endliche „parte non quante", oder entsprechend, soll man ihre Anzahl als eine endliche oder unendlich grofse annehmen. ARISTOTELES löst die Frage durch Heranziehung der Begriffe der Potenzialität und der Aktualität. Potentiell, d. h. vor aller Teilung ist die Zahl der Teile unendlich, aktuell, d. h. nach vollführter Teilung ist sie endlich.

Diese Trennung des Potenziellen und Aktuellen schiebt GALILEI beiseite, um statt dessen auf seinen Unendlichkeitsbegriff zurückzugehen. Das Kontinuum z. B. irgend einer Strecke — denn mit solchen beschäftigt sich GALILEI vornehmlich, die Anwendung auf Flächen und Körper wird immer nur kurz angedeutet — ist zwar teilbar und fortgesetzt teilbar, aber durch solche fortgesetzte Teilung gelangen wir nicht zur unendlichen Teilung und auch nicht zu den letzten Teilen. Denn, wie wir schon sahen, durch blofse Steigerung erreichen wir nicht das absolute Unendliche des GALILEI, vielmehr entsprechen wir immer nur einer beliebig grofsen Zahl, ohne je ins Unendliche zu kommen. Ob nun aktuell oder potenziell, wir erhalten immer nur solche Teile, die der oben bezeichneten Teilungszahl entsprechen.

3. Um also durch Teilung das Kontinuum in unendlich viele Teile zu zerspalten, wird man völlig anders vorgehen müssen. GALILEI greift zu dem Zweck auf eine alte Bemerkung der Scholastiker zurück, die ihm aus irgend einem Kommentar zur Physik des ARISTOTELES im Gedächtnis geblieben sein mag. Wie für ihn war auch für die scholastischen Denker eine Teilfrage des Kontinuitätsproblems dahin gegangen, wie können die potentia im Kontinuum enthaltenen letzten Teilchen, die Indivisibeln, aktuell gemacht werden? Actu treten aber die Indivisibeln bei der Bildung von Figuren auf, nämlich an den Ecken. Dementsprechend begnügt sich

liegenden unteilbaren Vakuen zu zerspalten. Hierin erblickt GALILEI die *Lösung* des Kontinuitätsproblems. Das Stetige wird aufgelöst in unend-

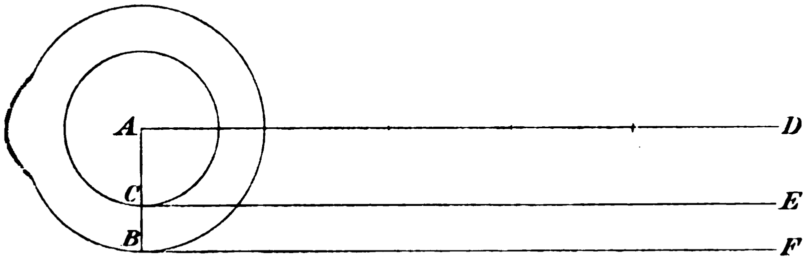


Fig. 2.

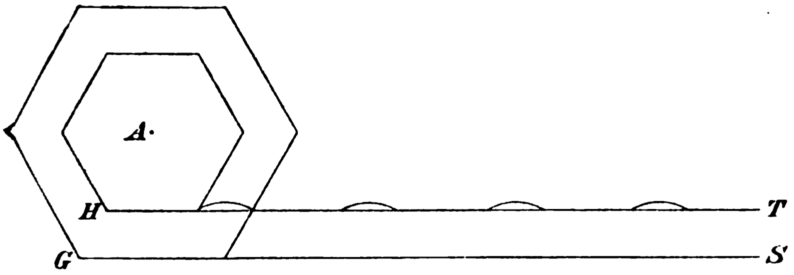


Fig. 3.

lich viele diskrete durch entsprechende Vakuen getrennte Punkte, aber diese Auflösung greift für ihn das Stetige als solches nicht an.

5. Diese Zusammensetzung des Kontinuums aus getrennten Punkten bietet dem Verständnis Schwierigkeiten dar. Man versteht nicht recht, wie GALILEI den Begriff des geometrisch Stetigen mit der Zerlegung in getrennte unausgedehnte Punkte vereinigen will. Dafs das Paradoxon der „rota ARISTOTELIS" ihm diese Auffassung zugeführt, ja, dafs dieses Problem mit der ihm eigenen Deutung auch nur eine hinreichende Begründung abgebe, kann nicht behauptet werden. Aber GALILEI legt seinen Anschauungen über das Verhältnis von Kontinuum und Indivisibilien grofsen Wert bei im Verhältnis zu der sichtlichen Denkarbeit, die er der Frage geopfert hat.[1]) So entspringt für uns die Pflicht, wenigstens den Versuch zu wagen, die Bedeutung und innere Stellung seiner Lehre genauer festzulegen.

GALILEI teilt selbst den Einwand des ARISTOTELES mit, dafs Unteilbares zu einander gefügt, keine teilbare Gröfse hervorbringe. Er begegnet ihm dadurch, dafs er sagt, allerdings könnten nicht 10, 100, 1000 Indivisibeln eine endliche teilbare Gröfse bilden, wohl aber unendlich viele.[2])

1) *Op.* XIII p. 63; OETT. p. 56 oben. 2) *Op.* XIII p. 35; OETT. p. 30.

Lasswitz versucht das Dunkel, welches dieser Aufstellung anhaftet, auf Grund seines eigenen erkenntniskritischen Standpunkts aufzuhellen. Wenn wir auch verzichten müssen, diesen Standpunkt mit den daran hängenden Fragestellungen hier zu bezeichnen, und deshalb auf Lasswitz' Buch selbst verweisen, so läfst sich doch die daraus hervorgehende beachtenswerte Auffassung losgelöst aussprechen. Lasswitz meint, Galilei denke jeden „unendlich kleinen Teil, das Raumelement als noch den Charakter der Körperexistenz besitzend, wenn auch seine räumliche Ausdehnung verschwunden ist“ und glaubt, dafs sich bei Weiterausbildung dieses Ansatzes die Vorstellung von Kraftcentren ergeben haben würde.[1])

Für uns handelt es sich darum, an Stelle einer direkten systematischen Beurteilung, wie sie irgend ein psychologischer oder erkenntniskritischer Standpunkt diktiert, eine methodisch gesicherte, historische Betrachtung zu gewinnen. Nur an das sich anzuklammern, was Galilei selbst ausspricht, kann zu einem eindringenden Verständnis unzureichend sein. Gerade am Anfang prinzipiell neu gewendeten Denkens versagt die logisch und sprachlich kongruente Wiedergabe der Gedanken. Wir haben den Ausdruck „unendlich klein“ in unserer Darstellung vermieden, weil wir ihn bei Galilei nicht angetroffen haben. Er spricht in gleicher Bedeutung von Punkten, Indivisibeln, atomi non quanti. Den Begriff des „Unendlichkleinen“ hier anzuführen, ist bedenklich, und dennoch ist nicht unmöglich, dafs wir hier einen Keimpunkt dieser Begriffsbildung vor uns haben. Es gilt auch für mathematische Wahrheiten zumal prinzipieller Natur, dafs sie sich aus Regionen des Innenlebens emporringen, die ursprünglich sich dem Lichte einer logischen Klarheit entziehen. Die Anerkennung dieses Standpunkts, so wichtig sie für das Verständnis der ersten Anfänge einer neuen Denkweise ist, bringt aber die Gefahr eines geistreich klingenden, grundlosen Psychologisierens mit sich, das Geheimnisse und ihre Deutungen da sucht, wo keine zu finden sind. Dem gegenüber stehen der historischen Betrachtung zwei Wege offen. Der eine liegt in dem Rückgang auf die Quellen der Denkweise, der andere führt zur Untersuchung der Konsequenzen, die sie in den Arbeiten nachfolgender Denker gefunden hat. So können unter Umständen die hinter dem geradezu Ausgesprochenen mitschwingenden, aber stumm gebliebenen Gedankenansätze zu Gehör gebracht werden. In unserm Fall wird diesem Gesichtspunkt entsprechend auf Nicolaus v. Cusa zurückzugehen sein, während für die Weiterbildung Cavalieri mit seiner *Geometria indivisibilium* herangezogen werden kann.

6. Bei dem Cusaner kreuzen sich mehrere Auffassungen des Punk-

1) *Gesch. d. Atomistik*, Bd. 2, p. 50.

tes.[1]) Der Punkt ist zunächst die Grenze der Linie. Denkt man sich aber eine Linie in verschiedene Teile geteilt, so tritt auch der Punkt als Verbindungsstelle solcher Teilstücke auf (iunctura). Zwischen beiden Arten von Punkten ist kein Unterschied. Eine Strecke enthält also beliebig viele Punkte. Dieser Auffassung nach ist der Punkt ein Non-quantum, indivisibel und aus Punkten eine Quantität zusammenzusetzen, scheint unmöglich. Diese Ideen liegen ganz in der Richtung der an ARISTOTELES anknüpfenden Scholastik. Erst eine ganz anders geartete Auffassung des Punktes scheint für das Verständnis GALILEIS von Wichtigkeit zu sein.

Hiernach stellt sich der Punkt als die „Komplikation" der Linie und diese umgekehrt als „Explikation oder Evolution" des Punktes dar, ebenso wie die Fläche als Evolution der Linie, der Körper als Evolution der Fläche. Allerdings ist dieser Begriff der Evolution kein durchaus deutlicher. Es handelt sich um eine begriffliche Auswicklung. Der Punkt enthält die Linie dem Wesen nach; er ist überall in der Linie, aber nicht so, dafs sie aus Punkten zusammengesetzt sei, sondern nur so, dafs er ihr Wesen konstituiert. Mit den entsprechenden Gedanken für die Einheit und die Zahlenreihe verknüpft, heifst dies, die Einheit entwickelt die Zahlenreihe nicht durch additive Zusammensetzung, sondern durch begriffliche Explikation. Es giebt nur einen Punkt, nur eine Einheit, die aber überall in Gröfsen- und Mengenbegriffen anwesend sind.

Es versteht sich nach dem bereits aus CUSAS Anschauungen Hervorgehobenen, dafs hier Spiegelungen metaphysischer Ideen vorliegen. Das All entwickelt sich geradeso aus dem Minimum, welches mit dem Maximum oder Gott identisch ist, wie die Zahlenreihe aus der Einheit oder die Linie aus dem Punkte. Hier zeigt sich, dafs die Auswicklung der Welt aus dem Minimum kein Vorgang sein darf, der für das Minimum eine Bereicherung seines Inhalts bedeutet, denn dem Minimum oder Gott gehört die Fülle der Realität und die höchste Vollendung an. Ganz entsprechend ist der Punkt die Vollendung und Totalität der Linie.

Für uns genügt es die lebensvolle, wenn auch begrifflich unklare Ansicht der Entwicklung des Punktes über sich selbst hinaus angedeutet zu haben. Die verschiedenen Versuche diese für die Philosophie des CUSANERS im Gegensatz zur Scholastik charakteristische Denkweise mit den übrigen ihm historisch überkommenen Einflüssen zu vereinigen, sind dem Hauptgedanken gegenüber belanglos. Der Gesichtspunkt der Evolution selbst erscheint bei ihm in verschiedenen Wendungen. Mit Recht sagt FALCKENBERG in seiner Darstellung dieser vielfachen Wendungen, der Philosoph habe in der Freude, die neue und fruchtbare Idee der Entwick-

1) *De docta ign.* lib. 2, cap. 3; *De ludo globi* lib. 1.; *De mente idiotae* lib. 3 cap. 9.

lung gefunden zu haben, die mannigfachen Nuancen übersehen, welche derselben durch ihre Anwendung auf die verschiedenartigen Verhältnisse erwuchsen.[1])

Was nun Galilei anlangt, so wäre es zuweit gegangen behaupten zu wollen, dafs er diese Ideen durchaus geteilt habe. Bei dem Einflufs aber, den das Denken des Cusaners auf ihn gehabt hat, ist es doch möglich, dafs die hier auftretende dynamische Auffassung gegenüber der starren Inhaltslosigkeit der scholastischen Betrachtungsweise hinter seinen ausdrücklich formulierten Gedanken gestanden habe. Sieht man in dem Punkte die zur Evolution strebende Linie „kompliziert", so wird es daher begreiflich, wie man die Vorstellung der Stetigkeit des Kontinuums mit der Annahme diskreter Indivisibilien verbinden kann. Der Punkt ist eben nicht mehr das leere, letzte Unausgedehnte, sondern trägt eine Tendenz zur Ausdehnung in sich, die die Brücke zwischen dem Diskreten und dem Stetigen schlagen mufs. Begriffliche Klarheit ist es nicht, die diese Konjektur mit sich führt, aber eine gewisse psychologische Annäherung auf Grund nachgewiesener historischer Zusammenhänge. Weitere Durcharbeitung des überkommenen Materials nach noch unbekannten Richtungen kann vielleicht weitere Bestätigungen bringen.

7. Cavalieris *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* bleibt in ihrem Ursprung dunkel, so lange man nicht Galileis Einflufs auf seinen Schüler ausreichend heranzieht. Cavalieri spricht bekanntlich in seiner Geometrie nur sehr wenig von den Indivisibeln und dem Kontinuum, obgleich er beide Bezeichnungen im Titel seines Werkes anbringt. Einigen Aufschlufs gewährt die Praefatio, sowie besonders das Scholium lib. II, p. 17 (Ausg. v. 1635). Unter Indivisibilien werden Punkte als Elemente der Linien, Linien als solche der Flächen und Flächen als solche der Körper verstanden und zwar handelt es sich in der mathematischen Behandlung nur um äquidistante Linien, die zu Flächen, und entsprechende Ebenen, die zu Körpern zusammengesetzt werden. Cavalieri scheint solche Linien und Ebenen zusammenzuaddieren, um daraus kontinuierliche Flächen und Körper zu erhalten, insofern als er zum Zweck seiner Quadraturen und Kubaturen den Begriff „alle Linien resp. Flächen einer Figur" bildet. Aber er lehnt es ab, solche Elemente geradezu zu Kontinuen zusammenzufassen. Ihm sind die Disputationen der Philosophen über die Frage, ob eine solche Zusammenfassung möglich sei oder nicht, wohl bekannt. Seine eigenen Auseinandersetzungen darüber erheben sich um nichts über die fruchtlosen Distinktionen der scholastischen Kommentatoren der Physik des Aristoteles. Sie bieten weder einen

1) Falckenberg, *Grundzüge der Philosophie des Nicolaus Cusanus*, p. 51.

Fortschritt in der prinzipiellen Aufklärung, dar, noch sind sie überhaupt ausreichend durchsichtig. So versucht er um die philosophische Klarlegung herumzukommen, indem er statuiert, dafs er seine Inbegriffe „aller Linien oder Flächen“ nicht den entsprechenden Kontinuen selbst gleichsetze, sondern nur ihre Proportionalität behaupte. Seine Methode soll darin bestehen, dafs an Stelle der Kontinuen, Flächen oder Körper die Inbegriffe der Indivisibilien behandelt werden, die zu denselben Verhältnissen führen. Von der Kraft dieser Methode ist er durchdrungen. Er hält sie „für den goldenen Schlüssel zu mancher verschlossenen Thür der Hochburg Geometrie, die uns den Zugang zu den reichsten Schätzen eröffne.“

GULDIN[1]) hat CAVALIERI den Vorwurf gemacht, er habe seine Methode aus KEPLERS *Stereometria doliorum* entnommen, in der wir Anfänge einer infinitesimalen Methode vor uns haben. Die Frage, ob dieser Vorwurf berechtigt sei, ist von CANTOR in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* erörtert worden. Es wird dort auch der Zusammenhang zwischen CAVALIERI und GALILEI erwogen. Dafs GALILEI sich mit Forschungen über die Indivisibilien beschäftigte, geht aus dem Briefwechsel beider hervor. Die Frage ist nun die, ob GALILEI und CAVALIERI von der ihnen (was GALILEI anlangt nur mit grofser Wahrscheinlichkeit) bekannten *Stereometria doliorum* des KEPLER abhängen oder nicht. GALILEIS Buch über die Indivisibilien ist nicht erschienen. Aber wir müssen das, was die *Discorsi* im ersten Tag geben, und der Gegenstand unserer Untersuchung war, für ein Stück der geplanten Publikation ansprechen. Es geht dies aus dem Antwortschreiben CAVALIERIS an GALILEI hervor, als jener ihm die *Discorsi* dediciert hatte.[2]) CAVALIERI kommt da nach einleitenden Worten alsbald auf GALILEIS Behandlung der Indivisibilien. Er ergeht sich in Lobeserhebungen der Leistung GALILEIS, die freilich nicht ohne innere Einschränkung zu sein scheinen und sich auf die kühne Summation der Elemente zu Kontinuen beziehen. Dafs aber diese Versuche GALILEIS etwas anderes enthielten, als CAVALIERI, dem seines Meisters Pläne in dieser Richtung lange bekannt waren, erwartet hatte, tritt in keiner Wendung hervor.

Die Frage, ob GALILEI von KEPLER abhängig war, erledigt sich demnach in negativer Weise. Das Kontinuumsproblem ist bei GALILEI nicht aus mathematischem Interesse hervorgegangen. Ihn beschäftigte die Atomistik. In deren Gefolge gab es aber anschliefsend an die Einwendungen des ARISTOTELES eine durch die gesamte Scholastik sich hindurch-

---

1) S. bei CANTOR, *Vorles. über Gesch. d. Math.* II², p. 840, 842; auch KEPLER, *Op. omn.* ed. FRISCH, IV, p. 656.

2) *Op.* X p. 349.

ziehende Dialektik über das Kontinuitätsproblem, die in den Kommentaren zum Aristoteles niedergelegt ist. In dieser Fragestellung steht Galilei mitten drin. Von dort ist ihm dies Problem zugeflossen und er hat es auf Cavalieri übertragen. Ob nun freilich Cavalieris besondere mathematische Ausnützung des Problems auf den Anstofs Keplers zurückgeht oder ebenfalls schon mit Galileis Anregungen gegeben war, dürfte schwierig zu entscheiden sein. Unsere Aufgabe war es nur, die Stellung der Konzeptionen Galileis in der historischen Entwicklung zu präzisieren. Die Vorsicht gebietet aber, bindende Schlüsse aus dieser Festlegung über den Charakter von Galileis Auffassung des Indivisibeln noch nicht ziehen.

4. Die physikalische Anwendung.

1. Die im Vorhergehenden behandelten Untersuchungen Galileis knüpfen sich an Probleme an, die andern intellektuellen Bedürfnissen entsprangen, als der Frage nach der Konstitution der Materie, aber wie sie von dem physikalischen Interesse ihren Ausgang nahmen, so stellen sie sich schliefslich wieder in den Dienst desselben und fördern so eine physikalische Atomistik zu Tage, in der die historisch überlieferten Probleme sich in höchst eigenartiger Weise gegenseitig durchdringen.

Die erste Absicht dieser Atomistik geht dahin, den festen und flüssigen Aggregatzustand zu erklären. Die Festigkeit des Körpers wird, wie wir sahen, zum einen Teil durch die Abneigung der Natur gegen das grofse Vakuum, zum andern durch die unendlich vielen kleinen Vakuen bewirkt, die zwischen den Atomen eingebettet sind.

Der flüssige Zustand wird, wie wir ebenfalls schon angedeutet, dadurch herbeigeführt, dafs z. B. in Gold, wenn es schmelzen soll, Feueratome eindringen. Diese schlängeln sich zwischen die kleinsten Teilchen des Goldes, erfüllen die kleinen Vakuen und heben so deren Kraft auf. Ziehen dann diese Feueratome wieder ab, so entstehen die Vakuen wieder; ihre gegenseitige Anziehung tritt wieder ein und der Körper ist fest geworden.

Diese Hypothese der Feuerteilchen kommt bereits bei antiken Physikern vor. Die erwähnte Auseinandersetzung Herons am Eingang der „Druckwerke“ enthält sie ebenfalls, wenn auch nicht besonders ausführlich, vielmehr im Ton einer allbekannten Sache.[1]) Heron spricht vom Diamanten, dafs er sich nicht glühend machen lasse, und fügt hinzu: „Die Moleküle des Feuers haben einen gröfsern Umfang als die Vakua des Steines und dringen daher nicht ein, sondern berühren blofs die äufsere

1) Schm. I p. 17ff.

Oberfläche. Eben deshalb, weil sie nicht hineinkommen, wie bei den übrigen Körpern, entwickelt sich auch keine Wärme.“ Andere Beispiele schliefst HERON mit den Worten ab „dafs also das Feuer alle Körper, die fester sind als dieses selbst, auflöst und verwandelt, ist klar.“

Dieser Auffassung der Entstehung des flüssigen Zustandes steht aber eine andere durchaus abweichende bei GALILEI gegenüber. „Nehme ich einen harten Körper, einen Stein oder ein Metall, und zerteile ich ihn mit einem Hammer oder einer äufserst feinen Feile in das allerfeinste, unfühlbare Pulver, so ist es klar, dafs die kleinsten Teile, trotzdem dafs wir sie einzeln weder sehen noch fühlen können, doch noch endlich, gestaltet und zählbar sind. Daher kommt es, dafs sie, angehäuft, sich gegenseitig zusammenhalten. Und höhlen wir das Häufchen bis zu einem gewissen Grade aus, so bleibt eine Höhlung nach, ohne dafs die umgebenden Teile dieselbe ausfüllen; schütteln wir, so schliefst sich das Ganze, sobald die Bewegung von aufsen aufhört. Dieselben Erscheinungen finden wir bei der Anhäufung immer gröfseren Körperchen jeder Gestalt, selbst bei kugelförmigen, wie z. B. bei einem Haufen Hirse, Weizen, Schrot oder jedem andern Stoffe. Wenn wir aber derartige Erscheinungen beim Wasser sehen wollen, so werden wir sie da nicht antreffen, da dasselbe, erhoben, sofort sich wieder ebnet, wenn es nicht vom einem Gefäfs oder einem andern äufseren Hindernis gehalten wird; ausgehöhlt schliefst sich sofort die Höhlung, und geschüttelt, fluktuiert es sehr lange und verbreitet seine Wogen weithin. Daraus kann man wohl schliefsen, dafs die kleinsten Teilchen des Wassers, in die dasselbe aufgelöst zu sein scheint (denn, da es weniger Konsistenz als das feinste Pulver hat, so hat es gar keine), etwas völlig anderes sind als die kleinsten, endlichen, teilbaren Teile, und ich finde keinen andern Unterschied, als den, dafs sie unteilbar sind. Mir scheint auch seine exquisite Transparenz dafür zu sprechen, denn nehmen wir den durchsichtigsten Krystall und fangen an ihn zu zerbrechen, zu stampfen, zu pulvern, so verliert er die Transparenz, und das umsomehr, je feiner er zerrieben ist, aber Wasser, welches völlig zerrieben ist, ist auch völlig diaphan.“[1])

GALILEI hat sich mit der Frage nach der Resistenz des Wassers lange beschäftigt.[2]) Hier ist die Antwort in dem Sinne gegeben, dafs die Wasserteilchen keine Spur von Kohäsion haben. Zur Erklärung werden die Aufstellungen herangezogen, die GALILEI bei seiner Behandlung des Unendlichen gewann. Die mechanische Teilung entspricht der fortgesetzten Zerlegung einer Strecke durch weitere und weitere Division. Wir sahen,

---

1) *Op.* XIII p. 43; OETT. p. 37.

2) Im *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua* etc. *Op.* XII.

[illegible] solche Teilung niemals bis zu den letzten Indivisibeln führen [illegible] Wird nun auf ganz andere Weise die unendliche Teilung erreicht, [illegible] mit diesem Übergang ins Unendliche eine Wesensänderung ver-[illegible] sein. Diese Wesensänderung liegt hier im Übergang aus dem [illegible] in den flüssigen Zustand. Auch die Zerpulverung des Krystalls [illegible] eine Anwendung seiner Unendlichkeitstheorie. Zerteilen wir den [illegible] und pulvern wir ihn, so verliert er seine Transparenz, und das [illegible] mehr, je feiner er zerrieben ist. Je weiter wir nämlich in der Teilung fortschreiten, desto mehr entfernen wir uns von der unendlichen Teilung, desto undurchsichtiger wird der Krystall.[1]) Das Wasser aber ist [illegible] bis ins Unendliche zerrieben, und daher durchsichtig.

Diesen Auffassungen entsprechend, schliefst Galilei seine Erklärung des flüssigen Zustandes auch direkt an die Unendlichkeitsbetrachtungen [illegible] „Was sollen wir sagen zu solchen Metamorphosen (nämlich dem Übergang eines Kreises in eine Gerade) beim Übergang aus dem Endlichen ins Unendliche? Und warum sollen wir uns dagegen sträuben, da wir beim Aufsuchen des Unendlichen bei den Zahlen es schliefslich bei der Einheit fanden? Wenn wir nun beim Zerbröckeln eines festen Körpers [illegible] Teile denselben aufs feinste zerpulvern in seine unendlich vielen [illegible], die nicht mehr teilbar sind, warum sollten wir nicht sagen [illegible], dieser Körper sei in ein einziges Kontinuum zurückgekehrt, vielleicht in eine Flüssigkeit, wie Wasser oder Quecksilber?"[2])

Hier spielt noch der Übergang zum Unendlichen, der bei Galilei der Rückgang zur Einheit ist, insofern hinein als in den Worten „der Körper sei in ein einziges Kontinuum zurückgekehrt" eine physikalische [illegible] angedeutet wird.

Die Annahme einer mangelnden Kohärenz der Wasserteilchen wurde ursprünglich durch Empirie gestützt. Hier soll uns der tiefere Grund für die Erscheinung gegeben werden in der Hypothese, das Flüssige sei ein solches, weil es in seine unendlich vielen indivisibeln Komponenten zerlegt sei. Den Übergang aber vom festen Zustand in den flüssigen soll eine mathematisch-metaphysische Spekulation über die Wesensänderung beim Übergang vom Endlichen zum Unendlichen verdeutlichen — eine höchst merkwürdige Verknüpfung zweier disparater Wissensgebiete.

Zu begreifen bleibt aber noch, wie denn die Auflösung in die indivisibeln Teile bewirkt werden kann, wo dies der fortgesetzten mechanischen Teilung unmöglich ist. Dann wendet sich Galilei zu den Feuerteilchen zurück, freilich in anderer Absicht, als bei seiner ersten Heranziehung,

1) Hier bleibt die Transparenz des festen Körpers nicht erklärt.
2) Op. XIII p. [illegible] Opere I p. [illegible]

wo sie nur die Vakuen zu füllen haben.[1]) Jetzt fällt ihnen die Rolle zu, die letzte Zerlegung in die Uratome herbeizuführen. „Gold und Silber verflüssigen sich nicht eher, als bis die Indivisibeln des Feuers oder der Sonnenstrahlen (nämlich im Brennspiegel) sie auflösen und zwar in ihre ersten äufsersten unendlich vielen unteilbaren Komponenten.“ Dabei wird den Feuerteilchen eine äufserst heftige, schnelle Bewegung zuerteilt und diese Annahme wieder mit der Vermutung einer Lichtgeschwindigkeit verknüpft, die GALILEI bekanntlich durch einen primitiven Versuch hoffte nachweisen zu können.

3. Endlich erklärt GALILEI mit Hülfe seiner Atomistik noch die Erscheinungen der Verdünnung und Verdichtung. Die Anregung dazu kann ihm aus ARISTOTELES, vielleicht auch aus HERON zugeflossen sein. HERON zeigt ausführlich, dafs Vakuen angenommen werden müssen, wenn man die Verdünnung und Verdichtung z. B. der Luft begreifen will. Aber GALILEIS Auslassungen weichen hier weit von denen des HERON ab. Er stimmt diesem bei, wenn er ebenfalls Vakuen zur Erklärung der Phänomene für nötig hält, aber er möchte gern die Kontinuität des Stoffes mit den Peripatetikern beibehalten. Diesem Interesse entspringt die Auffassung des Kontinuums als einem von unendlich vielen indivisibeln Vakuen durchsetzten Apparate von ebensolchen Punkten. Wir sahen, dafs GALILEI zur Erläuterung dieser Auffassung die „rota ARISTOTELIS“ heranzog. Diese löst nun für ihn die Aufgabe, Verdünnungen und Verdichtungen bei Erhaltung des Kontinuums herbeizuführen. Der mit dem gröfseren Kreise in Fig. 2 verbundene kleinere Kreis erzeugte eine von unendlich vielen Vakuen durchsetzte, also „verdünnte“ Strecke. Denkt man sich entsprechend mit dem Kreise AB einen gröfseren Kreis verbunden, so würden entsprechende Überlegungen zeigen, dafs nach GALILEIS Auffassung bei der Wälzung Übereinanderlagerungen, d. h. Verdichtungen eintreten würden.[2]) In dieser Weise, deren nähere Erörterung keinen Gewinn für ein weiteres Eindringen mehr zeitigen würde, werden die Kontinuitätsbetrachtungen verwendet, um derartige Phänomene einer atomistischen Erklärung unter Beibehaltung der peripatetischen Forderung für den Körper zu erklären.

4. Nunmehr lassen sich die Einflüsse überblicken, die in GALILEIS Atomistik wirksam sind. Es ist dies zunächst die metaphysische Atomlehre der Alten überhaupt, die durch ARISTOTELES und vielleicht auch LUCREZ vermittelt, damals Jedermann zur Kenntnisnahme offen dalag, und die erste Grundlage derartiger Betrachtungen der Materie abgeben konnte.

1) *Op.* XII p. 44; OETT. p. 38.

2) Erläuternde Figuren finden sich *Op.* XIII, Taf. 1, Fig. 9; OETT. p. 45; LASSWITZ *Gesch. d. Atomistik* II, p. 48.

Dazu tritt die physikalische Atomistik des HERON, die für die Auffassung des Vakuums wichtig war, aber auch in der eigentlich physikalischen Erörterung GALILEIS Einfluſs übte. Daneben führte das Studium der an die Atome anknüpfenden Fragen in die aristotelisch-scholastische Behandlung des Kontinuums und der Indivisibeln und wandte das Interesse von der Frage nach der Konstitution der Materie einer spekulativ-mathematischen Betrachtung zu. Schlieſslich verflochten sich hiermit neuplatonische Fäden, die über CUSANUS zu unserm Denker führten und eine eigentümliche Auffassung und Einarbeitung des Unendlichkeitsbegriffs in den bisherigen Denkzusammenhang mit sich brachten.

Zugleich ergiebt sich, daſs GALILEIS Denken weit enger mit Ideenzügen aus dem Altertum und Mittelalter verknüpft ist, als gemeinhin angenommen wird, daſs die Verfolgung dieser Ideenzüge auch für das weitere Verständnis des Forschers lohnend sein dürfte und, daſs er intensiver im Bezug auf seine prinzipiell-philosophische Zergliederung gewisser Grundprobleme der Körperwelt betrachtet werden muſs, als bisher geschehen ist.

Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die englische Übersetzung derselben.

Von G. Wertheim in Frankfurt a. M.

Johann Heinrich Rahn, latinisiert Rhonius[1]) (1622—1676), der Sohn des gleichnamigen Bürgermeisters von Zürich, hat 1659 ein Lehrbuch der Algebra veröffentlicht, das durch seinen Inhalt, mehr aber noch durch seine Form vor dem Schicksal bewahrt zu werden verdient, vollständig in Vergessenheit zu geraten. Der Titel des Buches lautet:

> Teutsche Algebra | Oder | *Algebraische Rechenkunst* | zusamt ihrem Gebrauch: | Bestehend | 1. In Auflösung verworner Mathematischer | Aufgaben. | 2. In Verhandlung allerhand Algebraischer | Aequationen. | 3. In Erfindung unterschidlicher nuzlicher | Theorematum. | Dem Teutschen Liebhaber Mathematischer Künsten nach | einem neuen, und hiebevor niemalen im Trukk ge- | sehenen Methodo zugefallen also | verfasset | Durch Johann Heinrich Rahn, Landvogt | der Grafschaft Kyburg. | Zu Zürich getrukt, | Bey Johann Jacob Bodmer. | M DC LIX.

Der Zweck des Buches ist, wie Rahn in dem „Vorbericht" eingehend darlegt, die Algebra in ihrer neuen, von Vieta, Cartesius u. a. geschaffenen Form, die der Welt schon lateinisch und französisch mitgeteilt sei, in hochdeutscher Sprache darzustellen. Er habe dies auch dem Augsburger Edlen Leonhard Weisse versprochen, dessen Bekanntschaft er in Taynach, wo er sich zur Sauerbrunnenkur befunden, gemacht habe. Jetzt wolle er sein Versprechen, an das er inzwischen auch brieflich erinnert worden sei, halten und dadurch seinem Vaterlande deutscher Nation einen Dienst erweisen, obwohl seine eben erfolgte Ernennung zum Landvogt von Kyburg und der dadurch veranlaſste Umzug mit seinem weitläufigen Hauswesen nach seinem neuen Wohnort ihm nur wenig freie Zeit lasse.

1) Auf der letzten der zwölf nicht paginierten Seiten des Originalwerks, welche dem eigentlichen Text vorausgehen, kommt sowohl Rhonius wie Ronius vor. Der Artikel über Rahn in der *Allgemeinen deutschen Biographie* hat Moritz Cantor zum Verfasser.

In der That haben die Amtsgeschäfte des Verfassers, die auch mehrfach Reisen erforderlich machten, die Korrektheit des Druckes sehr beeinträchtigt. Da der Verleger sonst nicht weiter drucken wollte, wurde jemand, dessen Namen im Buche nicht genannt ist, mit der Revision der Bogen beauftragt. Es war dies ein alter Mann, dessen Augen schon schwach waren, und dem keine Brille mehr helfen wollte. Ihm war die Druckerei, wie dem Setzer die Materie ungewohnt. Ferner sagt er: „das bey meinen noch wenig übrigen tagen ich meine Soliloquia, Gott geheimer zu werden, mehrers haben sölle, alsz iemals, auf dasz im abscheid ich nicht ein frömdling seye vor Gott.“ Deshalb hat er mit Unlust, nur aus Pflichtgefühl die Arbeit übernommen, und es ist erklärlich, dafs sehr viele Druckfehler stehen geblieben sind (das Verzeichnis derselben umfafst sieben Druckseiten). Das hat aber nicht verhindert, dafs das Buch seiner Zeit grofsen Beifall gefunden hat. Leibniz rühmt es in seiner Arbeit: „De ortu, progressu et natura algebrae etc.“ (*Mathem. Schriften, herausgegeben von* C. J. Gerhardt, Bd. VII, S. 203), ein tüchtiger englischer Mathematiker hat es ins Englische übersetzt, und ein anderer englischer Mathematiker hat diese Übersetzung durch Zusätze bereichert.

Sehen wir jetzt, wie das Buch durch seinen Inhalt jenen Beifall verdiente.

Nach einer „Zuschrift“ an hochgestellte Gönner in Zürich und Schaffhausen (darunter seinen Vater), einem „Vorbericht“ und einem Lobgedicht des Pastors Georg Müller an den Verfasser behandelt dieser S. 1—60 an bestimmten Zahlen wie an Buchstabengröfsen die allgemeine Arithmetik. Er giebt und erläutert durch Beispiele die Gesetze der Operationen mit ganzen Zahlen und mit Brüchen, einschliefslich der Potenzierung und der Radizierung. Die Ausziehung der Quadratwurzel und der Kubikwurzel wird an Beispielen eingeübt, die Ausziehung von Wurzeln höherer Grade wird nur allgemein berührt. Dem Rechnen mit Wurzelgröfsen ist ein besonderer Abschnitt gewidmet. In diesen ist S. 37—48 eine Tabelle aller ungeraden Zahlen unter 24000, soweit sie nicht durch 5 teilbar sind, eingeschaltet, welche wegen ihres doppelten Eingangs ein ganz modernes Aussehen hat. Jede der 12 Seiten ist in 21 Vertikalreihen geteilt, von denen die erste, die von den übrigen durch einen Doppelstrich getrennt ist, die beiden Endziffern der Zahlen 01, 03, 07, 09, 11, . . ., 99 enthält. Es sind das augenscheinlich 40 Endungen. Demgemäfs hat jede der 12 Seiten 41 Horizontalreihen, von denen die erste die Anfangsziffern der Zahlen enthält, 0, 1, 2, 3, . . ., 19 (soweit die erste Seite), 20, 21, . . ., 239. Wo die von den Anfangs- und den Endziffern einer Zahl ausgehenden Reihen sich schneiden, ist der Platz der Zahl, und hierhin hat Rahn den kleinsten Divisor der Zahl gesetzt, oder, wenn dieselbe eine

Primzahl ist, den Buchstaben p. Als eine besondere Eigentümlichkeit ist hervorzuheben, dafs bei den Quadraten der Primzahlen der kleinste Divisor, d. i. die Primzahl durch gröfseren Druck ausgezeichnet ist.

Der Rest des Buches (S. 61—188) ist der Algebra im engeren Sinne gewidmet. Zunächst sagt uns der Verfasser, wieviel Wurzeln eine Gleichung haben könne. „So gross das mäsz des vermögens ist, so vil wurzeln mag die Aequation befassen, sie seyen dann affirmat oder negat, oder ganz absurd oder unmöglich: Die *negat*-wurzeln heifset CARTESIUS *radices falsas*; weilen sie aber allein darum *negat* sind, dasz sie in der delineation sich in das gegenspil der *affirmat*-wurzeln kehren, so bedunken sie mich nicht weniger waarhaft seyn alsz die affirmaten: Darum so enthalte ich mich sie falsch zuheissen, und bleibe bey dem negat-wort, nach eigenschaft des zeichens — so solchen wurzeln angehenkt ist. Die ganz absurden wurzeln sind um ihrer selbs oder ihrer zeichen willen also bewandt, dasz sie den Aufgaben ganz unformlich entsprechen: solche nun werden mit dem zeichen ⩱ bemerket.

„So vil eine Aequation *dimensiones* oder vermögen hat, so vil mal mag sie dividiert werden durch ein *binomium* oder *residuum*, bestehende ausz der unbekanten quantitet und der wurzel.

„Die Aequation $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$ kan dividiert werden durch $x - 4 \cdot x - 3 \cdot x - 2 \cdot x + 5$. Ist deszhalben

$$x = \begin{cases} +4 \\ +3 \\ +2 \\ -5 \end{cases}$$ welches man probieren kan."

Weiter wird an den Beispielen 1) $zz - 6z - bb = 0$; 2) $zz + 6z - bb = 0$; 3) $z^3 + 12yzz + 27yyz - 27yyy = 0$ gezeigt, wie man durch Einführung einer neuen Unbekannten ($z - 3 = x$; $z + 3 = x$; $z + 4y = x$) das zweite Glied beseitigen kann. Wie man noch andere Glieder „auszlöschen" oder „die ganze Aequation um einen grad des vermögens deprimieren" könne, solle man bei CARTESIUS und anderen nachlesen, die alles genügend erklärt hätten. Dort finde man auch, wieviel positive und negative Wurzeln eine Gleichung besitze, wie dieselben zu vermehren und zu vermindern „und in widerwertige eigenschaft zu verwandeln" seien, „wie in den unerfüllten Aequationen die lären stellen zuergänzen" seien, „und was ein iede stell in den Aequationen gegen den wurzeln für eine relation habe". Nach diesen Vorbemerkungen wird gezeigt, wie „alle 6 *species* der Algebraischen Arithmetic in den auflösungen gebraucht werden", und nach Anführung des für die rechnende Geometrie wichtigen Pythagoreischen Lehrsatzes und des Satzes von der Proportionalität der Seiten zweier Dreiecke mit beziehungsweise gleichen Winkeln, wird eine grofse Anzahl

von Aufgaben, die teils rein arithmetisch sind, teils der rechnenden Geometrie angehören, eingehend behandelt. Nach dem „Vorbericht" sind diese Aufgaben, soweit sie der Verfasser nicht selbst gebildet hat, aus Vieta, Cartesius, Schooten, Diophant, Clavius u. s. w. entnommen. Von den unbestimmten Aufgaben, die Rahn bringt, hebe ich Diophant II, 26; III, 3 und V, 19 hervor. Bei den Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades verfährt Rahn zuerst „supputatorie", d. h. „es wird durch blosses rechnen die Antwort auf die Aufgaben erforschet". Sodann wird durch „den Stylum delineatorium oder Geometrischen Risz ein geleiches verrichtet." Weiter erörtert Rahn den Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen der einfachen und der halbierten (resp. verdoppelten), sowie der gedrittelten Winkel. Eine grofse Tabelle liefert, wenn 2 von den 7 Gröfsen: Radius, Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, Secans, Cosecans gegeben sind, die Werte der 5 anderen. Nach diesen trigonometrischen Entwicklungen, die zum Teil für die Auflösung von Gleichungen Verwendung finden, wird die Aufgabe behandelt: Wenn die Radien von 3 (einander berührenden) Kreisen gegeben sind, den Radius des 4. Kreises zu berechnen, der die gegebenen berührt.

Den Schlufs des Buches bilden Bemerkungen über die Quadratur des Kreises. Ob dieselbe möglich oder unmöglich sei, läfst der Verfasser „an seinem ohrt gestelt seyn, dann in beyde wege gute gründ beygebracht werden könten".

Was dem Buche ein besonderes Interesse verleiht, ist der Umstand, dafs der erläuternde Text, soweit er sich auf die verschiedenen Verbindungen der in Betracht kommenden Gröfsen oder Gleichungen bezieht, durch gut gewählte Zeichen ersetzt ist. Zu diesem Zwecke hat jede Seite einen dreiteiligen Rand; der innerste Teil enthält die Ordnungszahlen der betrachteten Gröfsen oder Gleichungen, der mittlere die Zeichen, welche die vorzunehmenden Operationen ausdrücken, der äufserste bleibt leer. Diese Einrichtung hat Rahn, wie er im Vorbericht sagt, von einer hohen und sehr gelehrten Person gelernt, die nicht genannt sein wolle. Man nimmt an, es sei dies der englische Mathematiker John Pell[1]) gewesen,

1) John Pell (1610—1685), der Sohn eines Geistlichen, war von 1643—1646 Professor der Mathematik in Amsterdam, übersiedelte dann auf Aufforderung des Prinzen von Oranien nach Breda, wo er bis 1652 blieb. Von 1654 bis 1658 war er politischer Agent Cromwells bei den protestantischen Kantonen der Schweiz. Bei seiner Rückkehr nach England wurde er Geistlicher. Die Liebe zur Mathematik scheint sowohl seinem Fortkommen in der Kirche, wie der Sorge für seine weltlichen Angelegenheiten hinderlich gewesen zu sein. Er geriet in Armut, verbrachte auch einige Zeit im Schuldgefängnis, und die Kosten seiner Beerdigung mufsten von einigen Freunden aufgebracht werden. Seine Lieblingsbeschäftigung ist die unbestimmte Analytik gewesen, über die er auch in Amsterdam Vorlesungen gehalten hat.

mit dem er Veranlassung und Gelegenheit hatte, persönlich zu verkehren.

Was nun die von Rahn angewandten *Zeichen* betrifft, so stimmen mit den jetzt gebrauchten nur das *Gleichheitszeichen* (=), das Zeichen der *Addition* (+) und dasjenige der *Subtraktion* (—) überein, ferner die Zeichen $>$ (gröfser als) und $<$ (kleiner als). Das von dem Engländer Robert Recorde etwa 100 Jahre vorher eingeführte Gleichheitszeichen scheint zu Rahns Zeiten noch nicht allgemein benutzt worden zu sein, da er es (S. 18) für nötig hält, dasselbe dem Leser vorzustellen: „Bey disem anlaasz hab ich das namhafte gleichzeichen = zum ersten gebraucht, bedeutet *ist gleich*, alsz $2a = 4$ heisset $2a$ *ist gleich* 4.“ Das Zeichen der *Multiplikation* ist ✱, ferner bedeutet ✱ × „kreuzweise multipliziert“. Klammern wendet Rahn nicht an, sondern er stellt die Faktoren, auch wenn sie mehrteilig sind, einfach neben einander und setzt dazwischen das Zeichen ✱. Häufig schreibt er bei mehrteiligen Faktoren aber auch den einen unter den andern und setzt daneben und ebenso darunter einen Strich. $\left.\underline{\begin{matrix} ab \\ a+b \end{matrix}}\right|$ bedeutet also, dafs ab mit $a + b$ multipliziert werden soll.

Nach dem Wurzelzeichen setzt er über einen mehrteiligen Radikanden einen horizontalen Strich, er schreibt z. B. $\sqrt{ff + gg}$.

Das Zeichen der *Division* ist $\div$. *Auf eine Potenz erheben*, wofür Rahn *involvieren* sagt, wird durch ⊚ ausgedrückt, und zwar wird die zu potenzierende Gröfse links, der Exponent rechts neben dieses Zeichen gesetzt. Soll also die zweite Gröfse, resp. Gleichung auf die dritte Potenz erhoben werden, so schreibt Rahn auf den mittleren Rand $\dot{2}$ ⊚ 3. Der Punkt über der 2 drückt aus, dafs die zweite Gröfse (Gleichung) potenziert werden soll, nicht die Zahl 2. Das Resultat der Potenzierung, die Potenz, wird ganz wie wir es thun, ausgedrückt. a ⊚ 2 giebt aa (zuweilen schreibt Rahn auch a^2), a ⊚ 3 giebt a^3, u. s. w. Das Zeichen des *Radizierens* (Rahn sagt *evolvieren*) ist ω, dabei kommt der Wurzelexponent rechts vom Zeichen zu stehen. $\dot{5}$ ω 4 bedeutet: Man soll aus der Gröfse (Gleichung) (5) die vierte Wurzel ziehen. Das Wurzelzeichen ist bei Rahn wie bei uns $\sqrt{\ }$. Er schreibt $\sqrt{\ }$, $\sqrt{\ }\sqrt{\ }$, $\sqrt{\ }C$, $\sqrt{\ }CC$ für beziehungsweise $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$. Bei *Proportionen* ist seine Bezeichnung die von Oughtred (1631) eingeführte. Er schreibt also $3 \cdot 5 :: 12 \cdot 20$, wo wir $3 : 5 = 12 : 20$ schreiben. Unser *„folglich“* drückt er auf zwei Arten aus, entweder durch das Zeichen $\therefore$ oder durch ein einfaches (auf den mittleren Rand gesetztes) Komma. Rahn schreibt also zum Beispiel $a = 4. \therefore aa = 16$. Wenn auf dem mittleren Rande $\dot{24}, \dot{3}$ steht, so heifst das: „Aus den Gleichungen (24) und (3) ergiebt sich.“ Steht auf dem

mittleren Rande $\dot{5}$,, so heifst das: „Aus der Gleichung (5) folgt sofo
Wird aus einer Proportion gefolgert, dafs das Produkt der äufseren G
der gleich dem der inneren sei, so steht auf dem mittleren Rand a
wohl die Ordnungszahl der Proportion und daneben, durch ein Kom
getrennt, das Wort: ergò.

Für die quadratische Ergänzung hat Rahn das Zeichen $E\square$.
setzt dasselbe auf den mittleren Rand neben die Ordnungszahl der zu
gänzenden quadratischen Gleichung; daneben im Text steht dann di
Gleichung mit ihrer Ergänzung.

Endlich haben wir noch zu betrachten, wie Rahn *die unbekann Gröfsen* bezeichnet. Er sagt darüber: „Es pflegt der niemal genug
gerühmte Cartesius den bekanten quantiteten die vordern, und den
bekanten die hindern buchstaben des Alphabets zu geben, dasz ich a
bekantes und unbekantes mit grossen und kleinen buchstaben untersche
bedunkt mich um etwas bequemer seyn, dann also können allen fürfal
den quantiteten, nach ordnung der Aufgab und des Alphabets buchs
liche nammen aufgetragen werden, dasz wann man eine Geometrische f
und ihre solution conferiert, leichtlich gemerket wird, in was für e
ordnung der procesz hergegangen seye.“ In den Text-Aufgaben, geom
schen wie algebraischen, bezeichnet Rahn also die Unbekannten der R
nach mit $a, b, c, \ldots$ Sobald eine derselben bestimmt ist, setzt er für
den betreffenden grofsen Buchstaben. Wenn es sich aber um die bl
Auflösung vorgelegter Gleichungen handelt, wendet Rahn wie Carte
für die Unbekannten die letzten Buchstaben des Alphabets an und be
diese Buchstaben auch bei.

Zum besseren Verständnis der Rahnschen Bezeichnungsweise l
ich zwei Beispiele, genau wie er sie giebt, hier folgen:

Aufgab. Drey theilen eine Summ, der erste gibt den andern beyden so vil sie schon haben: der andere gibt den übrigen sovil sie iez haben, das tuht auch der dritte: nach solchem besitzt ieder 8. Wievil hat ieder anfangs gehabt.

		erst	ander	dritt
	1	$a.$	$b.$	$c.$
	2	$a-b-c.$	$2b.$	$2c.$
	3	$2a-2b-2c.$	$-a+3b-c.$	$4c.$
	4	$4a-4b-4c.$	$-2a+6b-2c.$	$-a-b+7c.$ hat

ein ieder nach der letsten theilung.

$\dot{4},$	5	$4a - 4b - 4c = 8$
$\dot{4},$	6	$-2a + 6b - 2c = 8$
$\dot{4},$	7	$-a - b + 7c = 8$
$\dot{5} \div 4$	8	$+a - b - c = 2$
$\dot{6} \div 2$	9	$-a + 3b - c = 4$
$\dot{7} + \dot{8}$	10	$-2b + 6c = 10$
$\dot{8} + \dot{9}$	11	$+2b - 2c = 6$
$\dot{10} + \dot{11}$	12	$4c = 16$
$\dot{12} \div 4$	13	$C = 4$
$\dot{11} \ast 3$	14	$6b - 6c = 18$
$\dot{10} + \dot{14}$	15	$4b = 28$
$\dot{15} \div 4$	16	$B = 7$
$\dot{13} + \dot{16}$	17	$b + c = 11$
$\dot{8} + \dot{17}$	18	$A = 13$
		Hat hiemit der erste 13, der andere 7, und der dritte 4.

Evolution der Cubischen Aequationen.

$z = ?$	1	$z^3 = pz + q$		$(z^3 = 63z + 370$
Es seye	2	$z = t + u$	**Bis hiehar alles geleich**	
$\dot{2}$ ⑨ 3	3	$z^3 = ttt + 3ttu + 3tuu + uuu$		
$\dot{3},$	4	$z^3 = \frac{3tu}{t+u}$ und $ttt + uuu$		
$\dot{4}, \dot{2}$	5	$z^3 = \frac{3tu}{z}$ und $ttt + uuu$		
$\dot{5}, \dot{1}$	6	$pz + q = \frac{3tu}{z}$ und $ttt + uuu$		
$\dot{6},$	7	$\frac{p}{z} = \frac{3tu}{z}$ darum dann		
$\dot{6} - \dot{7}$	8	$q = ttt + uuu$		370
$\dot{7} \div z$	9	$p = 3tu$		63
$\dot{9} \div 3$	10	$\frac{1}{3}p = tu$		21
$\dot{8}$ ⑨ 2	11	$qq = t^6 + 2ttt\ uuu + u^6$		136900

10 ⊚ 3	12	$\frac{1}{27}p^3 = ttt\ uuu$	9261
12 ✱ 4	13	$\frac{4}{27}p^3 = 4ttt\ uuu$	37044
11 − 13	14	$qq - \frac{4}{27}p^3 = t^6 - 2ttt\ uuu + u^6$	99856
14 cu 2	15	$\sqrt{qq - \frac{4}{27}p^3} = ttt - uuu$	316
8 + 15	16	$q + \sqrt{qq - \frac{4}{27}p^3} = 2ttt$	686
16 ÷ 2	17	$\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = ttt$	343
17 cu 3	18	$\sqrt{c \cdot \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = t$	7
8 − 15	19	$q - \sqrt{qq - \frac{4}{27}p^3} = 2uuu$	54
19 ÷ 2	20	$\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = uuu$	27
20 cu 3	21	$\sqrt{c \cdot \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = u$	3
18 + 21	22	$\sqrt{c \cdot \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{c \cdot \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ $(= t + u$ $(= z$	$10 = z$

Hierauss nun erhellet, dass eben die Aequation komt, deren erfindung Cardano, oder Scipioni Ferreo zugemessen, und so sehr erhebt wird.

Were die Aequation also $z^3 = -pz + q$, so wird $t - u$ für z genommen, und komt alszdann

$$\sqrt{c \cdot \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$
$$- \sqrt{c \cdot - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = z.$$

Weren aber in diser Aequation $z^3 = pz + q$ die $\frac{1}{4}qq$ kleiner alsz $\frac{1}{27}p^3$, da findet diser schlag nicht plazz, (alszdann in obigem procesz klar gesehen wird) sondern musz durch ein ander mittel geschehen, wie hernach an seinem ohrt folget.

Ein Exemplar dieses Buches wurde 1662 Thomas Brancker[1]) einem Freunde gegeben, der es gern studiert hätte, aber kein Deı

1) Thomas Brancker (1633—1676), nicht zu verwechseln mit Lord Wı Brouncker, war erst Geistlicher, dann (von 1668 an) Lehrer der Mathematik.

verstand. Der Name dieses Freundes ist in der Vorrede, die der folgenden Darlegung zu Grunde liegt, durch die Buchstaben M. F. T. angedeutet. Es ist also jedenfalls nicht JOHN PELL gewesen.[1]) BRANCKER versprach, eine englische Übersetzung anzufertigen, und sobald er die Zeit dazu fand, korrigierte er die zahlreichen von RAHN in seinem Verzeichnis angegebenen Druckfehler des Originals und fing dann an zu übersetzen. Am 18. Mai 1665 erhielt er die Druckerlaubnis, und das Werk wurde in die Druckerei geschickt. BRANCKER hatte nur viele von RAHN nicht bemerkte Fehler berichtigt, aber weder an den Regeln noch an den Beispielen etwas geändert. Auch die Tabelle der ungeraden Zahlen mit ihren Divisoren sollte genau nach dem Original abgedruckt werden.

Kurze Zeit darauf hörte BRANCKER, in London lebe ein vornehmer Herr, den er gut thue mit seinem Vorhaben bekannt zu machen, bevor er mit dem Druck fortfahre. Als er zu dem Herrn vorgelassen war, fand er, dafs derselbe imstande und auch willens war, ihn zu leiten, soweit seine Zeit es ihm erlaubte. Der Name dieses Herrn ist auf dem Titelblatt der englischen Übersetzung durch die Buchstaben D. P., in der Vorrede durch D. J. P. angedeutet. Er zeigte BRANCKER, wie man die Divisoren-Tabelle anfertigen, prüfen und beliebig fortführen könne, und riet ihm, dieselbe bis 100000 fortzusetzen. Während der Ausrechnung und des Drucks dieser Tabelle wolle er einige Aufgaben RAHNS durchsehen und einige neue bearbeiten. BRANCKER solle es dann frei stehen, diese seine Arbeit zu veröffentlichen oder unveröffentlicht zu lassen.

---

1) Das wird von CANTOR (*Vorlesungen* II², S. 777) und noch von H. KONEN (*Geschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$, Leipzig 1901, S. 33) vorausgesetzt. Die Veranlassung zu diesem Mifsverständnis scheint JOHN WALLIS gegeben zu haben, der jederzeit — wo es nur immer anging — wissenschaftliche Leistungen für Engländer in Anspruch nahm. Da nun RAHN mit PELL verkehrte und, wie er selbst sagte, die Einrichtung des dreifachen Randes einem Manne, der nicht genannt sein wolle, verdankte, so schlofs WALLIS sofort, RAHN habe alle seine Zeichen von PELL erhalten, ja das ganze Buch RAHNS sei von PELL verfafst. So sagt er im 57. Kapitel seiner *Algebra* (*Opera* Vol. II, 1693, p. 234): „Extat tamen ejusdem (PELLII) Tractatus, lingua Germanica primum editus, Tiguri, anno 1659; sub nomine RHONII, qui ejusdem olim fuerat discipulus. Idemque (vel ipsius magna pars) in Anglicanam linguam conversus a THOMA BRANCKER . . .; atque ab ipso PELLIO recognitus et non parum immutatus . . .“ Noch deutlicher drückt er sich in der Arbeit: „Combinationes etc.“ (l. c. p. 510) aus, wo er bei der Betrachtung der aliquoten Teile der Zahlen von der BRANCKERschen Tabelle spricht. Er sagt: „Habetur ad calcem Algebrae D. JOHANNIS PELL (quam ex Germanico sermone in Anglicanum convertit THOMAS BRANKER, non inconsulto ipso PELLIO, ediditque Londini, Anno 1668) Tabella compendiaria . . .“. Das Vertrauen auf die Zuverlässigkeit des WALLIS hat auch G. VACCA (*Sui precursori della logica matematica*; Revue de mathématiques **6**, 1899, 122—123) zu der Äufserung bewogen, PELLS Buch sei in erster Auflage deutsch, in zweiter englisch erschienen.

Die Tabelle war gedruckt, auch waren 12 Bogen der Übersetzung fertig gestellt, als Brancker die versprochenen Änderungen erhielt. Dieselben beginnen auf S. 100 und gehen weiter bis zum Schlufs des Werks, welches — abgesehen von den 50 besonders paginierten Seiten der ans Ende des Buches gestellten Divisoren-Tabelle — 198 Seiten enthält. Schon vorher sind 4 von D. J. P. gelieferte Seiten (79—82) vorhanden, welche Aufgaben aus der rechnenden Geometrie geben. Von der deutschen Ausgabe sind die letzten 8 Bogen (64 Seiten) unübersetzt geblieben. Wieviel statt dieses Restes später noch veröffentlicht werden würde, will Brancker noch nicht sagen; das hänge davon ab, ob er am Leben und gesund bleiben werde, auch von der Aufnahme, die sein Buch bei den Freunden mathematischer Studien finden würde.[1])

Man nimmt allgemein an, der Verfasser der Zusätze zu Rahns Algebra sei John Pell gewesen. Diese Annahme findet eine Bestätigung in den Buchstaben D. J. P., die sich *Dominus Ioannes Pellius* lesen lassen. Bei der bekannten Vorliebe Pells für die unbestimmte Analytik erklärt sie auch den Umstand, dafs die Zusätze, von denen unten eingehend die Rede sein wird, sämtlich entweder aus unbestimmten Aufgaben bestehen oder die Vervollständigung der Lösungen solcher Aufgaben zum Gegenstand haben. Eigentümlich bleibt freilich die Ehrerbietung, mit welcher Brancker[2]) sich dem Verfasser der Zusätze nähert, falls dieser kein Höherer als Pell gewesen ist. Denn im Grunde war Brancker seinem Amtsbruder Pell — seitdem dessen Gönner Cromwell (1658) gestorben war — gesellschaftlich gleichstehend.

Die Schwierigkeit, die darin liegt, Branckers grofsen Respekt vor Pell zu erklären, genügt freilich nicht, die Annahme, dafs Pell die Zusätze geschrieben habe, zu entkräften.[3]) Ebensowenig wird dieselbe durch

---

1) Es ist nichts davon bekannt, dafs Brancker eine Forsetzung seines Werkes geliefert habe; die Übersetzung der Rahnschen Algebra ist also auch unvollständig geblieben.

2) Von übergrofser Höflichkeit scheint Brancker sonst nicht gewesen zu sein. Wenn jemand wissen wolle, sagt er in der Vorrede, worin er bei seiner Übersetzung von dem Original abgewichen sei, und weshalb er diese Änderungen vorgenommen habe, so möge er die Übersetzung mit dem Original vergleichen. Ein Exemplar des letzteren sei in Frankfurt a. M. zu kaufen.

3) Diese Annahme wird zur *völligen Gewifsheit* erhoben durch einen eigenhändigen Brief Rahns an Pell. Der Brief, von dem ich durch die Freundlichkeit des Herrn G. Vacca Kenntnis erhalten habe, als meine Arbeit schon in der Druckerei war, ist dem im British Museum befindlichen Exemplar des Branckerschen Buches beigelegt. Herr Vacca schreibt mir, dafs dieses Exemplar im Besitze Pells gewesen und von demselben an mehreren Stellen mit Randbemerkungen versehen ist. Der Anfang des Briefes lautet: „Vir celeberrime. A studioso quodam algebram non

die Erwägung umgestofsen, dafs PELL gerade in diesem Falle die Geheimhaltung seines Namens verlangt haben sollte, während er doch in wissenschaftlichen Streitfragen — ich erinnere an seinen Streit mit LONGOMONTANUS über die Quadratur des Kreises — ganz offen hervorgetreten ist. Oder hat er vielleicht selbst seine Zusätze nicht für sehr wertvoll gehalten? Dieselben sind nämlich nicht im stande, eine besonders günstige Meinung über ihren Verfasser zu erwecken, und es ist auffallend, dafs BRANCKER, der doch von seinen Zeitgenossen für einen tüchtigen Mathematiker gehalten wurde, sie überhaupt aufgenommen, es nicht vielmehr vorgezogen hat, statt derselben eine Übersetzung auch des letzten Teils des Originals zu geben.

Die Zusätze bestehen, wie schon oben bemerkt worden ist, 1) in der Vervollständigung der von RAHN gegebenen Lösungen einiger Aufgaben und 2) in neu hinzugefügten Aufgaben. RAHN hat nämlich in der Regel die Lösung nur bis zur Bewältigung der Hauptschwierigkeit fortgeführt, die leichten Schlufsrechnungen dem Leser überlassend. PELL[1]) giebt die Lösung bis ans allerletzte Ende, stellt dann die Antworten noch besonders zusammen und läfst sogar die vollständig durchgeführten Proben nicht fort. Die erste von PELL ergänzte Aufgabe RAHNS (S. 110, bei BRANCKER S. 100): „Zwo Zahlen finden, dasz das quadrat ihrer summ, iede darvon abgezogen, ein quadrat hinterlasse" nimmt im Original nicht ganz eine Seite ein, in der englischen Übersetzung mehr als zwei Seiten. Freilich schliefst RAHN, der die beiden unbekannten Zahlen als Funktionen einer dritten Zahl d ausgedrückt hat, nachdem d bestimmt worden ist, mit den Worten: „Hiemit ist alles durch D expliciert, darum können alle unbekante quantiteten hierausz erklärt, und namhaft gemachet werden." PELL dagegen füllt noch mehr als eine Druckseite mit den leichtesten Rechnungen aus, die wirklich nicht den Platz verdienen, den sie einnehmen. Der von DIOPHANT V, 19 behandelten Aufgabe: „Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermindert wird, einen Kubus giebt", widmet RAHN $4\frac{1}{2}$, PELL

---

amplius meam sed multis nominibus tuam, mihi ex munificentia tua transmissam accepi, unde colligo, tot annorum decursu, memoriam mei adhuc apud te vigere . . .

Tiguri d. 17 aprilis 1675. HENR. RHONIUS
Tig. Senator, Quaestor et
rerum criminalium praeses.

PELL hat am Rande hinzugefügt: „Received this letter mai XI 1675."

1) Bei seinem Interesse für die unbestimmte Analytik ist es eigentlich kaum begreiflich, dafs PELL den 1657 von FERMAT den englischen Mathematikern hingeworfenen Fehdehandschuh nicht aufgenommen hat. Sollte er in der Schweiz von dieser Herausforderung gar nichts gehört haben?

21 Druckseiten. Die Aufgabe: „Gleichschenklige Dreiecke (in ganzen Zahlen) von gleichem Umfang und gleicher Fläche zu finden" füllt bei Rahn 8, bei Pell (mit allen Anhängseln) 62 Seiten. Der Jesuit Jacobus de Billy erledigt sie in seinem *Diophantus redivivus* I, p. 140 auf 2 kleinen Seiten. Zuweilen ist allerdings Pells Vervollständigung der Lösung als eine wirkliche Verbesserung anzusehen. So führt Rahn (S. 88) die Lösung der Aufgabe: „Ausz drey gegebenen seiten eines obliquangulischen Triangels sein aream und senkel zufinden" nur so weit fort, bis er die Projektion einer Seite auf eine andere gefunden hat, und sagt dann: „Hierausz ist die senkellini und area gar leichtlich zuschliefsen." Pell (S. 79) arbeitet weiter, bis er die Heronische Formel hergeleitet hat.

Hinzugefügt hat Pell u. a. die folgenden Aufgaben:

1) Ein rechtwinkliges Dreieck (in rationalen Zahlen) zu finden, dessen eine Kathete das Quadrat der anderen sei (S. 80). Dieselbe Aufgabe löst Diophant VI, 25.

2) Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat ihrer Summe bei Subtraktion einer jeden der Zahlen ein Quadrat als Rest gebe (S. 102). Für 2 Zahlen ist die Aufgabe (= Diophant II, 26) von Rahn S. 110, von Pell S. 100 behandelt. (s. o.)

3) Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs der Kubus ihrer Summe bei Addition jeder der Zahlen ein Kubus bleibe (S. 105). Dieselbe Aufgabe behandelt Diophant V, 18. Pell widmet ihr zwar 5 Seiten, giebt aber auch nur dieselbe singuläre Lösung wie Diophant, ohne eine allgemeine Bemerkung daran zu knüpfen.

In den *Bezeichnungen* hat sich Brancker ganz nach Rahn gerichtet; nur hat er die Punkte über den Ordnungszahlen der Gröfsen resp. Gleichungen weggelassen. Die *Figuren* zu den geometrischen Aufgaben sind in der englischen Übersetzung auf einem Blatt vereinigt, während bei Rahn jede Figur da, wo sie gebraucht wird, in den Text gedruckt ist; auch hat Rahn zur Bequemlichkeit des Lesers eine und dieselbe Figur nötigenfalls mehrmals gegeben.

Der Titel der englischen Übersetzung ist:

> *An Introduction* | to | *Algebra*, Translated out of the *High-Dutch* into *English*, | By Thomas Brancker. M. A. | Much Altered and Augmented by D. P. | Also | A Table of Odd Numbers less than One Hundred Thousand, Shewing | Those that are *Incomposit*, | And | Resolving the rest into their Factors | or Coefficients, &c. | Supputated by the same Tho. Brancker. | London, Printed by W. G. for Moses Pitt at the White-Hart in Little Britain. 1668. |

Das Buch[1]) ist — wie das Original — ein Quartband und umfaſst 198 Seiten. Die Zusätze PELLS endigen auf S. 192 mit der Erklärung, der Verfasser sei durch andere Angelegenheiten gezwungen, hier abzubrechen („Other affairs constrain me to break off and here to make an end"). Es folgen dann noch S. 193—198 Bemerkungen über die Herstellung, die Einrichtung und den Gebrauch der mehrfach erwähnten Tabelle der ungeraden Zahlen unter 100000 mit ihren kleinsten Divisoren, ferner die Produkte aller unter $\sqrt{100000} \sim 316$ liegenden Primzahlen mit den Zahlen 2 bis 9, endlich ein Verzeichnis der in der Tabelle trotz aller Sorgfalt stehen gebliebenen Druckfehler. Den Schluſs bildet die Tabelle selbst, welche 50 besonders paginierte Seiten umfaſst.

BRANCKERS Übersetzung der RAHNschen Algebra hat für die Geschichte der Mathematik noch ein besonderes Interesse. Bekanntlich wird die unbestimmte Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$, zu deren Lösung in ganzen Zahlen FERMAT 1657 die englischen Mathematiker herausgefordert hatte, nach PELL benannt, obwohl die erste veröffentlichte Lösung die von WALLIS und Lord BROUNCKER gemeinschaftlich gefundene und von einem Verdienste PELLS um die Gleichung nichts bekannt geworden ist. Man nimmt allgemein[2]) an, diese falsche Benennung sei dadurch veranlaſst, daſs unter PELLS Zusätzen zu BRANCKERS Übersetzung der RAHNschen Algebra sich auch eine Wiederholung der WALLIS-BROUNCKERschen Lösung jener Gleichung ohne Angabe der Erfinder befinde, und daſs EULER und nach ihm andere PELL selbst für den Erfinder genommen hätten. KONEN macht jedoch in seiner oben angeführten Schrift darauf aufmerksam, daſs das Exemplar der BRANCKERschen Übersetzung, welches sich in der Universitätsbibliothek zu Göttingen befindet, die Lösung der Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$ nicht enthält. Mir ist es trotz aller Bemühungen[3]) nicht

1) Herr G. ENESTRÖM hat die Güte gehabt, mich auf die Anzeige des BRANCKERschen Buches in den Philosophical Transactions (Vol. III, 1668, S. 688—690) aufmerksam zu machen. In dieser Anzeige wird nach Angaben über die Darstellungsweise und den Inhalt des Buches mitgeteilt, welche Teile des Originals BRANCKER unübersetzt gelassen habe. Auch wird die Hoffnung ausgesprochen, die in der Vorrede erwähnte Person — der Name wird nicht genannt — werde bald über diese nicht übersetzten und andere die Gleichungen betreffende Gegenstände schreiben. Wenn es weiter in Betreff der Tabelle der ungeraden Zahlen heiſst, die bisherigen Tabellen gingen nicht über 10000 hinaus, so ist das ein Irrtum, da sich RAHNS Tabelle bis 24000 erstreckt.

2) HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, S. 203. Danach CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II², S. 777. Encyclopaedia britannica, Bd. 18 (1885) unter PELL etc. etc.

3) Um andere, die sich für die Sache interessieren, von unnützen Schritten abzuhalten, bemerke ich, daſs die Königl. Bibliothek in Berlin, sowie die Universitäts-

gelungen, ein anderes Exemplar als das Göttinger, für dessen Nachweis ich Herrn G. Eneström zu Danke verpflichtet bin, einzusehen. Dasselbe ist unzweifelhaft vollständig, aber die sogenannte „Pellsche Gleichung" wird darin nicht einmal erwähnt. Die Frage nach dem Ursprung dieser falschen Benennung bleibt also eine offene und mufs hier unerörtert bleiben, da Konen alles gesagt hat, was sich gegenwärtig darüber sagen läfst, freilich ohne zu einer befriedigenden Antwort zu gelangen. Hoffentlich übernimmt es ein Fachgenosse jenseit des Kanals, die Sache baldigst aufzuklären.

bibliotheken in Leipzig, Erlangen, Tübingen, Zürich und Cambridge das Buch nicht haben. Das Originalwerk von Rahn besitze ich selbst.

Pseudo-versiera e Quadratice geometrica.

Di Gino Loria a Genova.

A complemento di quanto esposi nella mia nota *Versiera, visiera e pseudo-versiera* (Biblioth. Mathem. 1897, p. 7—12 e 33—34) mi permetto di aggiungere quì alcune osservazioni.

La curva che io ho chiamata *pseudo-versiera* venne utilizzata da Leibniz a stabilire sua celebre formola

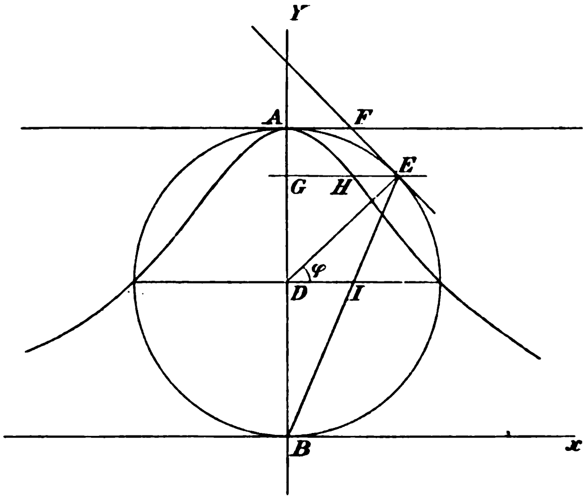
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots;$$

ciò valse ad attrarre sopra quella curva l' attenzione di Huygens il quale, addì 7 Novembre 1674, scriveva al suo antico discepolo: «Pour ce qui est de la courbe Anonyme, qui sert à Votre demonstration, j'avois envie de la baptizer en lui donnant quelque nom composé des noms des deux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite, qui sont le cercle et la Cissoide des anciens. Mais ayant vu depuis que cette mesme ligne a esté premièrement mis en avant par J. Gregorius, je crois qu'il lui faut laisser le droit de la nommer comme il voudra» (Leibniz, *Mathematische Schriften* ed. Gerhardt, T. II, p. 16, oppure *Oeuvres complètes de* C. Huygens, T. VIII, p. 393).

J. Gregory — a cui quindi deve, sino a prova in contrario[1]), farsi risalire l' invenzione della linea in questione — non sembra avere usato del diritto che gli veniva così esplicitamente riconosciuto. Ciò non ostante, prima che si spegnesse il Sec. XVII, quella curva riceveva il nome di *quadratrice geometrica*, suggerito dall' applicazione che

1) Siffatta prova *sembra* esistere. Infatti gli editori delle opere di Huygens, nella nota 4) a pag. 394 del T. VII, asseriscono che lo scritto del Gregory a cui si riferisce Leibniz è quello intitolato *Exercitationes geometricae* a Jacobo Gregorio (Londini M · DC · LXVIII). Ora l' unico articolo di quest' opera a cui essi potevano alludere è quello intitolato Quadratura cissoidis; ma ivi è adoperata, come linea ausiliare, *non la pseudo-versiera, ma la versiera*; per conseguenza *o* l' opera a cui pensava Huygens non è quella indicata, *oppure* (ciò che sembra più verosimile) il sommo geometra olandese ha confuse due curve fra loro differenti.

essa riceve al problema della quadratura del circolo. Lo propose l' OZANAM nella sua *Géométrie pratique* (Paris 1684), opera a cui egli si riferì più tardi nel suo *Dictionnaire mathématique* (Amsterdam 1691, p. 108); lo ripetè poi nel suo *Cours de mathématiques*, la cui prima edizione porta la data 1693 e di cui io ho sott' occhio la „nouvelle édition revue et corrigée". Nel «Tome troisième, qui contient la géométrie» (Paris 1699) è indicata (p. 111) di quella curva la generazione seguente: «Dato un circolo di diametro $AB = 2a$, se ne consideri un punto qualunqua E; si conduca



EG perpendicolare ad AB e si determini l' intersezione F delle tangenti al dato circolo in A e E; finalmente si porti, sopra GE, $GH = AF$; il luogo del punto H è una quadratrice geometrica». Notisi che se I è il punto d' intersezione della retta BE con la perpendicolare condotta al diametro AB dal centro D del circolo, risulta $AF = DI$, donde una semplificazione alla costruzione precedente, ed un metodo semplicissimo per ottenere la rappresentazione analitica delle curva. Pongasi infatti ang $ADE = \frac{\pi}{2} - \varphi$, sarà ang $DBI = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ e quindi

$$DI = a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = a \frac{\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi}.$$

D' altronde

$$BG = a + a \operatorname{sen}\varphi.$$

Presa quindi B per origine e BA per asse delle y di un sistema cartesiano ortogonale, per rappresentare la curva si possono adoperare le equazioni seguenti:

$$x = a \frac{\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi}, \qquad y = a\,(1 + \operatorname{sen}\varphi).$$

Eliminando φ si ottiene

$$y = \frac{2a^3}{x^2 + a^2} \qquad \text{ossia} \qquad x^2 y = a^2 (2a - y),$$

che non differisce dall' equazione (6) della pseudo-versiera data a pg. 11 del mio articolo citato.

L' area compresa tra la quadratrice geometrica e l' asse delle x è data da

$$(1) \qquad 2\int_0^\infty \frac{2a^3\,dx}{x^2 + a^2} = 2 \cdot \pi a^2,$$

donde emerge che il problema di determinare quell' area coincide con quello di quadrare il cerchio. Che poi col mezzo di essa si possa ottenere una «quadratura arithmetica» nel senso di LEIBNIZ, si rende palese con l' osservazioni seguenti.

α) Se $x < a$ si ha

$$\frac{2a^3}{x^2 + a^2} = 2a\left\{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^4 - \cdots\right\}$$

$$\int \frac{2a^3\,dx}{x^2 + a^2} = 2a^2\left\{\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{a}\right)^5 - \cdots\right\}$$

$$(2) \qquad \int_0^a \frac{2a^3\,dx}{x^2 + a^2} = 2a^2\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right\}$$

β) Se $x > a$ si ha in vero:

$$\frac{2a^3}{x^2 + a^2} = 2a - \frac{2ax^2}{x^2 + a^2} = 2a - 2a\left\{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^4 - \cdots\right\} =$$

$$= 2a\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{x}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$\int \frac{2a^3\,dx}{x^2 + a^2} = 2a^2\left\{-\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3 - \cdots\right\}$$

$$(3) \qquad \int_a^\infty \frac{2a^3\,dx}{x^2 + a^2} = 2a^2\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right\}$$

Dalle (2) e (3) si deduce:

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{2a^3\,dx}{x^2 + a^2} = 4a^2\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right\},$$

relazione che, paragonata alla (1) riconduce alla formola di LEIBNIZ, ricordata in principio.

È strano che la quadratrice geometrica sia stata ben tosto completa-

mente dimenticata. L' *Encyclopédie méthodique* non ne fa menzione, ed il MONTFERRIER, nel suo *Dictionnaire des sciences mathématiques* si esprime (T. II, Bruxelles 1838, p. 390) in modo da mostrare che egli ritiene essere trascendenti tutte le quadratrici. Nemmeno le preziose *Notes de bibliographie des courbes géométriques* del BROCARD fanno menzione delle curva di GREGORY-OZANAM. Fa eccezione soltanto il P. CARACCIOLI, il quale nel suo *De lineis curvis liber* (Pisis 1740, p. 127 e seg.) ne fece uno studio accurato: gli è anzi questa operetta, modesta e dimenticata, che mi rivelò l' esistenza della quadratrice geometrica e mi spinse a fare la piccola ricerca storica di cui feci ora conoscere i risultati.

Genova, 5 Luglio 1901.

Über einen anscheinenden Defekt im sechsten Band von Boncompagnis „Bullettino".

Von G. Valentin in Berlin.

In der Anfrage **69** (Biblioth. Mathem. 1898, 64) hat Herr Steinschneider darauf hingewiesen, daſs in einigen Exemplaren des 6. Bandes des Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. die Seiten 151 und 152 fehlen und über den Grund dieses Defektes um Auskunft ersucht. Im Folgenden werde ich diese Frage erledigen.

Vom Märzheft des genannten Bandes existieren zwei Ausgaben, welche sich nur durch den Schluſsartikel, einen Aufsatz Boncompagnis über eine Anzahl von Briefen Lagranges in italienischer Sprache, unterscheiden.

In der ersten Ausgabe ist der Titel dieser Arbeit: *Intorno a nove lettere in lingua Italiana di Giuseppe Luigi Lagrange* und umfaſst die Seiten 142—150; in der zweiten Ausgabe ist in dem Titel das Wort „nove" durch „dieci" ersetzt und hier umfaſst der Aufsatz die Seiten 142—152.

Beide Titel entsprechen in der That dem Inhalte des Artikels, denn in der zweiten Ausgabe ist noch ein 10. italienisch geschriebener Brief Lagranges besprochen, der als no. 3 zwischen die Briefe 2 und 3 der ersten Ausgabe eingeschaltet ist. Ich setze die Einschaltung hierher für alle, welche nur die erste Ausgabe besitzen, lasse jedoch der Kürze wegen, die dazu gehörigen Anmerkungen (1) (2) (3) (1) (2) (3) (4) fort:

(pag. 147) Lettera in data di „Berlino 5 Luglio 1776" diretta al Padre Odoardo Gherli Domenicano, nato in Guastalla nel 1730 (1), e morto in Parma ai 6 di gennaio del 1780 (2).

Questa lettera è stampata nel volume intitolato „Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure del Padre Odoardo Gherli Domenicano membro dell' Accademia dell' Instituto di Bologna, e Professore di Teologia Dogmatica nell' Università di Modena. Resi pubblici da Domenico Pollera. Tomo VII in Modena 1777. Presso la società tipografica. Con licenza de' superiori" (pag. XII, lin. 12—37; pag. XIII, lin. 1—15) (3). Due brani di questa lettera furono anche riportati nel volume intitolato

„Continuazione del Nuovo giornale de' letterati d' Italia. Tom. XIII i Modena 1778. Presso la società tipo- (pag. 148:) grafica. Con licenz de' superiori“ (pag. 253, lin. 8—21, articolo XI). La lettera medesima citata da Cavaliere Abate GIROLAMO TIRABOSCHI (1), da ch.^mi Sigg^i Professor GEMINIANO RICCARDI (2), e PIETRO RICCARDI (3), ed in vari dizionari (4

Aufser dieser Einschaltung hat BONCOMPAGNI nur einige wenig nicht wesentliche Veränderungen vorgenommen; so ist die zweite Ausgab um zwei Seiten länger geworden. Es ist nun ganz klar, dafs BONCOM PAGNI während des Druckes des Artikels auf diesen 10. Brief aufmerksar geworden oder gemacht worden ist, und die Änderungen noch schleunigs nachdem schon eine Anzahl von Heften gedruckt und versandt worde waren, vorgenommen hat. Dies geht aus zweierlei hervor: 1) das Apri heft beginnt in beiden Ausgaben mit pag. 153, schliefst sich also in de Seitenzählung dem Märzheft der zweiten Ausgabe an; 2) auf Seite 53 —543 desselben 6. Bandes bringt BONCOMPAGNI:

> Giunte e correzioni allo scritto intitolato „Intorno a dieci lette in lingua Italiana di GIUSEPPE LUIGI LAGRANGE (Bullettino ec Tomo VI ecc. pag. 142—152 Marzo 1873).“

Hier spricht er von „dieci“ (und nicht „nove“) lettere, er giebt selb die Seitenzahlen 142—152 an, und die Giunte e correzione zu den ang gebenen Seiten und Zeilen stimmen mit den Seiten und Zeilen des Haup artikels der zweiten Ausgabe überein, nicht aber mit denen der ersten.

Aufserdem kann man noch ein drittes Argument als Beweis anführe auf der letzten Seite des Umschlages findet man auch in der zweit Ausgabe:

> Intorno a nove lettere in lingua Italiana di Giuseppe Luigi Lagrange (B. Boncompagni) 142.

Im Vol. 6 des Bullettino mit der 1. Ausgabe des Märzheftes fehl demnach die Seiten 151 und 152, das Inhaltsverzeichnis des Umschlag stimmt mit dem Titel des Aufsatzes überein, dagegen stimmt der Tit der „Giunte e correzioni“ und die Seiten und Zeilen mit dem Haup artikel nicht überein, während in dem 6. Bande mit der 2. Ausgabe d Märzheftes alle Angaben bis auf die Inhaltsanzeige des Umschlages üb einstimmen.

BONCOMPAGNI mufs wie gesagt, die Änderung erst so spät vo genommen haben, dafs schon ein Theil der Hefte versandt war: in Ber auf der Königl. Bibliothek und auf der Universitäts-Bibliothek befind sich z. B. die 1. Ausgabe, auf den Universitäts-Bibliotheken von Bon Göttingen und Königsberg dagegen die 2. Ausgabe.

Über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

Die Anregungen des Herr Stäckel über diese Frage in der Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 133—138 sind sehr dankenswert, da mit dem Mangel einheitlicher Abkürzungen der Zeitschriften in der That große Übelstände verbunden sind. Doch wäre ich nicht für unbedingte Gleichmacherei, da mir ein doppeltes Bedürfnis vorzuliegen scheint.

Auf der einen Seite handelt es sich um Sammelwerke, in welchen Citate in großer Häufigkeit immer wiederkehren, welche sich eines begrenzten Stabs von Mitarbeitern erfreuen und welche in der Lage wären, ihrer ersten Lieferung einen Schlüssel der Abkürzungen von Zeitschriftennamen vorausgehen zu lassen. Hierher gehören: die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, die *Synopsis der höheren Mathematik* von Hagen, das *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, der *Catalogue of scientific papers* der „Royal Society of London“ und endlich Poggendorfs *Biographisch-litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften* (vielleicht auch noch Pascals *Repertorium der höheren Mathematik* und Laskas *Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik*).[1] Für alle diese Werke kann man den Grundsatz aufstellen, daß der Leser nicht notwendig im stande sein muß, aus der Abkürzung die gemeinte Zeitschrift unmittelbar zu erschließen, da ihm hierzu ja der Schlüssel zu Gebote steht. Die Abkürzungen können also so kurz als nur möglich sein, und darum sehe ich keinen Grund ein, weshalb man nicht für derartige Sammelwerke ein System wählen sollte, ähnlich dem im *Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques* eingeführten, bei welchem die Abkürzungen aus bloßen Buchstabengruppen bestehen. Insbesondere bei der *Encyklopädie*, die so sehr auf möglichste Raumausnützung bedacht sein muß, wäre es namentlich für die franzö-

1) Die Revue semestrielle des publications mathématiques und das Bulletin des sciences mathématiques bedürfen keiner Abkürzungen, da sie die Zeitschriften reihenweise ausziehen.

sische Ausgabe, von grofsem Vorteil gewesen, direkt das in den romanischen Ländern schon allgemein bekannte französische System anzunehmen. Vielleicht hätte sich alsdann der Raum ersparen lassen, um die zitierten Programme und Dissertationen mit dem vollen Titel angeben zu können; die Angabe von Verfasser, Druckort und Druckjahr genügt zwar zur Identifizierung, doch wäre, um die Arbeiten von einer Bibliothek beziehen zu können, die Angabe des Titels sehr erwünscht. Was das französische Abkürzungssystem betrifft, so scheint es freilich auf den ersten Blick recht schwierig, die Buchstabengruppen zu entziffern und im Gedächtnis zu behalten. Macht man aber trotzdem einen Versuch, so findet man bald, dafs man sich die häufiger vorkommenden Abkürzungen sehr bald merkt, während man es nicht schwer nimmt, hinsichtlich seltener gelegentlich den Index konsultieren zu müssen. Dafs das Verzeichnis des Index an Vollständigkeit sehr viel zu wünschen übrig läfst, dafs die Abkürzungen bisweilen mit mehr Umsicht und Konsequenz hätten ausgedacht werden sollen, dafs geradezu Verwechslungen vorgekommen sind (z. B. zwischen A. T. und F. T.), will ich gar nicht leugnen. Aber die Abkürzungen sind einmal da und weit verbreitet, und es würde nur Verwirrung anrichten, wollte man sie wieder umstofsen und durch andere ähnliche ersetzen. Um nun auch die deutschen Mathematiker mit diesem System bekannt zu machen, und sie womöglich für dasselbe zu gewinnen, habe ich mich, nachdem ich im Privatgebrauch geradezu ausgezeichnete Erfahrungen mit demselben gemacht hatte, entschlossen, es bei meinen halbjährlichen Abhandlungsregistern über angewandte Mathematik in der Zeitschrift für Mathematik und Physik zur Anwendung zu bringen. Obgleich ich jedem Register einen Schlüssel von über 200 Zeitschriften vorhergehen lassen mufs, habe ich doch noch eine bedeutende Raumersparnis erzielt, und zugleich die Möglichkeit, den Lesern die vollen Titel der Zeitschriften samt Druckorten zur Kenntnis zu bringen. Bei den zahlreich notwendig gewordenen Neubildungen von Abkürzungen habe ich mich dem Geiste des französischen Index möglichst anzupassen gesucht, und wäre den Anhängern des genannten Systems sehr dankbar, wenn sie auch meine Abkürzungen annehmen würden.

Ein ganz anderes Bedürfnis liegt nun vor bei Lehrbüchern, Dissertationen, Programmen und anderen selbständigen Schriften, sowie bei den gewöhnlichen Zeit- und Gesellschaftsschriften. Auf diese möchte ich die Ausführung des Herrn Stäckel in erster Linie beziehen, und in diesem Sinne möchte ich demselben im wesentlichen zustimmen. Da der Leser hier nicht im Besitz eines Schlüssels ist, müssen die Abkürzungen so beschaffen sein, dafs mit ihrer Hilfe die Identifizierung der betreffenden Zeitschrift auch dem weniger geübten Leser unzweifelhaft möglich sein

aufs. Da es leider sehr viele Zeitschriften mit sehr ähnlich klingenden Namen giebt, so liegt es umgekehrt nahe, aus einer wenn auch unwesentlichen Verschiedenheit der Abkürzung auf Verschiedenheit der gemeinten Zeitschriften zu schliefsen. Deshalb ist die Buntscheckigkeit in der Bezeichnung einer Zeitschrift als irreführend zu verwerfen[1]) und die Einführung einheitlicher Bezeichnungen ein unabweisbares Bedürfnis. Die Vorschläge des Herrn STÄCKEL würden uns diesem Ziele unstreitig näher bringen. Was dieselben im einzelnen betrifft, so ist der Forderung, dafs der (ewig wechselnde) Name des Herausgebers nicht verwendet werden soll, zuzustimmen, mit einer einzigen Ausnahme. Es giebt nämlich bisweilen zwei Zeitschriften mit völlig gleichlautendem Titel und da sollte bei der *weniger wichtigen* der Name des *Begründers* zur Unterscheidung beigefügt werden. So würde also Bull. des sc. math., die von DARBOUX herausgegebene Zeitschrift bedeuten, mit dem Zusatze: FÉRUSSAC aber die ältere gleichnamige des Baron FÉRUSSAC. Journ. de math. élém. bezieht sich auf die Zeitschrift des Herrn DE LONGCHAMPS, derjenigen des Herrn VUIBERT müfste dieser Name beigefügt werden. Unter den drei „Analyst“ heifsenden Zeitschriften dürfte die in Des Moines 1874—1883 erschienene am bekanntesten sein. Die Jahreszahl, die zu jedem ordentlichen Zitat gehört, wird in den meisten Fällen zur Unterscheidung ausreichen, nur beim Journ. de math. élém., wo die korrespondierenden Bände beider Zeitschriften nur um ein Jahr differieren, sollte man sich hierauf nicht verlassen. Die festen Abkürzungen einzelner Worte haben ganz meinen Beifall, nur darf man „Commentarii“ nicht immer mit „Comm.“ abkürzen, da es bei der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aufser „Commentarii“ auch „Commentationes“ giebt. Gegen die Verweisung der Ortsnamen an das Ende der Abkürzung habe ich an sich nichts einzuwenden; dagegen mufs ich mich sehr dagegen verwahren, dafs das Hauptwort immer als das mafsgebende *Stichwort* angesehen werden soll. Ganz richtig ist dieser Grundsatz bei wirklichen Zeitschriften[2]); sehr unpraktisch aber — und zwar selbst wenn grofse Bibliotheken so verfahren — bei Akademie- und Gesellschaftschriften; denn erstens werden dadurch die verschiedenen Publikationen einer einzelnen Akademie oder Gesellschaft über den ganzen Katalog zerstreut, anstatt dafs sie beisammen stehen, und zweitens wird die Aufsuchung in hohem Grade erschwert, weil man gewöhnlich nicht im Kopfe hat, ob die Publikationen einer bestimmten Gesellschaft gerade „Abhandlungen“ oder

1) Es kann ja vorkommen, dafs ein Leser eine ihm zugängliche Zeitschrift nicht konsultieren kann, weil er sie unter einer ungewohnten Abkürzung nicht erkennt!

2) Die Voranstellung des Ortsnamens in diesem Falle, wie sie z. B. im *Catal. of scient. papers* beliebt ist, verwerfe ich mit Herrn STÄCKEL unbedingt.

„Berichte" oder „Mitteilungen" oder „Schriften" oder „Sitzungsberichte" oder „Verhandlungen" oder noch anders heifsen und diese Bezeichnungen leider auch noch oft genug wechseln. Eine Ausnahme wird man allerdings machen müssen, wenn die Gesellschaft keinen festen Sitz hat. In diesem Fall tritt vielleicht am besten der Landesname, der im Zeitschriftentitel in diesem Fall meistens vorkommt, als Stichwort ein. Die Königl. Landesbibliothek Stuttgart führt z. B. die Memorie della società italiana, detta dei XL mit Recht unter „Italia" auf. Für die Serien ziehe ich auch die von Herrn Stäckel gebilligte Bezeichnung durch vorausgeschickte Zahlen in Klammern der Bezeichnung durch Indices vor, da dieselbe wegen der Kleinheit dieser Indices leicht zu Irrtümern und Druckfehlern führt. Ich kann bei dieser Gelegenheit nicht die Bemerkung unterdrücken, dafs das oft wiederholte grundlose und inkonsequente Beginnen neuer Serien von seiten mancher Zeit- und Gesellschaftsschriften nicht nur für den Bibliographen sehr lästig, sondern auch wegen der Schwierigkeit gerade die richtige Serie auf den Bibliotheken zu bekommen, auch für den Leser eine Quelle vielen Ärgers ist. Gerechtfertigt ist der Beginn einer neuen Serie nur dann, wenn eine Zeitschrift ein zeitlang zu erscheinen aufgehört hatte, oder wenn eine wesentliche Änderung in den Umständen der Zeitschrift (worunter aber der Wechsel des Herausgebers nicht unbedingt zu zählen ist) eingetreten ist.

Eine kritische Äufserung möglichst zahlreicher Fachgenossen zu Herrn Stäckels und meinen Vorschlägen ist sehr erwünscht und führt am besten zu der auf diesem Gebiet so notwendigen Einigkeit.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die **erste** (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.
BM = Bibliotheca Mathematica.

1 : 12, 22, 29, 34, siehe BM 1_3, 1900, S. 265—266.

---

1 : 36 (Anm. 1) lies 1882 statt 1892.

---

1 : 64. Nach Brugsch, *Steininschrift und Bibelwort* (Berlin 1891) ist das in den Inschriften nicht erwähnte Seil auf den bildlichen Darstellungen ersichtlich. Es heifst dort (2. Aufl., S. 36): „In allen Darstellungen, welche dem Beschauer das Fest der Grundsteinlegung eines Tempels vor Augen führen, tritt die Göttin Chawi neben dem Pharao auf. Sie spannt den Mefsstrick und markiert die Endpunkte des Heiligtums durch in die Erde eingeschlagene Pflöcke.“

A. Sturm.

---

1 : 108, 185, siehe BM 1_3, 1900, S. 266.

---

1 : 135. Das Wort *ὑποτύπωσις* bedeutet auch ‘Abrifs’, z. B. schrieb Proklos eine *ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων* ‘einen Abrifs der astronomischen Voraussetzungen’. Ebenso sind die ‘Grundzüge’ (*Πυρρώνειοι ὑποτυπώσεις*) des Sextus Empiricus allbekannt. Danach könnten wir des Suidas Worte *γεωμετρίας ὑποτύπωσιν* übersetzen ‘einen Grundrifs der Geometrie’, zumal da derzeit schon eine Anzahl Sätze bekannt war.

Das *ἔδειξεν* bei Suidas braucht keineswegs auf eine ‘bildliche Darstellung’ hinzuweisen und mit ‘zeigte’ übersetzt zu werden, sondern es hat bei spätgriechischen Schriftstellern zuweilen die Bedeutung von ‘machte’, wie mit Deutlichkeit aus Lucian *Somn.* 8, S. 3 ed. Sommerbrodt hervorgeht.

W. Schmidt.

---

1 : 144. Die Stelle aus Jamblichus steht auch Jamblichus *De communi mathematica* 78, 1—5 ed. Festa. Die Worte *ἐκαλεῖτο δὴ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία* übersetze ich: ‘Es wurde nun die Geometrie „Forschung von seiten des Pythagoras“ genannt’, wobei *ἱστορία* der Bedeutung nach dem *ἱστορεῖν* (Cantor, S. 142, Anm. 2) entspricht. Die Ansicht Tannerys (*Géom.*

gr., S. 86), dafs die πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία ein wirklich publiziertes Werk gewesen sei, halte ich für verfehlt. 'Tradition touchant Pythagore' (Tannery a. a. O., S. 81), d. h. 'Überlieferung betreffend Pythagoras' kann ferner nach korrektem Sprachgebrauche nur περὶ Πυθαγόρου ἱστορία heifsen (vgl. zum Ausdruck Plato „Phaedo" 96ᵃ. Diese Stelle zeigt übrigens auch, dafs der Artikel ἡ vor der Präposition nicht durchaus notwendig ist). Aber πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία könnte höchstens 'die von Pythagoras herrührende Überlieferung' bedeuten. W. Schmidt.

1 : 144. Die von Cantor im Anschlufs an Tannery gegebene Übersetzung der Worte des Jamblichus *De comm. math.* 78, 2 ed. Festa (= *Vit. Pyth.*, S. 89) ἀποβαλεῖν τινα τὴν οὐσίαν τῶν Πυθαγορείων ist nach den überzeugenden Ausführungen Zellers, *Gesch. d. Phil.* I: 1, S. 330⁵, Anm. 2 folgendermafsen zu ändern: 'einer von den Pythagoreern habe sein Vermögen verloren'. W. Schmidt.

1 : 155. Von Archytas wird bei Jamblichus, *De communi mathematica* ed. Festa 44, 11 eine Schrift Περὶ μαθηματικῶν erwähnt. W. Schmidt.

1 : 169 (Anm. 1). Aufser Clavius (Cantor, Zeitschr. für Mathem. 39, 1894; Hist. Abt. S. 185) spricht auch Schwenter, *Deliciae mathematicae* S. 538 diesen Gedanken aus. A. Sturm.

1 : 171 (Anm. 5). Plutarch sagt ausdrücklich, dafs diese Worte zwar in den Schriften Platons nicht enthalten seien, aber seiner Lehre entsprechen. A. Sturm.

1 : 190, 197, 202, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266.

1 : 225. Der Ansatz für Eudoxos von Knidos (408—355) ist nicht ohne Bedenken. Susemihl, *Die Lebenszeit des Eudoxos von Knidos*; Rhein. Mus. N. F. **53** (1898), S. 626—628, setzt seine Geburt um etwa 390 und seine Reise nach Ägypten in die ersten Fünfzigerjahre des 4. Jahrh., etwa 358 oder 357, statt wie bisher 380. W. Schmidt.

1 : 234. Der S. 170 angeführte indirekte Beweis für die Irrationalität der $\sqrt{2}$ ist viel älter, als der des Dinostratus. A. Sturm.

1 : 283, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 370,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383, 400, 432,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267.

1 : 436. Von Diophant erwähnt der Scholiast zu Jamblichus *in Nicom. arithm.* 11, 11 (S. 127, 11) ed. Pistelli auch eine Μοριαστικά (Teilungsrechnung) betitelte Schrift. S. auch Diophant ed. Tannery II, 72. W. Schmidt.

1 : 437, 440, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 463. Suidas nennt den Verfasser einer astronomischen Tafel Diophantes, nicht Diophantos. A. Sturm.

---

1 : 467, 469, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 475 (Anm. 1). Barlaams Logistik erschien unter dem Titel *Logistica nunc primum latine reddita et scholiis illustrata a* J. Chambero (Parisiis 1600, 4⁰). Christian Wolf (*Mathem. Lexikon*, Leipzig 1716, S. 177) giebt unrichtig 1609 als Druckjahr an. A. Sturm.

---

1 : 475, 476, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268. — **1 : 510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1 : 537, 540, 542**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 622**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143.

---

1 : 641. Die in Anm. 1 nicht entzifferten chinesischen Worte bedeuten nach freundlicher Mitteilung von L. Nix in Bonn:

4. Shaou kwang 'Evolution' (wörtlich 'eng-weit'),
5. Shang kung 'Körpermessung' (wörtlich 'überlegen und beendigen'),
6. Kiuen shu 'Vermischungsregeln' (wörtlich 'gerecht verteilen'),
7. Yiu muh (nicht nuh) 'Überschufs und Mangel',
8. Fang tshing 'Gleichungen' (wörtlich 'vergleichen und recht machen'),
9. Keu ku 'Trigonometrie' (Keu bedeutet wörtlich 'die beiden kleineren', ku 'die gröfsere Seite' eines Dreiecks). W. Schmidt.

---

1 : 661, 662, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499.

---

1 : 662. Thâbit ibn Korrah aus Harrân übersetzte nach L. Nix (*Das fünfte Buch der Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Übersetzung des Thâbit Ibn Corrah herausgegeben, ins Deutsche übertragen und mit einer Einleitung versehen*, Leipzig 1889, S. 4) nur die drei letzten Bücher der *Κωνικά* des Apollonius von Perge, während die ersten vier von Hilâl ibn abi Hilâl aus Ḥimṣ (Emessa) übertragen wurden. W. Schmidt.

---

1 : 671, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 687—688**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144. — **1 : 694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500. — **1 : 749**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 756, 757, 767**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501.

---

1 : 794. Sowohl das Gespräch über Musik als auch die Regeln des Abacus sind in demselben Codex 2503 der Wiener Hofbibliothek enthalten.

A. Sturm.

---

1 : 804, 805, 807, 808, 812, 823, 852, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1 : 853, 854, 855**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM 2_3, 1901, S. 351. — **2:8, 10**, siehe BM 1_3, 1900, S. 501—502. — **2:14—15**, siehe BM 2_3, 1901, S. 144. — **2:20**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:25**, siehe BM 1_3, 1900, S. 274. — **2:31**, siehe BM 2_3, 1901, S. 351—352. — **2:34**, siehe BM 2_3, 1901, S. 144. — **2:37**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:38**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:39**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:41, 57**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:70**, siehe BM 1_3, 1900, S. 417. — **2:78, 82, 87, 88, 89, 90, 92**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502—503. — **2:98**, siehe BM 1_3, 1900, S. 269—270.

2:100. Z. 28 ist 1264 statt 1281 zu setzen, da der Papst Urban IV. bekanntlich am 2. Oktober 1264 starb.

2:105, siehe BM 1_3, 1900, S. 503. — **2:111**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:122, 128**, siehe BM 1_3, 1900, S. 503—504. — **2:132**, siehe BM 1_3, 1900, S. 515—516. — **2:143**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2:157, 158**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:163, 166**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504.

2:175. Gmünd in Niederösterreich ist eine alte Stadt, kein Dorf. Immerhin dürfte bemerkenswert sein, daſs der Name Schindl noch heute in der dortigen Gegend vorkommt und daſs die dort ansässigen Edlen von Kuenring als Protektoren des Joh. von Gmunden auftraten. A. Sturm.

2:210, 219, siehe BM 2_3, 1901, S. 352—353. — **2:229, 242, 248**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504—505. — **2:253**, siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2:278**, siehe BM 1_3, 1900, S. 505. — **2:282, 283**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506; 2_3, 1901, S. 353—354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506—507. — **2:296**, siehe BM 2_3, 1901, S. 354. — **2:313**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507.

2:328. „Hashard" findet sich schon in einem Spielliede der *carmina burana* (Ausgabe v. Schmeller, S. 252). A. Sturm.

2:334, 353, 381, 386, 395, 401, 405, 425, siehe BM 1_3, 1900, S. 507—508. — **2:430**, siehe BM 2_3, 1901, S. 145.

2:449. In St. Florian in Österreich findet sich eine Ausgabe der Perspektive des Hieron. Rodler von 1531 (vgl. Obenrauch, *Geschichte der darstellenden Geometrie*, Brünn 1897, S. 193). A. Sturm.

2:474. Rhäticus hegte auch noch in Leipzig die Absicht, eine Übersetzung des Apollonius herauszugeben. Dies geht aus einem Briefe Melanchthons an den Nürnberger Senator Erasmus Ebner hervor, in welchem um Überlassung der Handschrift des Apollonius aus dem Nachlasse Regiomontans an Rhäticus, „qui Lipsiae mathemata docet", gebeten wird. — In diesem Briefe charakterisiert Melanchthon seine eigene Thätigkeit auf mathematischem Gebiete: „Scis me, etsi mea adolescentia non incidi in idoneos doctores, tamen

et fuisse et esse hortatorem multis ad discenda mathemata, et cupere, ut hae artes honestissime serventur et illustrentur.“ (Dieser Brief ist abgedruckt in BECHSTEIN, Deutsches Museum I, 1842, S. 338.) A. STURM.

---

2 : 480. MEMMO kann doch nicht ohne Fachkenntnisse gewesen sein, da ihn RICHARD in seiner Ausgabe des APOLLONIUS „publicus mathematicarum professor“ nennt. A. STURM.

---

2 : 481, 482, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354.

---

2 : 484. Z. 12 lies *regulis* statt *rebus*.

---

2 : 486, 489, **490, 497,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 509,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

---

2 : 512. Z. 2 lies 1556 statt 1558.

---

2 : 514, 516, 517, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

---

2 : 530. Z. 16 v. u. mufs es heifsen $\frac{a^2}{4} = \frac{3y^2}{4}$ statt $\frac{a^2}{4} - \frac{3y^2}{4}$.

---

2 : 530, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355. — **2 : 532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2 : 550,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554, 569, 572, 578,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510.

---

2 : 572, 614. Les *Tafelen van Interest, midtsgaders de Constructie der seluer* ont paru à Anvers dès 1582, et parmi les ouvrages publiés par STEVIN en 1585 il convient de mentionner en premier lieu *De thiende*, dont la traduction française *La disme* parut la même année dans la seconde partie de *L'arithmétique*. H. BOSMANS.

---

2 : 576, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 582,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2 : 592,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594, 597,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597, 599—600,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602, 603—604,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271. — **2 : 611,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357.

---

2 : 620. L'original du traité *De apologistica principum ratiocinio italico* fut publié par STEVIN en 1605 dans les *Wisconstige Gedachtenissen*. JEAN TUNING en donna une traduction française dans les *Mémoires mathématiques* (1608), dont il existe des tirages à part sous le titre de *Livre de compte de prince* (Leyde, chez Ian Paedtz Iacobsz CIↃ. IↃ. CVIII). H. BOSMANS.

---

2 : 621, 623, siehe BM. 1_3, 1900, S. 277; 2_3, 1901, S. 146—147. — **2 : 638,** siehe BM 2_3, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643,** siehe BM 1_3, 1900, S. 271. — **2 : 655,** siehe BM 2_3, 1901, S. 357. — **2 : 659, 660,** siehe BM 2_3, 1901, S. 147—148. — **2 : 6**[illegible], siehe BM 1_3, 1900, S. 271. — **2 : 683,** siehe BM 2_3, 1901, S. 148. — **2 : 700, 7**[illegible], **703, 704, 705,** siehe BM 1_3, 1900, S. 271—273. — **2 : 719,** siehe BM 2_3, 1[illegible]1, S. 357. — **2 : 721, 742,** siehe BM 1_3, 1900, S. 273.

---

2 : 742. Chr. Wolf erklärt in seinem *Mathematischen Lexikon* (17[illegible]6) „Antilogarithmus" noch als Logarithmus Cosinus. A. Sturm.

---

2 : 746, 747, siehe BM 1_3, 1900, S. 273.

---

2 : 766. Z. 2 lies 1655 statt 1659.

---

2 : 767, siehe BM 2_3, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 772, 775,** siehe BM 2_3, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM 2_3, 1901, S. 148. — **2 : 783,** siehe BM 2_3, 1901, S. 359. — **2 : 784, 820, 825, 840, 856, 865,** siehe BM 2_3, 1901, S. 148—[illegible]49. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM 1_3, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM 1_3, [illegible]00, S. 273. — **2 : 901,** siehe BM 1_3, 1900, S. 511.

---

2 : VIII (Vorwort). Les indications sur les *Wisconstige Gedachtenissen*, les *Hypomnemata mathematica* et les *Mémoires mathématiques* de Stevin sont en partie incomplètes, et il convient de les compléter par les renseignements suivants. Stevin édita ses œuvres à Leyde de 1605 à 1608 en trois langues différentes. Lui-même il les rédigea en flamand sous le titre de *Wisconstige Gedachtenissen* (Leyden, In de Druckereye van Jan Bouwensz, CIↃ. IↃ. CV[illegible]III, 2 vol. in-fol.). En même temps paraissaient une traduction latine complète par W. Snellius (sauf le liber 5 geographiae, limenheuretica, qui est de Hugo Grotius) sous le titre de *Hypomnemata mathematica* (Lugdvni Batavorum, ex officinia Joannis Patii, CIↃ. IↃ. CVIII, 2 vol. in-fol.), et une traduction française par Jean Tuning sous le titre de *Mémoires mathématiques* (Leyde, chez Ian Paedtz Iacobsz CIↃ. IↃ. CVIII, in-fol.). La traduction française ne contient qu'une partie des *Wisconstige Gedachtenissen*, mais elle renferme d'autre part le „Livre de compte de marchand" et le „Livre de compte de prince", qui font défaut dans l'édition de Girard (1634).

Les trois éditions offrent cette particularité que le titre de départ et celui de la dernière partie sont datés de 1608, tandisque les autres parties sont datées de 1605, ce qui s'explique très simplement en admettant que les titres de départ n'ont été imprimés que lorsque l'ouvrage était terminé.

H. Bosmans.

---

2 : IX, X (Vorwort), siehe BM 1_3, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM 2_3, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM 1_3, 1900, S. 51[illegible] — **3 : 12, 17, 22,** siehe BM 1_3, 1900, S. 512. — **3 : 26,** siehe BM 2_3, 1901, S. 35[illegible] — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM 1_3, 1900, S. 512—513. — **3 : 70,** siehe BM 2_3, [illegible]901, S. 360. — **3 : 100,** siehe BM 2_3, 1901, S. 149. — **3 : 116,** siehe BM 1_3, 1900, S. 51[illegible] — **3 : 117,** siehe BM 1_3, 1900, S. 518. — **3 : 123,** siehe BM 1_3, 1900, S. 51[illegible] — **3 : 174,** siehe BM 2_3, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM 1_3, 1900, S. 43[illegible] —

3 : 201, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218, 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513—514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 447, 455,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 521, 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 652,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 660, 667, 689, 695,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442. — **3 : 750, 758, 760, 766,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 848, 881,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447.

---

3 : 892. Die Worte: „Nach dem über dessen Inhalt Veröffentlichten (ENESTRÖM, Bibliotheca Mathematica 1897, S. 49) ging BERNOULLI folgendermaßen zu Wege" konnten in der ersten Auflage der *Vorlesungen* berechtigt sein, aber inzwischen ist das Verfahren des BERNOULLI vollständig veröffentlicht worden (Biblioth. Mathem. 1898, S. 58—60), und daraus geht hervor, dafs dasselbe nicht ganz mit dem CANTORschen übereinstimmt. BERNOULLIS Darstellung ist ein wenig weitschweifig, aber der Grundgedanke ist, dafs man nach der Multiplikation mit x^p,

$$0 = x^p y + a x^{p+1} \frac{dy}{dx} + b x^{p+2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots = \frac{d}{dx}\left(\alpha x^{p+1} y + \beta x^{p+2} \frac{dy}{dx} + \gamma x^{p+3} \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots\right)$$

setzt. Nach ausgeführter Differentiation des rechten Gliedes bekommt man also, um die $n+1$ Gröfsen $p, \alpha, \beta, \gamma, \cdots$ zu bestimmen, die $n+1$ Gleichungen

$$1 = (p+1)\,\alpha, \qquad a = \alpha + (p+2)\,\beta, \qquad b = \beta + (p+3)\,\gamma, \cdots$$

und da man durch Integration der transformierten Gleichung als Resultat

$$\alpha x^{p+1} y + \beta x^{p+2} \frac{dy}{dx} + \gamma x^{p+3} \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots = \text{Konst.}$$

erhält, hat man also die Ordnung der ursprünglichen Gleichung um eine Einheit erniedrigt. Setzt man nun mit BERNOULLI die Konstante $= 0$, so kann man das Verfahren wiederholen und kommt endlich zu einer Gleichung ersten Grades, die leicht integriert wird. Übrigens ist es offenbar nicht nötig, die Konstante $= 0$ zu setzen, was auch BERNOULLI selbst bemerkt hat. Man sieht hieraus, dafs die BERNOULLIsche Methode nicht so elegant wie die CANTORsche ist, und unserer Ansicht nach kann man kaum annehmen, dafs diese schon vor 200 Jahren benutzt worden ist. Auf der anderen Seite geht hervor, dafs BERNOULLI x^p wirklich als integrierenden Faktor anwendet, was vom historischen Gesichtspunkte aus besonders interessant ist, da seine Methode schon vor 1700 erfunden wurde.

G. ENESTRÖM.

---

3 : IV (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Vermischte historische Notizen.

Noch einmal Archimedes' Ephodikón. Aus einem Zitat in HERONS *Metrika* I, 32 wurde (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 13—14) von mir vermutet, dafs Ἐφοδικὸν der echte Titel für die Quadratur der Parabel sei.

Diese Mitteilung kann ich jetzt noch durch zwei neue Stellen
die gleichfalls in Herons *Metrika* (Fol. 96ᵛ des Constantinopol. 1 s.
aber obige Vermutung wieder zweifelhaft erscheinen lassen.

Hier heifst es zunächst (Fol. 96ᵛ):

Κυλίνδρου τμῆμα τετμημένου διὰ τοῦ κέντρου μιᾶς τῶν βάσεων.

Segment eines Cylinders,
den Mittelpunkt einer der Gr
geschnitten ist.

Ἀποδέδειχεν Ἀρχιμήδης ἐν τῷ Ἐφοδικῷ, ὅτι τὸ τοιοῦτον τμῆμα ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ τμήματι.

Archimedes hat im *Eph*
zeigt, dafs solcher Abschn
körperlichen Parallelepipedo
zur Basis das um die Basis
ders beschriebene Quadrat,
selbe Höhe wie der Abschn

Darauf führt Heron fort (Fol. 96ᵛ):

Ὁ δ' αὐτὸς Ἀρχιμήδης ἐν τῷ αὐτῷ βιβλίῳ δείκνυσιν, ὅτι ἐὰν εἰς κύβον δύο κύλινδροι διωσθῶσιν τὰς βάσεις ἔχοντες ἐφαπτομένας τῶν πλευρῶν τοῦ κύβου, τὸ κοινὸν τμῆμα τῶν κυλίνδρων δίμοιρον ἔσται τοῦ κύβου.

Derselbe Archimedes zei
selben Buche, dafs, wenn
Würfel zwei Cylinder getrie
mit Grundflächen, welche
des Würfels berühren, das g
Segment der Cylinder $^2/_3$ d
sein wird.

Die beiden Zitate vermag ich bei Archimedes nicht na
Wahrscheinlich war also Ephodikón der Titel einer gröfseren Schrif
uns die „Quadratur der Parabel" erhalten ist. W. Sch

Anfragen und Antworten.

97. Die „Numeri congrui" und „congruentes". In sein
lung der Aufgabe: Zwei Zahlen a und b von der Beschaffenheit zu
dafs sowohl $a^2 - b$, als auch $a^2 + b$ eine Quadratzahl sei (mit and
ten: drei Quadratzahlen von gleicher Differenz zu finden), untersch
nardo Pisano (*Scritti* ed. Boncompagni II, p. 265 ff.; vgl. auch Ca
lesungen II², p. 45) zwischen *numeri congrui* und *numeri congrue*
Quadrat heifst bei ihm *Congruens*, die Differenz der Quadrate b ein
[„Super quem quadratum proponitur addere numerum et fieri
secundum; ... super quem etiam secundum quadratum si addatu
idem qui vocetur congruum, quia congruit his, facit majorem quadra
Es ist nun recht eigentümlich, dafs spätere, von Leonardo Pisano
Schriftsteller diese Ausdrücke einfach vertauscht haben. So n
Pacciuolo (*Summa*, fol. 46) die Quadratzahl „el numero congruo", di
„el suo congruente". Ebenso schreibt Francesco Ghaligai (*Prat*
metica, Firenze 1552, fol. 60 verso): „Numero congruo e quello
a dare & ricevere un' altro numero, quale si chiama congruente e
gruente e quello che agiunto al congruo, la somma sia quadrat
del congruo el rimanente sia quadrato, cioè dico che a ogni congruo
uno congruente e detti congruenti di molte volte non sono quad
congrui sono quadrati etc. etc."

Hieronimo Cardano (*Practica arithmeticae* 1539, Cap. 42, Nr. 36 und 37) macht diesen Unterschied überhaupt nicht; a^2 ist ihm ebenso wie b ein *Congruens*.

Wie ist diese Verschiedenheit bei Leonardo einerseits und Paciuolo und Ghaligai andererseits zu erklären? Da die Ausdrücke *congruum* und *congruens* bei Leonardo häufig und immer in dem oben angegebenen Sinne gebraucht werden, so ist ein Schreibfehler in der Handschrift, welche der Ausgabe von Boncompagni zu Grunde liegt, nicht zu vermuten. Ist es anzunehmen, daſs Paciuolo und nach ihm Ghaligai die Ausdrucksweise Leonardos aus sprachlichen Gründen für unrichtig gehalten und deshalb die Änderung vorgenommen haben?

Frankfurt a. M. G. Wertheim.

---

98. Über Gleichungen, die auf Null gebracht sind. Bekanntlich ist Descartes der erste Mathematiker, der ausdrücklich auf die Zweckmäſsigkeit, Gleichungen auf Null zu bringen, hingewiesen (vgl. Descartes, *La géométrie*, Nouv. éd. Paris 1886, S. 55), und solche Gleichungen durchgehend angewendet hat. Aber schon vor Descartes findet man Spuren dieses Verfahrens, und die Geschichtsschreiber der Mathematik haben nicht verfehlt hierauf aufmerksam zu machen. So z. B. bemerkt Cantor (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2^2, S. 441), daſs Stifel in einem Falle die Gleichung auf Null bringt, und (a. a. O., S. 644) daſs Bürgi mit vollem Bewuſstsein eine Gleichung auf Null gebracht hat. Auf der anderen Seite hatte schon Montucla (*Histoire des mathématiques* **2**, 1758, S. 77) behauptet, Harriot habe sich im Vorübergehen dieser Anordnung bedient, aber die Richtigkeit dieser Behauptung ist von Hankel (*Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, 1874, S. 380) und von Cantor (Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. S. 99) bestritten worden. Dagegen ist es sicher, daſs Neper in seiner vielleicht vor 1594 verfaſsten, aber erst 1839 gedruckten *Algebra* vielfach die „aequatio ad nihil", d. h. die auf Null gebrachte Gleichung, benutzt.

Hat Harriot wirklich Gleichungen auf Null gebracht, und giebt es andere Mathematiker als die hier genannten, die es vor Descartes gethan haben?

Stockholm. G. Eneström.

Réponse à la question 50 sur le mathématicien anglais Braikenridge. Dans le British museum se trouvent 18 lettres de William Braikenridge à Birch, écrites 1732—1753. Par la lettre du 2 août 1732, on voit que Braikenridge avait l'intention de faire à Hampstead, où Birch demeurait, un cours de physique expérimentale. En 1737 il parle d'une lettre qu'il avait adressée à Maclaurin à propos d'un article publié par celui-ci dans les Philosophical Transactions. A partir du 23 octobre 1739 il se nomme Braikenridge, et par la dernière lettre on voit qu'il vivait encore en 1753.

Torino. G. Vacca.

Réponse à la question 51 sur J. R. Argand. Jean Robert Argand, né à Genève le 18 (non le 22) juillet 1768, mourut à Paris le 13 août 1822.

Genève. H. Fehr.

Recensionen.

H. G. Zeuthen. Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Edition française, revue et corrigée par l'auteur, traduite par **J. Mascart.** Paris, Gauthiers-Villars 1902. XIII + (1) + 296 S. 8°.

Das Original dieses Buches erschien 1893 und wurde in der Bibliotheca Mathematica 1893, 115—116 besprochen. Zwei Jahre später erschien mit dem Druckjahr 1896 eine von R. Fischer-Benzon besorgte deutsche Übersetzung, die in der Bibliotheca Mathematica 1895, 115—116 angezeigt wurde. Jetzt ist auch eine französische Übersetzung herausgegeben worden, die seit anderthalb Jahren bei Gauthier-Villars unter der Presse gewesen ist. Der Verf. hat dabei einige Verbesserungen und Zusätze eingefügt, und von der Hand des Herrn Paul Tannery findet sich darin eine Anzahl von Noten unter dem Text, die hauptsächlich litterarischen Inhalts sind.

Von den meisten vorhandenen Kompendien der Geschichte der Mathematik unterscheidet sich das Buch des Herrn Zeuthen dadurch, dafs es eine Entwickelungsgeschichte der Mathematik bringen will, und darum nur wenig litterarische Notizen enthält. Aus demselben Grunde giebt es ausführliche Auskunft über die mathematischen Arbeiten, die wesentliche Fortschritte enthalten — beinahe die Hälfte des Buches bezieht sich auf die Werke von Eukleides, Archimedes und Apollonios — während die übrigen garnicht oder wenigstens nur im Vorübergehen erwähnt werden. Gewifs ist ein solches Verfahren im allgemeinen zu billigen, aber ob es auch für das Mittelalter angemessen ist, scheint uns fraglich zu sein. Die ganze Mathematik des christlichen Mittelalters bis zur Mitte des 15. Jahrhunderts hat bei Herrn Zeuthen eigentlich nur zwei Repräsentanten, nämlich Leonardo Pisano, der ziemlich ausführlich behandelt wird, und Nicolas Oresme, dem eine Druckseite gewidmet ist; im Vorübergehen werden noch Gerbert, Jordanus Nemorarius und Bradwardin genannt. Es ist ja möglich, dafs der Leser dadurch einen Einblick in die Entwickelung der mathematischen Wissenschaft gewinnen kann, aber über die Entwickelung des mathematischen *Studiums* im Mittelalter, die auch ein wissenschaftliches Interesse hat, giebt eine solche Darstellung zu wenig Auskunft. Überhaupt scheint sich Herr Zeuthen, der bekanntlich auf dem Gebiete der griechischen Mathematik hervorragende historische Untersuchungen ausgeführt hat, wenig für die Geschichte des Mittelalters interessiert zu haben.

Hinsichtlich der Einzelheiten erlauben wir uns hier einige kleine Bemerkungen hinzuzufügen, die sich fast alle auf die letzte Abteilung des Buches („Le moyen âge") beziehen.

S. 265. Die Worte; „nous avons montré comment les Grecs connaissaient ce théorème (p. 206)" scheinen uns ganz irreleitend. Es handelt sich um den Satz $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$, und Herr Zeuthen beansprucht also nachgewiesen zu haben, dafs dieser Satz den Griechen bekannt war; der angebliche Nachweis beschränkt sich jedoch auf eine *Behauptung*, dafs die bei Alkarchi vorkommende Herleitung des Satzes durch seine geometrische Form

griechischen Ursprung verrät. Was zuerst die Richtigkeit dieser Behauptung anbelangt, so dürfte sie zum mindesten sehr zweifelhaft sein. Bekanntlich hat HANKEL (*Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, S. 192) hervorgehoben, dafs die Herleitung ein durchaus *indisches* Gepräge trägt, und kürzlich hat Herr A. BÜRK in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft **55**, 1901, S. 566—572 nachgewiesen, dafs ganz ähnliche Herleitungen schon bei dem indischen Verf. APASTAMBA, der spätestens im 4. vorchristlichen Jahrhundert lebte, vorkommen. Aber vorausgesetzt, dafs die *Herleitung* wirklich ein griechisches Gepräge getragen hätte, so folgt daraus gewifs nicht ohne weiteres, dafs der *Satz* den Griechen bekannt gewesen ist, denn es wäre sehr gut möglich, dafs die Herleitung von einem arabischen Mathematiker herrührte, der die griechischen Verfasser eingehend studiert hatte. In jedem Falle scheint es uns unangemessen, in einem Buche, das wohl vorzugsweise für Studierende bestimmt ist, eine blofse Hypothese als etwas Nachgewiesenes anzugeben.

S. 272. Die Bemerkung bezüglich des LEONARDO PISANO: „Ce qui prouve qu'il n'est pas algorithmicien d'origine, c'est qu'il déclare avoir donné lui-même l'extraction de la racine cubique; or cette extraction n'est pas dans AL-KARCHI", scheint uns wenig zutreffend. In erster Linie ist der Ausdruck „l'extraction de la racine cubique" zu beanstanden, da LEONARDO PISANO in der That zwei Methoden zum Ausziehen der Quadratwurzel kennt, nämlich die alte und die von ihm selbst erfundene (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 351). Wenn man aber „une méthode d'extraction" statt „l'extraction" setzt, so kommt natürlich die Folgerung, dafs LEONARDO ursprünglich nicht Algorithmiker war, in Fortfall, und übrigens ist es nicht einzusehen, was die an sich richtige Bemerkung hinsichtlich des ALKARCHI hier zu thun hat.

S. 282. Nachdem Herr ZEUTHEN das Rechenbuch von WIDMAN erwähnt hat, fügt er hinzu: „dès 1483, d'autre part, avait été imprimée l'Arithmétique dite de Bamberg", aber bekanntlich giebt es noch frühere gedruckte Rechenbücher, und eine Erklärung, warum gerade das Bamberger Rechenbuch von 1483 verdient besonders hervorgehoben zu werden, würde darum hier erwünscht gewesen sein.

S. 284—285. Unserer Ansicht nach geht aus der von Herrn ZEUTHEN citierten Arbeit des Herrn BRAUNMÜHL hervor, dafs die Verdienste des REGIOMONTANUS um die Trigonometrie nicht so grofs sind, als Herr ZEUTHEN hier angiebt.

In der Übersetzung kommen zuweilen Ausdrücke vor, die nicht ganz geeignet sind dem Leser eine richtige Auffassung der fraglichen Thatsachen zu geben. So z. B. heifst es S. 239: „l'équation $y^2 = ax^2 + 1$, qui, beaucoup plus tard, sous le nom d'équation de PELL, devait préoccuper les mathématiciens d'Europe"; der Name PELLsche Gleichung rührt ja von EULER her, während die Gleichung selbst schon weit früher die Mathematiker in Europa beschäftigte. — S. 281 wird mit Bezug auf CHUQUET bemerkt: „les solutions imaginaires auxquelles devait conduire l'un de ses problèmes, paraissent uniquement correspondre à quelque erreur de sa part", was wohl gar keinen Sinn giebt; bekanntlich hat CHUQUET zwar ein Problem behandelt, das zu einer imaginären Lösung führt, und die formale Richtigkeit der Lösung nachgewiesen, aber in dem einzigen bekannten Manuskripte seiner Arbeit findet sich ein Rechen- oder Schreibfehler (statt $\sqrt{\sqrt[3]{81} - \sqrt{60}}$ steht nämlich $\sqrt[3]{81} - \sqrt{60}$), so dafs man

nicht entscheiden kann, ob CHUQUET das Imaginärwerden der Lösung erkannt hat. — S. 287, Z. 19 ist das Wort „brusquement" kaum angemessen, da es wohl nicht richtig ist, dafs die Entdeckung der Lösung kubischer Gleichungen auffallend plötzlich erfolgte. — S. 271 findet sich in der französischen Übersetzung eine Ungenauigkeit, die um so merkwürdiger ist, als die deutsche Übersetzung, die wohl die Vorlage des Herrn MASCART gewesen ist, an dieser Stelle eine andere Ungenauigkeit enthält. Im dänischen Original steht nämlich ganz richtig, dafs GERBERT ein paar Jahrhunderte früher als LEONARDO PISANO lebte, die deutsche Übersetzung hat „einige Jahrhunderte früher" und die französische „un peu plus d'un siècle auparavant", das ja entschieden unrichtig ist, da GERBERT schon 1003 starb und LEONARDO noch 1228 wissenschaftlich thätig war.

Die vorstehenden Bemerkungen sind natürlich im Grofsen und Ganzen ziemlich unbedeutend, und wir hoffen, dafs die französische Ausgabe der Arbeit des Herrn ZEUTHEN nicht nur innerhalb Frankreichs, sondern überhaupt bei den Studierenden an den Universitäten grofse Verbreitung finden wird.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

G. Frizzo. De numeris libri duo, authore Joanne Noviomago, esposti ed illustrati. Verona, Drucker 1901. (7) + 174 p. — 3 lire.

JOHANNES NOVIOMAGUS (JEAN BRONKHORST de Nimwegen) est connu par son édition des œuvres de BEDA, sa traduction de la géographie de PTOLÉMÉE et par un petit traité *De numeris libri duo*, publié à Paris en 1539. Un exemplaire de cet ouvrage, cité parfois à cause de certains signes numéraux y indiqués sous le nom de „notae numerorum astrologicae sive chaldaicae", est tombé entre les mains de M. FRIZZO, qui vient d'en publier un résumé, accompagné de commentaires.

Le premier livre de l'ouvrage de NOVIOMAGUS contient un traité d'arithmétique pratique; on y trouve aussi les signes numéraux des Grecs, la *loquela digitorum* de BEDA et les symboles déjà mentionnés, dont NOVIOMAGUS avait eu connaissance par un concitoyen, RUDOLFUS PALUDANUS. Le second livre contient l'exposition des premiers notions de la théorie des nombres, d'après NICOMACHUS, THÉON SMYRNAEUS et JAMBLICHUS.

Genova. G. LORIA.

G. Macrì. Francesco Maurolico nella vita e negli scritti. Seconda edizione con documenti inediti. Messina, D'Angelo Freni 1901.

Nel 1894 la r. accademia Peloritana di Messina, solennizzando il 4° centenario della nascita del dotto umanista e matematico messinese, affidava al prof. GIACOMO MACRÌ l' incarico di scriverne la biografia. Essa ci presenta il MAUROLICO nei suoi svariati aspetti di letterato, matematico, astronomo, fisico, naturalista, filosofo; ci fa conoscere le numerose sue opere e i progressi di cui vanno a lui debitrici le varie scienze alle quali dedicò i suoi studi. Per non parlare che di MAUROLICO matematico, è indubitato che egli fu tra quelli che più diligentemente si occuparono di rintracciare, di ridurre a lezione corretta e di far conoscere al mondo occidentale le opere dei grandi geometri greci; che, non contento di ciò, tentò, primo forse, di divinare e di ricostruire il mancante, e di spingersi innanzi nella via aperta da APOLLONIO e da

ARCHIMEDE. Nei secoli successivi la matematica abbandonò le antiche vie per altre infinitamente più rapide e sicure, e lo splendore delle scoperte fatte nei nuovi indirizzi scema in noi l'ammirazione per quei lavori che valsero a MAUROLICO dai suoi contemporanei il titolo di *novello ARCHIMEDE*; ma è d'uopo riconoscere, che il rinascimento della matematica non sarebbe stato possibile senza l'opera di quelli scienziati umanisti che ci restituirono i capolavori della geometria greca.

La biografia del MACRÌ appare ora nuovamente rifusa ed accresciuta di importanti aggiunte. Limitandoci anche qui alla scienza che ci interessa, noteremo soltanto che l'autore in questa nuova edizione, mentre abbandona l'idea che MAUROLICO sia stato il primo ad usare le lettere nell'aritmetica razionale, ripete con maggiore insistenza l'asserzione che egli per primo si occupò di determinare il centro di gravità dei solidi; asserzione che può accettarsi, in un certo senso, per esatta, considerando che la determinazione del centro di gravità della piramide triangolare fatta da LEONARDO DA VINCI è rimasta ignota sino ad un'epoca assai recente.

Una questione che interessa non meno la storia di MAUROLICO che quella della sua città natale, è se egli abbia professato nell'Università di Messina. Nella prima edizione della sua biografia, il MACRÌ sostiene vigorosamente la tesi che MAUROLICO non insegnò mai nell'Ateneo della sua patria. Più tardi la ricorrenza del 350° anniversario del bando (29 aprile 1550) che apriva agli studi l'Università messinese porse occasione a diligenti ricerche storiche sul passato di essa, le quali furono raccolte in due volumi commemorativi pubblicati, l'uno dai professori dell'Università, l'altro dall'Accademia Peloritana. Il primo di essi contiene, fra altre pubblicazioni, un Sommario storico delle vicende dell'Università, compilato da un anonimo gesuita del XVIII secolo, nel quale si legge che il 9 novembre 1569 MAUROLICO fu nominato professore nello studio messinese. Il documento di nomina, già allegato in copia al Sommario ma ora smarrito, fu ritrovato nell'Archivio di Stato di Palermo e inserito nel secondo dei due volumi sopra menzionati. Appare da esso che il MAUROLICO veniva, il 9 novembre 1569, nominato dal Senato di Messina professore di matematica, — cioè di geometria, aritmetica speculativa, astrologia, musica speculativa, prospettiva ed ogni altra cosa attinente alle scienze matematiche —, in quella Università, per un anno, collo stipendio di onze 40 (pari a lire italiane 510), e coll'obbligo di impartire 4 lezioni per settimana. La conferma vicereale porta la data del 17 gennaio 1570. — Di fronte a questo documento autentico cade ogni induzione in contrario. Tuttavia il MACRÌ nella nuova edizione della sua biografia, ed il Dr. V. LABATE in un articolo critico sui due volumi commemorativi pubblicato nell'Archivio storico siciliano, osservano come la nomina del MAUROLICO ad insegnante non provi punto che egli abbia effettivamente professato, come anzi ciò sia improbabile data l'età avanzata del grande geometra, il quale aveva passato ormai i 75 anni, e la sua malferma salute; e suppongono che tale nomina sia stata suggerita principalmente dal desiderio di fregiare la nascente Università di un nome così illustre, e di dare nel medesimo tempo, in forma onorevole, un sussidio al dotto messinese ne' suoi ultimi giorni.

Sebbene l'autorità e la competenza ci manchino per intervenire in questa sottile questione, ci sia permesso esprimere in proposito il nostro parere. Il fatto della nomina del MAUROLICO a professore conduce logicamente ad am-

mettere, *sino a prova in contrario*, e che il suo stato fisico non potesse esser giudicato tale da rendergli del tutto impossibile l' esercizio del suo ufficio, e che questo sia stato effettivamente esercitato. D' altra parte è assai probabile, per le circostanze d' età e di salute acutamente invocate dal MACRÌ, che l' insegnamento del MAUROLICO non sia stato nè lungo nè efficace; e ciò, mentre può valere a spiegare il silenzio serbato su questo punto sì da lui che dal suo più antico biografo, rende poco sperabile la scoperta di nuovi documenti atti a risolvere definitivamente l' interessante quesito. Comunque, è ormai fuor d' ogni dubbio che l' Università di Messina ha diritto di porre fra i nomi dei suoi professori quello illustre di FRANCESCO MAUROLICO.

Messina. G. VIVANTI.

N. L. W. A. Gravelaar. John Napier's Werken. (Verhandelingen der Akademie van Wetenschappen.) Amsterdam 1899. 160 S. + 3 Taf. 4^0.

Nach einem kurzen Lebensabriſs JOHN NAPIERS (1550—1617), Gutsherrn von Merchiston bei Edinburg, dem man den Titel Lord nur miſsbräuchlich beilegt, finden wir in der Abhandlung des Herrn GRAVELAAR eine bibliographische Beschreibung jeder einzelnen Schrift mit Angabe ihrer verschiedenen Ausgaben und Übersetzungen, die in holländischen Bibliotheken vorhandenen Exemplare werden aufgezählt, dann folgt im lateinischen Urtext die genaue Gliederung der einzelnen Abschnitte unter Einflechtung der besonders prägnanten Sätze und mit Probeseiten der Tabellen, endlich giebt Herr GRAVELAAR in holländischer Sprache eine Übersicht des Inhalts, wobei er zur Abkürzung auch die heutige wissenschaftliche Ausdrucksweise, zum teil in elementarer Form verwendet. Anmerkungen über die Beziehungen zu gleichzeitigen und früheren Mathematikern sind beigefügt, auch vielfache Irrtümer der bisherigen geschichtlichen Überlieferung berichtigt. Die vorliegende Schrift giebt daher mit leichter Mühe dem Leser ein Bild von der wissenschaftlichen Persönlichkeit NEPERS und bildet einen vorläufigen Ersatz für die Ausgabe seiner gesamten Werke, die ebenso nützlich wäre wie die der Werke KEPLERS.

Die von NAPIER in der *Descriptio* veröffentlichte Tafel der Sinus und ihrer Logarithmen enthält kein Dezimalkomma. Wenngleich die Dezimalbrüche sich schon einzubürgern anfingen, so vermied man es doch, eine ganze Tafel mit dem Komma auszurüsten, man schrieb die Sinus als ganze Zahlen und bemerkte in der Einleitung, daſs es sich um Teile handele, deren der Radius oder Sinus-Totus 1000 oder hier 10000000 umfasse. Ähnlich war schon PTOLEMAIOS bei seiner Sehnentafel verfahren. Man muſs daher die Sinus und die Logarithmen NAPIERS durch 10^7 dividieren, um sie den modernen Gewohnheiten anzupassen. NAPIER hat die Logarithmen der Sinus positiv angegeben, bemerkt aber, daſs er dies nur aus praktischen Rücksichten thue, an sich könnten sie auch negativ gesetzt werden, die Logarithmen von Zahlen, die gröſser als der Sinus totus seien, würden dann positiv. Demnach bedürfen SPEIDELL, MONTUCLA und deren Nachfolger (S. 12—13), die sich für die zweite von NEPER gestattete Wahl des Vorzeichens entschieden, nur ebensoweit einer Entschuldigung wie diejenigen, die das Komma einsetzten. Auch NEPERS ursprüngliche Form der Logarithmen stellt die Fläche der gleichseitigen Hyperbel (S. 12) zwischen den Abscissen x und 1, wenn x ein echter Bruch ist, richtig dar, doch kommt es bei Flächeninhalten auf das Vorzeichen überhaupt nicht

an. Nach FLORIAN CAJORI war HALLEY der erste Schriftsteller, der sich „die Verwechslung von NAPIERschen und natürlichen Logarithmen zu Schulden kommen liefs“.

Viele Autoren (WITTSTEIN, RUDOLF WOLF, MARIE, KEWITSCH) haben nun aber von NEPERS Logarithmen bis jetzt eine Vorstellung, die es, abgesehen von der äufserlichen Zurichtung, unmöglich erscheinen läfst, dafs der innere Gehalt von NEPERS Tafel mit den natürlichen Logarithmen übereinstimmt. Sie glauben, NEPER hätte zu $(1-10^{-7})^n$ den Logarithmus $= 10^{-7}\cdot n$ gesetzt, wie BYRG zu $(1+10^{-4})^n$ setzte $n\cdot 10^{-4}$. NEPER hat aber (S. 29) seine Tafel, wenn wir das Komma als immanent erachten, wirklich nach der Definition $\log \text{Nap}\, u = \int\limits_u^1 \frac{du}{u}$ berechnet, sodafs genau $\log \text{Nap}\, u = -\log \text{nat}\, u$ ist. Aus jener Definition entwickelt er den Satz, dafs $\log \text{Nap}\, \frac{U}{u}$ zwischen $\frac{U-u}{u}$ und $\frac{U-u}{U}$ liegt. Dieser ist das wichtigste Instrument bei der Aufstellung der „Tabula Radicalis“, er gestattet, von dem Endgliede einer der aufgestellten Reihen zu dem wenig verschiedenen Anfangsglied der nächsten streng überzugehen. Für BYRGS Logarithmen wäre ein ähnlicher Satz *nicht* genau richtig. Wenn Herr GRAVELAAR (S. 83, Note) sagt, NAPIER habe über die erste Zahl, 0,9999999 $(=1-10^{-7})$ nur angenommen, dafs ihr Logarithmus zwischen den Grenzen $1\cdot 10^{-7}$ und $1{,}0000001\cdot 10^{-7}$ liege, so scheint das wohl mit S. 80 in Übereinstimmung. Aber auf S. 82 zeigt sich, dafs NEPER schliefslich doch, um eine brauchbare Annäherung zu erlangen, sich entschliefsen mufste, das arithmetische Mittel der beiden Grenzen als den Wert des Logarithmus anzusehen, was durchaus gerechtfertigt war. Wenn dies aber bei den abgeleiteten Logarithmen der Zahlen 0,9995000 und 0,9900000 geschah, so ist damit auch der erste Logarithmus, log 0,9999999 auf die Mitte des bis dahin festgehaltenen Intervalles, auf $1{,}00000005\cdot 10^{-7}$, gerückt.

Der Aufbau der Numeri der „Tabula radicalis“, die nach Reihen und nach Kolumnen einfache geometrische Reihen bilden und daher beständige Kontrollen der Rechnung ermöglichen, ist ein äufserst glückliches Auskunftsmittel, um die Aufstellung einer einzigen geometrischen Reihe mit dem Faktor 0,9999999 zu umgehen. Diese würde unermefsliche Arbeitszeit erfordern und keine Kontrolle gewähren. Dafs dagegen jener Aufbau, wie schon P. TANNERY vermutet hat, nur eine mäfsige Arbeit verursacht, läfst eine Nachbildung der „Tabula radicalis“ für die moderne Form der natürlichen Logarithmen (siehe KOPPE, *Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht*, Berlin 1893, S. 14) leicht erkennen.

Die NEPERschen Logarithmen, negativ genommen, haben genau die Basis e, die BYRGschen haben zur Basis $(1+10^{-4})^{10^4}$, d. h. eine rationale Zahl, die mit e auf 4 Stellen übereinstimmt.

Von der aus MONTUCLA zitierten Berechnungsart NEPERscher Logarithmen (S. 30) urteilt Herr GRAVELAAR, sie habe mit NEPERS Verfahren wenig Ähnlichkeit. Sie ist überhaupt unmöglich, denn MONTUCLA verwechselt die Glieder einer geometrischen Reihe mit Zahlen wie $1, \cdots, \sqrt[8]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, 2$, die man von den Grenzen aus durch fortlaufende Bestimmung geometrischer Mittel nach 1 hin fortsetzt.

Dafs NEPER das Einschalten nach Proportional-Teilen nicht gekannt habe (S. 84) und es habe durch die regula falsi ersetzen müssen, halten wir für ausgeschlossen, da er in astronomischen Tafeln so bewandert war wie KEPLER, dem diese Interpolation als selbstverständlich gilt.

Sehr bemerkenswert ist die Äufserung NEPERS (S. 105), er beabsichtige, die Zahl 2,302 5842 durch 1,0000 000 zu ersetzen. Hieraus ergiebt sich, dafs für ihn der Übergang zu BRIGGischen Logarithmen nur ein Umrechnen auf ein anderes Mafs war. Wenn er übrigens die neuen Logarithmen als eine „species alia multo praestantior“ bezeichnet (S. 68), so hat doch die weitere Entwickelung gezeigt, dafs die ursprünglichen in theoretischer Hinsicht den ersten Platz behaupten.

Wir gehen zu den trigonometrischen Entdeckungen NEPERS über. Die Regel über rechtwincklige Dreiecke (S. 40) stellt sich hier nicht als dürftige Gedächtnishilfe dar, sondern wird, dem Originale entsprechend, anschaulich an der Figur des Pentagramma mirificum entwickelt. Als Vorgänger haben nicht sowohl TORPORLEY als VAN LANSBERGE und PITISCUS zu gelten, die auch schon die Komplemente der Stücke einführen.

Über NEPERS Analogien (S. 93) sind viele Irrtümer verbreitet, die kürzlich auch in dieser Zeitschrift 1_3, 1900, S. 271—272 besprochen wurden. Nach Berichtigung derselben werden zwei alte Beweise beigefügt. Der eine rührt von OUGHTRED her (*Trigonometria*, London 1657, S. 34, nicht CASWELL, nach einer von Herrn GRAVELAAR mir mitgeteilten Berichtigung) und benutzt die Winkeltreue der stereographischen Projektion, der andere, von BAKER, ist analytisch.

NEPER hat auch mechanische Methoden ersonnen, um die grofse Anspannung, die den Geist bei langen Multiplikationen ermüdet, zu verringern. Nach einem Bericht von EZECHIEL DE DECKER fanden diese in der *Rhabdologia* beschriebenen Hülfsmittel den gröfsten Beifall der Zeitgenossen, und zwar mit Recht, sie könnten noch heute, wenn die 7-stelligen Logarithmen ihre Dienste versagen, von denen verwandt werden, die über eine Rechenmaschine nicht verfügen.

Noch viel förderlicher als die Methode der „ossa NEPERI“ ist das *Promtuarium multiplicationis*. Auf reihenweis gelegte Lineale mit Ziffern werden andere, die mit Ausschnitten versehen sind, kolumnenweise gelegt. Jene entsprechen den Ziffern des Multiplicandus, diese denen des Multiplicators. Nach dem Legen der Lineale erhält man durch blofse Additionen in diagonaler Richtung das Produkt.

In der *Rhabdologia* kommt auch (S. 55) das erste gedruckte Beispiel einer abgekürzten Multiplikation vor.

Mehr als 200 Jahre nach NEPERS Tode wurden aus seinem Nachlafs noch Bruchstücke einer Rechenlehre und einer Algebra bekannt. Wir können daraus nur eine besondere Anweisung zum Subtrahieren erwähnen, nach der man jede Ziffer des Resultats selbständig bestimmt. Eine gedruckte Beschreibung dieses Verfahrens, welches die Astronomen benutzen, wenn sie von links nach rechts subtrahieren, hatte ich bisher ebensowenig wie Herr GRAVELAAR irgendwo angetroffen.

Ein Register würde den Nutzen des Werkes noch vermehren.

Berlin. M. KÖPPE.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1
2_3 (1901) : 4. — [Recension der Bände 1_3, 2_3 :] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 119—122. (P. Stäckel.) — [Recension des Bandes 2_3 :] Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 345—347. (F. Engel.) — [Recension des Heftes 2_3, : 2/3 :] Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 556—558. (G. Wertheim.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [2
1901 : 4. — 1902 : 1.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8°. [3
30 (1899) : 3.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman. Amsterdam. 8°. [4
10 : 1 (avril — octobre 1901). — [Anzeige :] Annuaire des mathém. 1901/1902, 465—468. (P. H. Schoute.)

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl. Paris, Naud 1902. [5
12°, (3) + XXII + 468 + (1) S. — [5 fr.] — [Recension :] L'enseignement mathém. 4, 1902, 61.

— — -

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Zweite Auflage (1901). [Recension oder kleine Bemerkungen :] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 441—443, 445—447. (G. Eneström, G. Vacca, M. Koppe.) — L'enseignement mathém. 3, 1901, 459—460. (J. Boyer.) — Mathesis 1_1, 1901, 250. (P. M.) — Monatsh. für Mathem. 13, 1902: Lit.-Ber. 9. — Zeitschr. für mathem Unterr. 32, 1901, 284. (G. Wertheim.) — 1^2 (1894). [Bemerkungen :] Jahresber. über die Fortschr. der class. Altertumswiss. 108, 1901, 60—66. (W. Schmidt.) [6

Zeuthen, H. G., Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Édition française revue et corrigée par

l'auteur, traduite par J. MASCART. Paris, Gauthier-Villars 1902. [7
8°, XIII + (1) + 296 S.

Konen, H., Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$. Leipzig, Hirzel 1901. [8
8°, (5) + 132 S. — [4 ℳ] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, 305—306. (E NETTO.)

Mach, E., Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt. Aufl. 4 (1901). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **22**, 1901, 3061—3062. — Monatsh. für Mathem. **13**, 1902; Lit.-Ber. 13. — Zeitschr. für mathem. Unterr. **32**, 1901, 453—456. (S. GÜNTHER.) [9

b) Geschichte des Altertums.

Kugler, F. X., Die babylonische Mondrechnung (1900). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient., 1901. 8 S. [10

Bürk, A., Das Āpastamba-Śulba-Sūtra, herausgegeben, übersetzt und mit einer Einleitung versehen. [11
Leipzig, Deutsche morgenländ. Gesellsch., Zeitschr. **55**, 1901, 543—591. — Über Herkunft und Entwickelung der ältesten indischen Geometrie (der Verfasser ĀPASTAMBA scheint etwa im 5. vorchristlichen Jahrh. gelebt zu haben). — Die im Titel erwähnte Übersetzung fehlt.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. III (1900). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{25}_2$, 1901, 85—90. (P. TANNERY.) [12

Schmidt, M. C. P., Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums. 1, 2 (1900—1901). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **22**, 1901, 2602—2603. [13

Carrara, B., I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. [14
Rivista di fisica (Pavia) **3**, 1901, 407—417; **4**, 1901, 36—54, 115—128, 208—220, 304—318.

*__Ziaja, J.,__ Zu Aristoteles' Lehre vom Lichte. Schrimm 1901. [15
4°. — Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Gymnasiums in Schrimm. — [Recension:] Beiblätter zu den Ann. der Phys. **25**, 1901, 562—563. (GD.)

Staigmüller, H., Herakleides Pontikos und das heliokentrische System. [16
Arch. für Gesch. d. Philosophie (Berlin) **15**, 1902, 141—165.

Simon, M., Euclid und die sechs planimetrischen Bücher (1901). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **22**, 1901, 3195. — Monatsh. für Mathem. **12**, 1901; Lit.-Ber. 47—48. [17

Schmidt, W., Physikalisches und Technisches bei Philon von Byzanz. [18
Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_3$, 1901, 377—383.

Heronis Alexandrini Opera omnia II: 1 (1901). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 79—81. (G. VAILATI.) [19

Hultsch, Fr., Die Sehnentafeln der griechischen Astronomen. [20
Das Weltall (Berlin) **2**, 1901, 49—55.

Förster, W., Zur Ehrenrettung des Ptolemaeus. [21
Das Weltall (Berlin) **2**, 1901, 16—18. — Über die astronomischen Leistungen des PTOLEMAEUS.

Heiberg, J. L., Anatolius s
premiers nombres. Macon 1
8°, 33 S. — Mémoire lu au cong
des sciences, Paris 1900. — Mit
französischer Übersetzung von P.

c) Geschichte des Mittel

Suter, H., Die Mathematiker und As
Araber und ihre Werke (1900).
Mathesis $\mathbf{1}_3$, 1901, 251.

Goeje, M. J. de, Notice bi
d'Ibn al-Haitham.
Haarlem, Soc. d. sc., Archives néer
668—670.

Hellmann, G., Zur Optik de
Linconiensis.
Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_3$, 1901, 443—

Curtze, M., Die Dunkelkammer (1
sion:] Deutsche Litteraturz. **22**, 19

Müntz, E., Léonard de Vinci
vants du moyen âge.
Revue scient. $\mathbf{16}_4$, 1901, 513—515.

d) Geschichte der neuere

Hoppe, E., Zur Geschichte der Fernw
[Recension:] Deutsche Litteraturz.
—371.

Birkenmajer, L. A., Mikołaj Koper
[Bemerkungen:] Wiadomości mat
252—254. (F. KUCHARZEWSKI, S. D

Birkenmajer, L. A., Marco Be
Kopernik, Wapowski, a najst
geograficzna polski.
Krakow, Akad. umiej., Rozprawy
—222 + Karte. — [Résumé:] A
umiej., Bulletin 1901, 63—71 + K
BIRKENMAJER.)

Frizzo, G., De numeris libri duo a
viomago, esposti ed illustrati (19
sion:] Periodico di matem. **17**, 1901,

*__Macrì, G.,__ Francesco Mau
vita e negli scritti. Messina
Freni 1901.
8°. — [Recension:] Bollett. di b
matem. 1901, 96.

Grofse, H., Historische Rechen
16. und 17. Jahrhunderts u
wicklung ihrer Grundgedank
Neuzeit. Ein Beitrag zur
der Methodik des Rechenu
Leipzig, Dürr 1901.
8°, 183 S. — [3, 60 ℳ] — [Recensi
Litteraturz. **22**, 1901, 2801, 3136.

*__Tychonis Brahe__ Astronomiae
mechanica. Ad fidem editi
pis edendum curavit et pr
B. HASSELBERG. Holmiae 19
4°, 16 + 84 S. + Porträt. — [50

*__Tychonis Brahe__ Operum p
nova stella, edidit regia soc
tiarum danica. Haunie 1901
4°. — [Recension:] Wiadom
1901, 267.

Delisle, L., Tychonis Brahe Astronomiae instauratae mechanica. [36
Journ. des sav. 1901, 79—87.

Bosmans, H., La trigonométrie de Tycho Brahé. [37
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1901. 19 S.

Albrecht, F. und **M.,** Die Reste der Sternwarten Tycho Brahes auf der Insel Hveen. [38
Das Weltall (Berlin) 2, 1901, 7—12, 21—25.

Grufs, G., [Über Tycho Brahe]. [39
Prag, Česk. akad., Věstnik **10**, 1901, 435—446. — Böhmisch.

Peprný, I., [Tycho Brahe in der böhmischen Litteratur]. [40
Časopis pro pěstov. mathem. **30**, 1901, 209—222. — Böhmisch.

Сребрянскій, Вл., Памяти Тихо Браге. [41
Vjestnik elem. matem. **26**, 1901, 159—163. — Srebranskij, Vl., Zum Andenken an Tycho Brahe.

***Studnička, F. J.,** Bericht über die astrologischen Studien des Reformators der beobachtenden Astronomie, Tycho Brahe. Prag 1901. [42
8°, 54 S.

T[hirion], J., Troisième centenaire de la mort de Tycho Brahe. [43
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_2, 1902, 248—259.

Bolton, H. C., Evolution of the termometer 1592—1743 (1900). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **22**, 1901, 2424. [44

Bosmans, H., Le traité des sinus de Michiel Coignet (1901). [Recension:] *Amsterdam*, Wisk. Genoots., Nieuw Archief 5_2, 1901, 194—196. (N. L. W. A. Gravelaar.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 62. — Studien (Utrecht) **57**, 1901, 275—280. (J. A. van Dijck.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{26}_2$, 1902, 31—32. (A. F.) [45

Vacca, G., Sui manoscritti inediti di Thomas Harriot. [46
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1902, 1—6.

Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume XI. Firenze, Barbera 1901. [47
4°, 636 + (1) S. — Herausgegeben von A. Favaro. — Dieser Band enthält den Briefwechsel 1611—1613.

Tannery, P., Galilei et les principes de la dynamique. [48
Revue génér. d. sc. **12**, 1901, 330—338. — [Recension:] Beibl. zu den Ann. der Physik **25**, 1901, 742—743. (Gd.)

Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik. (1899). [Recension:] Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 347—348. (M. Cantor.) [49

Wislicenus, W. F., Über die Mondkarten des Langrenus. [50
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 384—391.

Bosmans, H., Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent publiées avec des notes bibliographiques sur les œuvres de Grégoire de Saint-Vincent et les manuscrits de Della Faille. [51
Bruxelles, Soc. scient., Annales **26**:2, 1901. 19 S.

Perrier, E., Pascal, créateur du calcul des probabilités et précurseur du calcul integral. [52
Revue génér. d. sc. **12**, 1901, 482—490.

Favaro, A., Il metro proposto come unità di misura nel 1675. Macon 1901. [53
8°, 17 S. — Mémoire présenté au congrès d'histoire des sciences, Paris 1900.

Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences. Tome neuvième. Correspondance 1685—1690. La Haye, Nijhoff 1901. [54
4°, (5) + 662 + (1) S. + Porträt + 2 Pl.

Korespondencya Kochánskiego i Leibniza według odpisów E. Bodemanna, po raz pierwszy podana do druku przez S. Dicksteina. [55
Praze matem.-fizyczne **12**, 1901, 225—278. — Der Briefwechsel zwischen Kochansky und Leibniz, nach den Abschriften von E. Bodemann, herausgegeben von S. Dickstein.

Schur, W., Beiträge zur Geschichte der Astronomie in Hannover. [56
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Festschrift 1901 (Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens), 91—152 + 4 Porträttafeln. — [Recension:] Deutsche Littteraturz. **22**, 1901, 3272—3273.

Eneström, G., Über die Summierung zweier trigonometrischer Reihen. [57
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 444. — Anfrage.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). [Recension:] L'enseignement mathém. **3**, 1901, 460—462. (J. H. Graf.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{25}_2$, 1901, 131—132. (E. E.) — Monatsh. für Mathem. **13**, 1902; Lit.-Ber. 9. — Nouv. ann. de mathém. 2_4, 1902, 40—44. (H. B.) [58

Mascheroni, L., La geometria del compasso. Nuova edizione pubblicata di G. Fazzari (1901). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 114. (G. L.) [59

Dickstein, S., Przyczynek do historyi zasad rachunku nieskończonostkowego (1899). [Recension:] Praze matem.-fizyczne **12**, 1901, 287—288. (K. Z.) [60

Günther, S., Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im neunzehnten Jahrhundert (1901). [Recension:] Naturwiss. Rundschau **17**, 1902, 25—26. (P. R.) [61

***Mangoldt, H. von,** Bilder aus der Entwickelung der reinen und angewandten Mathematik während des neunzehnten Jahrhunderts mit besonderer Berücksichtigung des Einflusses von Carl Friedrich Gauss. Festrede. Aachen 1900. [62
8°, 22 S.

***Vries, H. de,** De projective meetkunde en hare grondleggers. Amsterdam, Dorssen 1901. [63
8°, 30 S.

***Weber, H.,** Über die Entwickelung unserer mechanischen Naturanschauung im 19. Jahrhundert. [64
Das Stiftungsfest der Universität Strafsburg (Strafsburg 1900). 8°, 23 S. — [Recension:] Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 353. (M. Cantor.)

Whittaker, E. T., Report on the progress of the solution of the problem of three bodies (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, 306. [65

***Levitsky, G.,** [Die Astronomen der Universität Jurjeff in den Jahren 1802—1894.] [66
Jurjeff, Univ., Acta 1900. 224 S. — Russisch.

McGee, W. J., A century of progress in acoustics. [67
Science (New York) 14_2, 1901, 987—997.

Gauss, C. F., Werke. Band VIII (1900). [Recension:] Journ. d. sav. 1900, 668—678. [68

Klein, F., Gauss' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814. [69
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Festschrift 1901 (Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens), 1—44 + Porträt + Facsim.

Dedekind, R., Gauss in seiner Vorlesung über Methode der kleinsten Quadrate. [70
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Festschrift 1901 (Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens), 45—90.

Cantor, M., Beiträge zur Lebensgeschichte von Carl Friedrich Gauss. Macon 1901. [71
8°, 20 S. — Mémoire présenté au congrès d'histoire des sciences, Paris 1900.

Brocard, H. et **Mannheim, A.** [Renseignements sur Bobilier (1797—1832).] [72
L'intermédi. des mathém. 8, 1901, 329—330.

Brückner, J. M., Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache (1897). [Recension:] Arch. der Mathem. 1_3, 1901, 187. (E. Jahnke.) [73

Lampe, E., Zwei Briefe von C. G. J. Jacobi, die in den gesammelten Werken desselben nicht abgedruckt sind. [74
Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 253—256

Памяти М. В. Остроградскаго. [75
Vjestnik elem. matem. 26, 1901, 97—101 [mit Porträt]. — Zum Andenken an M. V. Ostrogradskij.

Gundelfinger, S., Drei Briefe Aronholds an Hesse; Briefentwurf von Hesse an Aronhold. [76
Journ. für Mathem. 124, 1901, 59—82.

Engel, F., Sophus Lie (1900). [Recension:] L'enseignement mathém. 3, 1901, 305—306. (H. F.) [77

Wölffing, E., Nachtrag zu dem Ergänzungsverzeichnis zum E. Czuberschen Bericht über Wahrscheinlichkeitsrechnung. [78
Stuttgart, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. 3_2, 1901, 57—63, 93—95.

Halsted, G. B., Supplementary report on non-Euclidian geometry. [79
Science (New York) 14_2, 1901, 705—717.

Müller, R., Historische und kritische Bemerkungen über den Begriff der ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte. [80
Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 342—344.

Kaufmann, W., Die Entwickelung des Elektronenbegriffes. [81
Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 557—559, 569—571. — Vortrag an der Naturforscherversammlung in Hamburg 1901.

Wölffing, E., Verzeichnis von Abhand[illegible]lungen aus der angewandten Mathe[illegible]matik, die im Jahre 1900 in technische[illegible]n Zeitschriften erschienen sind. [8[illegible]2
Zeitschr. für Mathem. 46, 1901, 501—506.

e) Nekrologe.

Giulio **Ascoli** (1843—1896). [8[illegible]3
Periodico di matem. 4_2, 1901, 144—151. (G. R[illegible]boni.)

Eugenio **Beltrami** (1835—1900). [8[illegible]4
Pavia, Università, Annuario 1900/1901. 18[illegible]. (G. A. Maggi.) — Biblioth. Mathem. 2_3, 190[illegible]1, 392—440 + Porträt. (G. Loria.) — Mathesis 1[illegible], 1901, 247—248. (P. M.)

Thomas **Craig** (1855—1900) [8[illegible]5
Baltimore, Johns Hopkins univ., Circulars 1[illegible], 1900, 67.

Guelfo **del Prete** (1872?—1901). [8[illegible]6
Il Pitagora 8, 1901, 32. — Periodico di mate[illegible]. 4_2, 1901, 160 (A. Giacomini.)

Richard **Doergens** (1839—1901). [8[illegible]7
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 19[illegible]1, 57—68 [mit Porträt und Schriftverzeichni[illegible]]. (E. Lampe.)

Charles **Graves** (1812?—1899). [8[illegible]8
London, Royal soc., Year-Book 1901, 221.

Charles **Hermite** (1822—1901). [8[illegible]9
London, Mathem. soc., Proceedings 33, 1901, 4[illegible]05—407. (G. B. Mathews.). — *Manchester*, Phil[illegible]soc., Memoirs 45, 1901, 38—39. — *Paris*, Ac[illegible]d. d. sc., Comptes rendus 133, 1901, 1046—10[illegible]. (F. A. Fouqué.) — *Torino*, Accad. d. sc., A[illegible]ti 36, 1901, 245—250. (E. d'Ovidio.) — Ac[illegible]ta Mathem. 25, 1901, 87—111. (Zweiter Abdru[illegible]k des Nekrologes von E. Picard in den „Anna[illegible]es de l'école normale".) — Annuaire des mathé[illegible] 1901/1902, XI—XXII [mit Porträt]. (E. Bor[illegible])

Ernest de **Jonquières** (1820—1901). [[illegible]0
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scie[illegible]t. 1_3, 1902, 349—351. — *Paris*, Acad. d. sc., Compt[illegible]es rendus 133, 1901, 1049. (F. A. Fouqué.) [illegible] L'enseignement mathém. 3, 1901, 447—4[illegible]. (C. A. L.)

Gustav **Karsten** (1820—1900). [9[illegible]1
Berlin, Deutsche physikal. Gesellsch., Verhand[illegible] 2, 1900, 147—159. (B. Schwalbe.) — *Kiel*, Naturw. Verein, Schriften 12, 1900. 6 S. (L. Weber.) — Naturwiss. Rundschau 15, 1900, 413—414. (B. Schwalbe.)
L. Weber, Zum Gedächtnisse Gustav Karstens. Kiel 1900. 8°, 24 S. + Porträt.

Rudolf **König** (1833—1901). [92
Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 671. (J. S.)

Sophus **Lie** (1842—1899). [93
London, Royal soc., Year-Book 1901, 194.

Valerian **Ligin** (1846—1900). [94
Odessa, [Technische Gesellschaft] 1900, Nr. 1:44—49; Nr. 2:1—14. — Russisch

Martin **Pokorný** (1836—1901?). [95
Časopis pro pěstov. mathem. 30, 1901, 81—100. (A. Pánek.)

Thomas **Preston** (1860—1900). [96
Americ. journ. of sc. 9_4, 1900, 395. — Nature 61, 1900, 474—475.

Henry Augustus **Rowland** (1848—1901). [97
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 205—231. (J. Thirion.) — Science (New York) 13_2, 1901, 865—877. (T. C. Mendenhall.)

Oskar Schlömilch (1823—1901). [98
Bollett. di bibliogr. d sc. matem. 1901, 124—126.

Peter Guthrie Tait (1831—1901). [99
Beiblätter zu den Ann. d. Phys. 25, 1901, 1043—1044. (GD.) — Nature 64, 1901, 305—307. (G. CHRYSTAL.)

Johann Wendel Tesch (1840—1901). [100
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw Archief 5_2, 1901, 310—316 [mit Porträt]. (P. H. SCHOUTE.)

f) Aktuelle Fragen.

Brodmann, Der internationale Katalog der naturwissenschaftlichen Litteratur. [101
Centralbl. für Bibliotheksw. 1901, 498—500.

Müller, Felix, Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. I, II (1900—1901). [Recension:] Arch. der Mathem. 2_3, 1901, 205. (M. CANTOR.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 114—116. (G. L.) — Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 3195. (E. NETTO.) — Mathesis 1_3, 1901, 251. — Monatsh. für Mathem. 13, 1902; Lit.-Ber. 19. — Revue génér. d. sc. 12, 1901, 673. [102

Bobynin, V. V., L'enseignement mathématique en Russie (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 2231. [103

Hatzidakis, N. J., Sur l'état actuel des mathématiques supérieures en Grèce. [104
L'enseignement mathém. 3, 1901, 397—400.

Stäckel, P., Über die Entwicklung des Unterrichtsbetriebes in der angewandten Mathematik an den deutschen Universitäten. [105
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1901, 26—37.

[Die amerikanische Mathematiker-Versammlung in Denver 1901.] [106
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1901, 73—74. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 8_2, 1901, 71—81. (G. A. MILLER.) — Science (New York) 14_2, 1901, 393—403. (G. A. MILLER.)

[Die deutsche Mathematiker-Versammlung in Hamburg 1901.] [107
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1901, 4—10. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 8_2, 1901, 113—122. (C. M. MASON.) — Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 552—555. (J. B. MESSERSCHMITT, O. PUND.)

[Die englische Mathematiker-Versammlung in Glasgow 1901.] [108
Nature 64, 1901, 586—587. (C. H. LEES.)

[Die russische Mathematiker-Versammlung in St. Petersburg 1901.] [109
Vjestnik elem. matem. 27, 1902, 1—7, 25—30. (D. V. KAHAN.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— P. Arnold in Los Angelos zum Professor der Mathematik an der Universität von Süd-Californien daselbst.

— Dr. H. Barnes zum Professor der Physik an der Universität von Toronto.

— Privatdocent G. Bohlmann in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor J. E. Boyd zum Professor der Mathematik an der Universität von Ohio.

— T. G. I'a Bromwich zum Professor der Mathematik am „St. Johns college" in Cambridge.

— Professor H. L. Callendar zum Professor der Physik am „Royal college of science", South Kensington.

— Privatdocent P. Cousin in Bordeaux zum Professor der Mathematik an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Professor A. C. Dixon zum Professor der Mathematik am „Queens college" in Belfast.

— Professor Th. C. Esty in Amherst zum Professor der Mathematik an der Universität in Rochester.

— Privatdocent E. Fagnart in Gent zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. J. H. Hall zum Professor der Physik am „Illinois college" in Jacksonville.

— Privatdocent Hammert in Innsbruck zum Professor der Physik daselbst.

— Professor N. J. Hatzidakis in Athen. zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdocent F. Hausdorff in Leipzig zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Professor R. Haussner in Gießen zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Karlsruhe.

— Professor K. Heun in Berlin zum Professor der Mechanik an der technischen Hochschule in Karlsruhe.

— A. M. Kenyon in Lafayette zum Professor der Mathematik an der „Purdue university" daselbst.

— E. Lasker zum Professor der Mathematik am „New College" in Manchester.

— F. B. Littell an der Marinesternwarte in Washington zum Professor der Mathematik an der Marineschule.

— Professor G. Mie in Karlsruhe zum Professor der Physik an der Universität in Greifswald.

— Privatdocent Chr. Moser in Bern zum Professor der Versicherungswissenschaft an der Universität daselbst.

— Dr. D. A. Murray in Ithaca zum Professor der Mathematik am „Dalhousie college" in Halifax (Nova Scotia).

— Privatdocent E. Neumann in Halle zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität in Breslau.

— Dr. L. von Prantl in Nürnberg zum Professor der technischen Mathematik an der Universität in Jena.

— Professor J. Precht in Heidelberg zum Professor der Physik an der technischen Hochschule in Hannover.

— W. M. Reed zum Professor der Astronomie an der Universität in Princeton.

— Privatdocent K. Schwarzschild zum Professor der Astronomie an der Universität in Göttingen.

— Dr. H. Simon in Frankfurt am Main zum Professor der Physik und Elektrotechnik an der Universität in Göttingen.

— Privatdocent J. Sommer in Göttingen zum Professor der Mathematik an der landwirtschaftlichen Akademie zu Bonn-Poppelsdorf.

— Dr. P. Weiss zum Professor der Physik am Polytechnikum in Zürich.

— Privatdocent A. Wiman in Lund zum Professor der Mathematik an der Universität in Upsala.

— Professor E. M. Wood in Baldwin (Kansas) zum Professor der Mathematik und Astronomie am „Albion college“ (Michigan).

— Privatdocent L. Zehnder in München zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. K. Zeissig zum Professor der Physik an der technischen Hochschule in Darmstadt.

Todesfälle.

— Charles A. Bacon, Professor der Astronomie am „Beloit college“, gestorben den 6. November 1901, 41 Jahre alt.

— Henry Brenner, Professor der Mathematik und Astronomie am „Albion college“ in Michigan, ertrunken im „Lake Orion“ den 14. August 1901.

— Cato Maximilian Guldberg, Professor der Mathematik an der Universität in Kristiania, geboren in Kristiania den 11. August 1836, gestorben daselbst den 14. Januar 1902.

— Henry G. Hennessy, Professor der angewandten Mathematik am „Royal college“ in Dublin, geboren den 19. März 1826, gestorben in Dublin den 8. März 1901.

— Johannes Pernet, Professor der Physik am Polytechnikum in Zürich, geboren in Berlin den 18. Dezember 1845, gestorben in Zürich den 15. Februar 1902.

— Clémence Royer, Verfasserin physikalischer und astronomischer Arbeiten, geboren in Nantes den 21. April 1830, gestorben in Paris 1902.

— Charles Antony Schott, am geodätischen Institut in Washington, geboren in Mannheim den 7. August 1826, gestorben in Washington den 31. Juli 1901.

Demnächst erscheinende Werke.

— Herr H. G. Zeuthen hat jetzt seine Arbeit über die Geschichte der Mathematik des 16. und 17. Jahrhunderts beendet, und wird dieselbe demnächst in dänischer Sprache veröffentlichen.

— Die in der Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 376 erwähnte bibliographische Arbeit des Herrn E. Wölffing ist jetzt im Manuskript fast fertig und wird am Ende dieses Jahres als besonderer Band der Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften erscheinen. Die Anordnung der Stichwörter, deren Zahl 313 beträgt, wird nicht alphabetisch, sondern systematisch sein. Voraus geht eine Einleitung über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrh. und ein alphabetisches Stichwortverzeichnis; am Schluſs kommt noch ein Autoren-Register. Der ganze Umfang der Arbeit wird etwa 30 Druckbogen betragen. — Eine entsprechende Bibliographie der angewandten Mathematik ist schon von Herrn Wölffing in Aussicht genommen und wird auch in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften erscheinen.

Mathematisch-historische Arbeiten in Vorbereitung.

— Herr L. Königsberger in Heidelberg bereitet eine groſse Helmholtz-Biographie vor. Auf Grund des gesamten wissenschaftlichen Nachlasses und des Briefwechsels des Verstorbenen wird eine eingehende Darstellung seines Lebens und seiner wissenschaftlichen Wirksamkeit gegeben werden. Für die Bearbeitung des umfangreichen Materials ist ein Zeitraum von etwa zwei Jahren in Aussicht genommen.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Société scientifique de Bruxelles.* Concours de l'année 1902. Faire une étude approfondie des travaux de Simon Stevin sur la mécanique, en les comparant aux travaux de Galilée, de Pascal et d'autres savants de la même époque.

— *Istituto Lombardo di scienze e lettere in Milano.* Tema di premio per l'anno 1903. Portare un contributo od un perfezionamento notevole ed originale alla teoria dei gruppi di trasformazioni, fondata specialmente da Lie e sviluppata nell' ultimo quarto di secolo.

— *Société hollandaise des sciences à Haarlem.* Concours de l'année 1903. Au milieu du 17ᵉ siècle il s'est développé au Japon (voir Cantor, *Vorlesungen über*

Geschichte der Mathematik Bd. III, 1898, p. 646—650 et aussi Revue semestrielle des publications mathématiques, t. VI, 2e partie, p. 18—23) une science mathématique particulière, dont on ne sait pas au juste jusqu'à quel point elle doit son origine à des influences européennes. Si une telle influence a existé, il n'est pas improbable que la langue hollandaise ait servi de véhicule, de sorte que cette influence aurait émané de travaux hollandais originaux ou traduits. Quoiqu'il en soit, la Société demande une étude relative à la nature et le degré de développement de cette science japonaise, en même temps qu'une recherche de ses rapports avec la science européenne.

Vermischtes.

— La commission du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques vient de publier son rapport pour l'année 1901. Il en résulte que 11 séries de fiches (= environ 11 000 titres) ont été mises en vente, que la 12e série est actuellement sous presse, et que la 13e série sera publiée dans le cours de l'année 1902. La commission a encore environ 10 000 fiches manuscrites dans les cartons, et elle espère pouvoir faire imprimer en 1903 les 14e et 15e séries. — Il a été décidé que les travaux de dépouillement seront poussés jusqu'en 1900 inclusivement, de manière à comprendre le 19e siècle tout entier.

— Das deutshe Bureau für internationale Bibliographie in Berlin hat im Herbst 1901 begonnen, eine Bibliographie der deutschen mathematischen
turwissenschaftlichen Litteratur
zugeben. Die Bibliographie e
wöchentlich in Heften von etw
Druckbogen Umfang, und enthält
licher Ordnung, nach dem Schem
für den internationalen naturwisse
lichen Katalog festgestellt ist, d
der neuerschienenen deutschen Ze
tenartikel und selbständig pub
Schriften.

— Mit dem Anfange des Jahr
hat die Deutsche physikalische
schaft begonnen, ein halbmonatlic
sikalisches Litteraturverzeichnis
zugeben. Dies Verzeichnis, das
Herren K. Scheel und R. Assma
giert wird, bringt gleich nach ih
scheinen die Titel der physik
Publikationen nach Materien geo

— Der Begründer und bisherige
geber der Zeitschrift für ma
tischen und naturwissens
lichen Unterricht, Herr J. C. V
mann in Leipzig hat die Leitung d
schrift niedergelegt, und Herr H. S
in Halle hat dieselbe mit dem
des Jahres 1902 übernommen.

— Die 11. Versammlung russisc
turforscher fand in St. Petersburg
Januar 1902 (= 20.—30. Decemb
a. St.) statt. Die Sektion für Mat
und Mechanik hielt ihre Sitzu
—11. Januar.

— Eine kurze Übersicht (17 Druc
der Verhandlungen des 2. interna
Mathematiker-Kongresses in Par
vom Generalsekretär des Kongre
sammengestellt, ist jetzt veröf
worden.

Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure.

Par Paul Tannery à Pantin.

1. On connaît assez l'influence exercée, dans l'un des domaines de la haute analyse, par les problèmes que les phénomènes acoustiques posent aux mathématiciens. Depuis la première impulsion donnée par Jean Bernoulli, à propos de la théorie des cordes vibrantes, c'est là une matière devenue classique[1]), quoiqu'elle ne soit point encore épuisée. Mais, sur un terrain beaucoup plus élémentaire, la découverte de la première loi de physique mathématique qui ait été connue, celle qui concerne les intervalles musicaux, n'a-t-elle pas, elle aussi, joué un rôle dans le développement de la mathématique grecque, qui alors sortait à peine de son berceau? Des quatre branches que l'Ecole de Pythagore avait constituées, des quatre sciences sœurs[2]), qui devaient plus tard former le quadrivium des Universités au moyen âge, il en est une que l'histoire des mathématiques néglige un peu trop systématiquement, comme je vais essayer de le montrer. Et tout d'abord, j'examinerai si, dans les *Eléments* d'Euclide eux-mêmes, il ne subsiste pas au moins une trace de la doctrine musicale des Pythagoriens.

2. La part faite à chacune des quatre sciences dans les *Eléments* est en tout cas très inégale. Si la *Géométrie* forme l'objet principal, si l'*Arithmétique* a fourni cependant trois livres (VII, VIII, IX), la *Sphérique*, cependant déjà passablement développée, n'a, pour ainsi dire, pas été mise à contribution, puisqu' Euclide ne traite de la sphère que pour établir, d'après Eudoxe, le principe fondamental de la mesure de son volume, et pour enseigner, probablement d'après Théétète, l'inscription des polyèdres réguliers. A première vue, toute notion d'origine proprement musicale semble de même exclue des *Eléments:* en tout cas, nous ne pouvons évidem-

1) Elle vient d'être, de la part de H. Burkhardt, l'objet d'une importante monographie conçue suivant l'ordre historique et publiée dans le Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **10**: 2, 1901.

2) Archytas, dans Nicomaque, *Arithm.* I, 3.

[illegible] le Livre V [illegible] à la théorie des rapports et dans le Livre VI [illegible] applications de cette théorie.

[illegible] la notion [illegible] rapport [illegible] arithmétique soit en géométrie, cette notion remonte [illegible] à la période pythagoricienne [illegible] [illegible]

Cependant, il est incontestable que la théorie des rapports [illegible] a été élaborée en grande partie dans les écrits [illegible] à propos de la théorie des intervalles musicaux [illegible] Boèce, Mus. III, 11, nous a conservé [illegible] démonstration d'Archytas, en forme euclidienne déjà bien arrêtée, [illegible] sur l'impossibilité d'intercaler un nombre moyen proportionnel entre deux termes dans le rapport de deux nombres consécutifs, problème essentiellement musical. C'est de même d'après la tradition remontant à ces écrits, que les néopythagoriciens postérieurs à l'ère chrétienne, à commencer par Nicomaque, reconnaissent comme étant du domaine proprement musical tout ce qui concerne le nombre en relation (rapports, proportions); et si Nicomaque traite néanmoins ce sujet dans son *Introduction arithmétique*, Théon de Smyrne, tout au contraire, le réserve pour la section musicale de son Traité mathématique.

Si Eudoxe, lorsqu'il a donné à la théorie des rapports la forme conservée dans le Livre V des *Éléments*, devait donc disposer de matériaux empruntés à des écrits traitant de musique aussi bien qu'à d'autres traitant d'arithmétique ou de géométrie. Mais on ne peut songer à faire un départ entre ces divers éléments, et même, eu égard au but que poursuivait Eudoxe (constituer une théorie indépendante de la circonstance que les termes du rapport soient commensurables ou non), on pourrait présumer que les sources géométriques ont dû avoir pour lui un intérêt prédominant.

Cependant sa terminologie offre une singularité très-remarquable; les rapports n'y sont pas conçus comme des grandeurs dont les nombres homonymes (entiers ou fractionnaires) expriment la mesure. Quand ces nombres se multiplient, les rapports forment un composé par addition[1]; quand les deux termes d'un rapport sont élevés à la seconde ou troisième puissance, le rapport est dit doublé, triplé, etc.

1) Euclide, *Éléments* VI, 23, etc. (la définition 5 du même livre ne peut être invoquée). Le vrai sens de la terminologie est le suivant: si l'on a une suite

Il est inutile d'insister sur l'importance que devait avoir l'idée qui a présidé à l'adoption de cette nomenclature; c'est sous son inspiration qu'au XIV^e^ siècle Nicole Oresme devait concevoir des rapports d'ordre non entier, c'est à dire les exposants fractionnaires; c'est encore cette nomenclature que suivait Napier quand il choisissait le mot *logarithme* (nombre du rapport); et si la forme sous laquelle il a présenté son invention en masque la première origine, ce choix du terme technique ne permet point de la méconnaître.

Tout cela est bien connu, mais ce qui n'a point été remarqué, que je sache, c'est que, si l'on remonte au delà d'Euclide, l'idée dont il s'agit ne peut être regardée comme ayant une source, soit géométrique, soit arithmétique. Pour l'objet propre des *Eléments*, il eût certainement été plus simple et plus intelligible de dire, par exemple: «Deux triangles (pyramides) sont dans le rapport tétragonique (cubique) de leurs côtés homologues.» A tout le moins, Hippocrate de Chios[1]) dit que les segments semblables de cercle ont entre eux le même rapport que leurs bases en puissance, c'est à dire que les carrés de leurs bases; car il ne connaît point encore cette expression de rapport doublé.

4. En arithmétique, à la vérité, nous sommes aujourd'hui habitués à considérer la notion du logarithme comme dérivant directement de celle des progressions de puissances entières. Mais précisément les Grecs n'ont jamais désigné les puissances d'après leurs numéros d'ordre successifs; ils employaient des expressions empruntées à la géométrie, conformément à la nomenclature de Diophante, qui peut remonter jusqu'à l'Ecole de Pythagore.[2]) D'autre part, non seulement les formules euclidiennes pour les rapports sont étrangères aux arithméticiens grecs, mais elles embarrassent singulièrement les commentateurs qui veulent expliquer les opérations numériques à faire pour ajouter deux rapports ou retrancher l'un de l'autre (c'est-à-dire multiplier les nombres homonymes ou diviser l'un par l'autre).[3]) Enfin, pour éviter la même confusion et le même embarras dans l'enseignement élémentaire, les modernes ont dû abandonner la termi-

termes (nombres ou grandeurs) $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$, le rapport $\frac{a_1}{a_n}$ est composé des rapports $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$; le rapport $\frac{a^2}{b^2}$ est composé des rapports $\frac{a^2}{ab}$ et $\frac{ab}{b^2}$ qui sont égaux à $\frac{a}{b}$; il est donc dit double de ce dernier rapport.

1) Simplicius, *Phys.* éd. Diels, p. 61: *ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει.*

2) Hippolyti *Philosophumena* (*Doxogr. graeci* éd. Diels, p. 551—552).

3) Voir notamment (Revue de philologie, 7, 1883, p. 82—93) le fragment attribué à Domninos, et mes remarques sur ce fragment (ibid., 9, 1885, p. 132—136).

nologie euclidienne, et considérer le rapport comme mesuré par le nombre homonyme. Il y a là une preuve suffisante de l'étrangeté, au point de vue arithmétique, de la conception grecque.

Tout au contraire, en musique, où les intervalles correspondant à des rapports numériques se comportent, pour leur composition et leur répétition, comme les logarithmes de ces rapports (dans le système de base 2, si l'on prend l'octave pour unité), les formes de langage euclidiennes sont directement intelligibles, et apparaissent comme tout à fait naturelles. C'est ainsi que les égalités:

$$(1)\quad \frac{2}{1} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}, \qquad \text{et} \qquad (2)\quad \frac{2}{1} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{9}{8}$$

se transcrivent immédiatement en musique:

(1) L'octave est composée d'une quinte et d'une quarte,

(2) L'octave est composée de deux quartes et d'un ton majeur,

propositions qui remontent au temps de PYTHAGORE.

N'y a-t-il point là une preuve suffisante que l'origine de la conception grecque de la mesure du rapport est essentiellement musicale, et l'importance du rôle de la musique dans le développement de la mathématique pure ne doit-elle pas être estimée d'après l'importance capitale de cette conception?[1])

5. Cependant ce n'est pas simplement à l'introduction de cette conception qu'il faut limiter ce rôle; je vais du moins essayer de montrer qu'il a également été considérable dans l'élaboration de la notion de l'incommensurable, telle que les Grecs l'ont constituée, et aussi bien dans la création des procédés de calcul pour l'approximation de la valeur des racines carrées. Mais pour exposer cette thèse, je suis obligé à un *excursus* pour expliquer en quoi consistait le problème mathématique essentiel de la théorie des intervalles musicaux chez les Grecs.

Il s'agissait de la composition du tétracorde, c'est à dire de l'ensemble de quatre notes dont les deux extrêmes diffèrent d'une quarte, et dont de plus l'inférieure est la première d'un des deux demi-tons de l'octave. Cette dernière condition a été imposée pour ramener au type dorien les autres gammes, lydienne, phrygienne, etc., en usage aux VI^e et V^e siècles avant notre ère. Ce travail de réduction, indispensable pour l'établissement d'une notation commune, ne paraît pas avoir commencé avant la

1) Il est inutile de fournir des exemples de la correspondance entre la composition des intervalles et celle des rapports numériques, d'après des auteurs grecs; c'est un lieu commun chez tous ceux qui ne se bornent pas à copier ARISTOXÈNE; cependant il convient de remarquer qu'on ne peut invoquer un texte précis antérieur à EUDOXE, si le fragment musical de PHILOLAOS (1, MULLACH) est, comme je le crois, aussi apocryphe que les autres.

seconde moitié du V^e^ siècle; vers la fin du IV^e^ siècle, il était accompli par Aristoxène, dont cependant l'oeuvre fut quelque peu remaniée postérieurement. Finalement il devait aboutir à faire perdre tout caractère propre aux octaves barbares, et leurs noms ne devaient plus désigner que des tons différents sur la même échelle dorienne.

En tenant compte de la seconde condition, si nous voulons retrouver dans notre gamme moderne, sans accidents de dièze ou de bémol, les tétracordes grecs, il est commode de ranger les notes à partir du *la* par exemple[1]):

$$la_0 \; si_0 \; \boldsymbol{UT_1} \; \boldsymbol{RE_1} \; mi_1 \; \boldsymbol{FA_1} \; \boldsymbol{SOL_1} \; la_1$$

C'est l'octave du type hypodorien (Cléonide = Pseudo-Euclide). Les notes en italique correspondent aux cordes *fixes* du système grec; $la_0 \, mi_1$ est une quinte; donc $mi_1 \, la_1$ une quarte; $si_0 \, mi_1$ est également une quarte; donc $la_0 \, si_0$ est un ton majeur.

Les notes en petites capitales, intermédiaires dans l'un ou l'autre tétracorde, correspondent à des cordes que les Grecs appelaient *mobiles;* nous allons voir pourquoi. Les deux tétracordes sont rigoureusement composés de la même façon, à savoir en montant

si UT ou *mi FA*, demi-ton majeur, $\frac{16}{15}$

UT RE ou *FA SOL*, ton majeur, $\frac{9}{8}$

RE mi ou *SOL la*, ton mineur, $\frac{10}{9}$.

$$\frac{4}{3} = \frac{16}{15} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9}.$$

Mais de même que nous pouvons diéser ou bémoliser les notes de notre gamme selon les lois de la tonalité, les Grecs faisaient varier leurs cordes mobiles, et cela avec une liberté beaucoup plus grande, sauf à conserver la même composition dans les deux tétracordes. Théoriquement, d'après Aristoxène, la variation n'était soumise qu'à deux conditions: que les intervalles les plus faibles fussent placés à la partie inférieure du tétracorde; qu'aucun d'eux ne descendit au dessous du plus petit intervalle modulable qu'il évaluait à un quart de ton; mais en principe, ils pouvaient avoir toute valeur, rationelle ou irrationelle.

---

1) Il faut bien entendre que, malgré ce changement d'ordre, il s'agit toujours de la gamme du mode majeur, ton d'*Ut* et non pas, malgré l'apparence, de la gamme du ton de *La* mineur; dans celle-ci en effet la note *Re,* pour être la quarte de la tonique, doit être baissée d'un comma; alors le ton majeur et le ton mineur sont intervertis dans le premier tetracorde et il n'est plus exactement composé comme le second; chez tous les théoriciens antérieurs à Rameau, l'interversion existe au reste pour les deux modes, et en cela notre gamme n'était pas absolument conforme au type grec, comme elle l'est maintenant.

En pratique, les combinaisons, rangées sous trois genres (enharmonique, chromatique, diatonique) que l'on subdivisait en *nuances* (χρώματα) étaient passablement nombreuses, et à côté de notre tonalité, en offraient beaucoup d'autres qui nous sont absolument étrangères, et où les règles d'ARISTOXÈNE n'étaient pas d'ailleurs rigoureusement observées. Les musiciens qui se contentaient de son enseignement évaluaient d'ailleurs les intervalles à son exemple, en fractions du ton (ou ton et fractions), le ton étant considéré, suivant le principe du tempérament, comme le sixième de l'octave (donc la quarte était regardée comme valant deux tons et demi).

6. Quant aux travaux des *canoniciens*, qui poursuivirent l'étude de la correspondance entre les rapports numériques et les intervalles musicaux, nous en savons ce que PTOLÉMÉE nous en a conservé dans ses *Harmoniques*. D'après lui, DIDYME, auteur qui vécut vers le milieu du 1^er^ siècle de notre ère, dans un écrit *sur la différence entre les Aristoxéniens et les Pythagoriciens*, aurait posé comme principe pythagoricien que les intervalles du tétracorde doivent exclusivement correspondre à des rapports *épimores*, c'est à dire de la forme $\frac{n+1}{n}$. Si ce principe *a priori* est admis, comme il l'est par PTOLÉMÉE, la question de la composition du tétracorde revient tout d'abord au problème mathématique suivant: *Déterminer toutes les manières possibles de décomposer le rapport* $\frac{4}{3}$ *en un produit de trois rapports de la forme* $\frac{n+1}{n}$. Il y avait ensuite, par des essais acoustiques sur le monocorde, à examiner l'effet mélodique de chacune de ces décompositions et à déterminer celles qui représentaient les *nuances* réellement pratiquées.

FERMAT (*Œuvres*, t. I, p. 397) n'a pas trouvé le problème mathématique indigne d'être généralisé et traité méthodiquement, ce que cependant il a laissé à faire. En tout cas, les anciens étaient parfaitement capables de le résoudre par tâtonnements. Entre les 24 combinaisons théoriquement possibles, PTOLÉMÉE en choisit six, parmi lesquelles se trouve, sous la désignation de *diatonique syntone*, celle qui répond à notre gamme du mode majeur, et qui devait après lui triompher définitivement des autres échelles concurrentes. Avant lui, DIDYME avait déjà proposé la même décomposition, mais en intervertissant l'ordre des deux tons majeur et mineur, ce qui revient à substituer au tétracorde *mi FA SOL la* de notre ton d'*Ut* majeur, si nous le prenons comme type, le tétracorde *mi FA sol la*, qui appartient au ton de *Re* mineur.[1])

1) On remarquera que, avec les symboles que j'emploie, les notes imprimées en mêmes caractères appartiennent à une même série de quintes justes; et que cell

7. Très certainement au reste, le prétendu principe pythagoricien mis en avant par Didyme n'appartient pas à l'ancienne école; il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que, d'une part, comme nous le verrons, Archytas ne s'y est nullement conformé, dans un cas où cela lui aurait été tout indiqué, que d'un autre côté, ce principe n'est pas d'avantage appliqué dans une autre échelle célèbre, celle du *Timée* de Platon, qui a la prétention, au moins aussi justifiée, de représenter la tradition pythagoricienne. Grâce au patronage du grand philosophe, cette échelle diatonique dont tous les tons sont majeurs, et dans lesquels les demi-tons sont réduits par suite au rapport $\frac{256}{243}$ (tétracorde: *mi fa sol la*), est en réalité celle qui a eu la plus grande vogue parmi les théoriciens de l'antiquité, sinon parmi les musiciens pratiquant. C'est elle que suit Euclide dans sa Κατατομὴ κανόνος, qui doit être considérée comme une réplique à Aristoxène. C'est elle qu'adoptent exclusivement tous les musicographes anciens dont les écrits nous sont parvenus, sauf Ptolémée, qui se borne à la reconnaître à côté des autres qu'il donne; c'est elle enfin qui, transmise par Boèce au moyen âge, garde encore aujourd' hui toute son importance théorique, puisqu'elle est la base de la progression, indéfinie dans les deux sens, de quintes successives, qui règle l'armature en dièzes ou bémols des clefs des portées, suivant le choix de la tonique.

Les Pythagoriciens auxquels Didyme a emprunté son principe, s'il ne l'a pas forgé de lui-même, ne peuvent donc représenter qu'une école de canoniciens, postérieurs même à Eratosthène et qui sont aussi inconnus que le Myonides et l'Euphranor de la même époque, dont les noms ont été conservés, parce qu'ils ont constitué les quatre ou cinq[1]) dernières *médiétés* de l'arithmétique ancienne par des combinaisons numériques qui pouvaient très bien avoir pour but la solution du problème musical.

8. En tout cas, comme étapes antérieures à Didyme, Ptolémée ne fait connaître que les échelles d'Eratosthène, platonisant plutôt que pythagorisant, et celles d'Archytas, auxquelles il convient de nous arrêter.

Ces échelles, singulières en apparence, s'expliquent aisément si l'on ajoute au dessous du tétracorde (soit *mi — la*), un ton majeur *re — mi.*[2])

---

en petites capitales sont supérieures d'un comma $\left(\frac{81}{80}\right)$ à leurs homonymes en italiques.

1) Des quatre que donne Pappus, l'une est différente des quatre que reconnaît Nicomaque. Je n'insiste pas sur les rapports de la doctrine des intervalles musicaux avec celle des médiétés, ce qui demanderait une étude spéciale. Il me suffit de faire remarquer que tout le développement de cette dernière théorie est évidemment lié au rôle de la médiété harmonique, que nous allons avoir à apprécier.

2) Dans la lyre dorienne au temps d'Archytas, lyre qui compressait un ton et une octave, ce ton existait de fait au dessous de chaque tétracorde, au témoignage

Pour déterminer les cordes intermédiaires supérieures, d'abord pour le genre enharmonique, ARCHYTAS divise la quinte *re — la* suivant la formule $\frac{3}{2} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{4}$, c'est à dire en une tierce mineure et une tierce majeure. Il obtient ainsi la note *FA*. Pour le genre chromatique, au lieu de prendre la tierce mineure, ainsi que le fera ERATOSTHÈNE, pour l'intervalle supérieur, il prend un ton majeur à partir du *mi*, et obtient ainsi la note *fa♯*. Enfin pour le diatonique, il descend d'un ton à partir du *la* et obtient ainsi la note *sol*. Enfin, il détermine une corde mobile inférieure *commune aux trois genres* en divisant la quarte *re — sol* suivant la formule $\frac{4}{3} = \frac{7}{6} \times \frac{8}{7}$, c'est à dire en une tierce minime et un ton maxime, intervalles étrangers à nos tonalités modernes. Il obtient ainsi les décompositions

$$\frac{4}{3} = \underbrace{\frac{28}{27} \times \frac{36}{35}}_{\text{enharmonique}} \times \frac{5}{4} = \underbrace{\frac{28}{27} \times \frac{243}{224}}_{\text{chromatique}} \times \frac{32}{27} = \underbrace{\frac{28}{27} \times \frac{8}{7}}_{\text{diatonique}} \times \frac{9}{8},$$

décompositions qui, de prime abord, paraissent assez incompréhensibles[1].

PTOLÉMÉE, qui ne donne pas ces explications, laisse d'ailleurs entendre qu'ARCHYTAS ne s'appuyait point sur l'expérience, mais sur des considérations à priori. Cependant, de quelque façon que le géomètre de Tarente ait rédigé son *Harmonicon*, il est bien clair qu'il a voulu suivre la pratique de son temps. L'identité des cordes mobiles inférieures dans les trois genres, la position des cordes mobiles supérieures dans les tétracordes chromatique et diatonique, sont conformes aux postulats des auteurs de la notation musicale grecque qui a triomphé.

D'ailleurs en admettant les intervalles principaux d'ARCHYTAS, dans diverses des échelles qu'il a choisies[2], PTOLÉMÉE a reconnu lui-même leur valeur pratique.

Quant aux considérations théoriques qui avaient guidé ARCHYTAS, il me semble facile d'en reconnaître le véritable sens. Sans doute ses échelles enharmonique et diatonique ont pu donner aux canoniciens

d'ARISTIDE QUINTILIUS (éd. MEIBOM., p. 22). Les cordes fixes donnaient donc les notes *re — mi — la — si — mi*.

1) L'intervalle $\frac{28}{27}$ est un peu inférieur au tiers du ton tempéré. La décomposition en rapports *épimores* pour le chromatique est systématiquement écartée, car il suffisait de prendre: $\frac{4}{3} = \frac{28}{27} \times \frac{15}{14} \times \frac{6}{5}$.

2) Je dis *choisies*, parce qu'il n'en est probablement pas lui-même l'auteur, qu'il a en tout au plus remanié quelques unes, comme il a fait pour le diatonique de DIDYME; en particulier, il a conservé le diatonique *très mol* d'ARCHYTAS.

postérieurs l'idée du principe affirmé par DIDYME. Mais ARCHYTAS était bien loin, sans doute, d'attribuer à tout rapport *épimore* une valeur musicale; il se trouvait en présence de ce fait que, depuis un siècle[1]), les plus simples de ces rapports, $\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$, étaient reconnus comme correspondant aux intervalles consonants des cordes fixes; d'un autre côté, il pensait et il a probablement été le premier à soutenir, dans son *Harmonicon*[2]), que le son était un mouvement et que la hauteur en croissait avec la vitesse. Quoique, sans doute, il n'eût d'ailleurs, de la nature de ce mouvement ou de ses effets physiologiques, aucune idée juste ni même bien claire, il était naturellement conduit à croire que l'agrément d'un accord dépendait de la simplicité du rapport numérique correspondant, croyance qui suffisait encore à l'esprit d'un DESCARTES. Enfin, et ceci résulte de l'exposé qui précède, PYTHAGORE n'avait laissé aucune tradition relative à la composition du tétracorde. Il lui avait suffi de déterminer les sons fixes; il avait laissé de côté, dans la classe de l'indéfini (*ἄπειρον*), la multiple variété des sens mobiles.[3]) Sans doute dès la seconde moitié du V^e^ siècle, alors que devint urgente la question de la notation musicale, il fut aisé (sans être d'ailleurs pythagoricien) de revêtir d'un habillement mathématique l'une des principales échelles, celle du diatonique syntone, définie selon la doctrine courante des *acousticiens* précurseurs d'ARISTOXÈNE. C'est ainsi que, dès avant PLATON, put se former l'échelle du TIMÉE; mais elle ne satisfaisait point ARCHYTAS, soit au point de vue théorique, soit au point de vue pratique; car elle ne fournissait point de solution pour les autres genres, et, à cause de la dureté des tierces, elle ne plaît point à l'oreille. Il fallait donc introduire de nouveaux nombres simples.

On a vu comment ARCHYTAS fit cette introduction; il applique systématiquement un procédé que représente la formule générale:

$$\frac{n+1}{n} = \frac{2n+2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n},$$

1) On ne peut douter que les rapports numériques pour la quinte et la quarte n'aient figuré dans le plus ancien écrit harmonique, celui de LASOS d'Hermione, vers 500 av. J.-C. Cf. THÉON de Smyrne, *Mus.* I, 12 (éd. HILLER, p. 59).

2) Fragment conservé par PORPHYRE (Commentaire sur les *Harmoniques* de PTOLÉMÉE, éd. WALLIS, p. 236—238).

3) Sous ce rapport, ARISTOXÈNE, avec sa doctrine de la liberté de variation des intervalles, a dû se rapprocher de la véritable tradition pythagorienne, qu'il a connue par les derniers représentants de l'Ecole, notamment le musicien XÉNOPHILE. On répète à tort qu'il s'est attaqué à cette Ecole; ses polémiques ne visent qu'ARCHYTAS et PLATON, et pour la petite secte de Phlionte, ARCHYTAS était certainement un novateur, presque un hérétique.

laquelle donne évidemment la décomposition du premier rapport en deux autres *de même forme* aussi voisins que possible. Ce mode de décomposition qui est une généralisation de la division de l'octave par PYTHAGORE, fut couramment employé dans la suite par les *canoniciens*, et il est en particulier expliqué par ARISTIDE QUINTILIEN (éd. MEIBOM, p. 114). Appliqué à partir de l'octave aux intervalles qui en dérivent, il introduit dans leur ordre les harmoniques successifs, et c'est ainsi qu'ARCHYTAS a pu être conduit théoriquement à reconnaître les intervalles de tierce majeure et de tierce mineure $\left(\frac{5}{4} \text{ et } \frac{6}{5}\right)$, ce qui fut le pas décisif pour l'invention de notre *gamme des physiciens:* puis à proposer les intervalles $\frac{7}{6}$ et $\frac{8}{7}$, qui ont été écartés de la pratique et que, malgré quelques essais plus ou moins récents, l'on n'a pas réussi à remettre en usage, quoiqu'incontestablement, au point de vue purement mélodique, ils aient certainement autant de droits à être employés que les intervalles $\frac{9}{8}$ et $\frac{10}{9}$ qui correspondent à des harmoniques plus éloignés.

9. J'ai terminé ce que j'avais à dire touchant l'histoire de la musique, afin de préciser autant que possible la date des inventions mathématiques. Reprenons maintenant le procédé d'ARCHYTAS, pour lequel cette question de date doit être considérée comme résolue, au moins comme *terminus ante quem*.

Ce procédé donne, avec une erreur inférieure à la différence $\left(\frac{1}{2n(2n+1)}\right)$ des deux rapports composants, deux approximations pour la racine carrée $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$. Ou, pour se rapprocher de la façon dont les Grecs maniaient les rapports, il donne, entre n et $n+1$, deux intermédiaires comprenant leur moyenne proportionelle, à savoir $\frac{2n+1}{2}$ qui est la moyenne arithmétique, $\frac{2n(n+1)}{2n+1}$, qui est la moyenne harmonique. Or ces intermédiaires forment le même produit que les extrêmes; et la proposition est générale, quels que soient les extrêmes, puisqu'elle ressort de la construction même de la moyenne harmonique, dont la définition complète est connue de PLATON, et doit dès lors remonter au moins à ARCHYTAS. Ainsi deux nombres quelconques peuvent être remplacés par leur moyenne arithmétique et leur moyenne géométrique sans altérer leur produit, mais en diminuant leur différence; en répétant indéfiniment la même opération sur les nombres substitués, cette différence peut devenir aussi petite que l'on veut; les deux facteurs du produit constant se rapprochent autant que l'on veut de l'égalité sans jamais l'atteindre, tout en comprenant toujours entre eux

Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure.

Par PAUL TANNERY à Pantin.

1. On connaît assez l'influence exercée, dans l'un des domaines de la haute analyse, par les problèmes que les phénomènes acoustiques posent aux mathématiciens. Depuis la première impulsion donnée par JEAN BERNOULLI, à propos de la théorie des cordes vibrantes, c'est là une matière devenue classique[1]), quoiqu'elle ne soit point encore épuisée. Mais, sur un terrain beaucoup plus élémentaire, la découverte de la première loi de physique mathématique qui ait été connue, celle qui concerne les intervalles musicaux, n'a-t-elle pas, elle aussi, joué un rôle dans le développement de la mathématique grecque, qui alors sortait à peine de son berceau? Des quatre branches que l'Ecole de PYTHAGORE avait constituées, des quatre sciences sœurs[2]), qui devaient plus tard former le quadrivium des Universités au moyen âge, il en est une que l'histoire des mathématiques néglige un peu trop systématiquement, comme je vais essayer de le montrer. Et tout d'abord, j'examinerai si, dans les *Eléments* d'EUCLIDE eux-mêmes, il ne subsiste pas au moins une trace de la doctrine musicale des Pythagoriens.

2. La part faite à chacune des quatre sciences dans les *Eléments* est en tout cas très inégale. Si la *Géométrie* forme l'objet principal, si l'*Arithmétique* a fourni cependant trois livres (VII, VIII, IX), la *Sphérique*, cependant déjà passablement développée, n'a, pour ainsi dire, pas été mise à contribution, puisqu' EUCLIDE ne traite de la sphère que pour établir, d'après EUDOXE, le principe fondamental de la mesure de son volume, et pour enseigner, probablement d'après THÉÉTÈTE, l'inscription des polyèdres réguliers. A première vue, toute notion d'origine proprement musicale semble de même exclue des *Eléments:* en tout cas, nous ne pouvons évidem-

1) Elle vient d'être, de la part de H. BURKHARDT, l'objet d'une importante monographie conçue suivant l'ordre historique et publiée dans le Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **10**: 2, 1901.

2) ARCHYTAS, dans NICOMAQUE, *Arithm.* I, 3.

du premier coup à une approximation beaucoup plus compliquée, mais plus exacte. Leur procédé suppose certainement la formation préalable du concept de la moyenne harmonique; or ce concept, comme son nom l'indique, est historiquement dérivé de la solution d'un problème musical.

10. On pourra demander pourquoi je ne fais pas remonter jusqu'aux premiers Pythagoriens l'origine et de ce concept et du procédé de calcul correspondant, puisque la tradition leur attribue la connaissance des trois premières moyennes, arithmétique, géométrique et harmonique. A la vérité, on ne peut guère refuser à PYTHAGORE la connaissance de la célèbre proportion donnant les rapports des longueurs des cordes fixes et que les Grecs ont appelée *ἁρμονία*:

$$12 : 9 :: 8 : 6$$
$$mi_0 \quad la_0 \quad si_0 \quad mi_1.$$

Mais la tradition nous apprend en même temps que le nom de moyenne harmonique ne fut introduit que par ARCHYTAS (ou, d'après lui, par EUDOXE), qu'auparavant on disait *sous-contraire*; et elle ne nous garantit nullement que les propriétés de la moyenne 8 eussent été généralisées dès lors. Sans aucun doute, PYTHAGORE désignait sous le même nom les rapports *épitrites* $\frac{12}{9}$ ou $\frac{8}{6}$, ou les rapports *hémioles* $\frac{12}{8}$, $\frac{9}{6}$; sans doute il voyait bien l'égalité des produits $12 \times 6 = 9 \times 8$; mais nous n'avons point de preuves qu'il eût conçu, ainsi que l'a certainement fait ARCHYTAS, l'extension de ces propriétés à des rapports quelconques. Quand nous voyons encore NICOMAQUE attribuer à certaines médiétés des relations qui ne sont vraies que pour des nombres particuliers, nous devons certainement nous défier de la croyance à des généralisations scientifiquement justifiées en pareille matière.

J'ai d'ailleurs ici un autre motif: c'est que je suis porté à attribuer aux premiers Pythagoriens, pour l'approximation de $\sqrt{2}$, un procédé essentiellement différent du procédé classique que j'attribue à ARCHYTAS. Il s'agit de la formation des nombres *latéraux* et *diagonaux* que nous a conservée THÉON de Smyrne (*Arithm.*, 31) et dont la connaissance par PLATON, au moins pour le groupe 7/5, nous est assurée[1]) par un célèbre passage de la *République* (VIII, 146 b c).

Rappelons tout d'abord qu'il est admis à juste titre que les Pythagoriens ont, dès avant HIPPOCRATE de Chios, reconnu l'irrationalité de $\sqrt{2}$, et qu'ils en ont donné une démonstration conservée dans le texte actuel d'EUCLIDE (X, 117). Cette démonstration ne suppose aucune tentative d'approximation; mais il n'est pas douteux que, ne fût-ce que pour

1) Cf. CANTOR, *Vorl. über Gesch. der Mathem.* I², p. 210.

Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure.

Par PAUL TANNERY à Pantin.

1. On connaît assez l'influence exercée, dans l'un des domaines de la haute analyse, par les problèmes que les phénomènes acoustiques posent aux mathématiciens. Depuis la première impulsion donnée par JEAN BERNOULLI, à propos de la théorie des cordes vibrantes, c'est là une matière devenue classique[1]), quoiqu'elle ne soit point encore épuisée. Mais, sur un terrain beaucoup plus élémentaire, la découverte de la première loi de physique mathématique qui ait été connue, celle qui concerne les intervalles musicaux, n'a-t-elle pas, elle aussi, joué un rôle dans le développement de la mathématique grecque, qui alors sortait à peine de son berceau? Des quatre branches que l'Ecole de PYTHAGORE avait constituées, des quatre sciences sœurs[2]), qui devaient plus tard former le quadrivium des Universités au moyen âge, il en est une que l'histoire des mathématiques néglige un peu trop systématiquement, comme je vais essayer de le montrer. Et tout d'abord, j'examinerai si, dans les *Eléments* d'EUCLIDE eux-mêmes, il ne subsiste pas au moins une trace de la doctrine musicale des Pythagoriens.

2. La part faite à chacune des quatre sciences dans les *Eléments* est en tout cas très inégale. Si la *Géométrie* forme l'objet principal, si l'*Arithmétique* a fourni cependant trois livres (VII, VIII, IX), la *Sphérique*, cependant déjà passablement développée, n'a, pour ainsi dire, pas été mise à contribution, puisqu' EUCLIDE ne traite de la sphère que pour établir, d'après EUDOXE, le principe fondamental de la mesure de son volume, et pour enseigner, probablement d'après THÉÉTÈTE, l'inscription des polyèdres réguliers. A première vue, toute notion d'origine proprement musicale semble de même exclue des *Eléments:* en tout cas, nous ne pouvons évidem-

1) Elle vient d'être, de la part de H. BURKHARDT, l'objet d'une importante monographie conçue suivant l'ordre historique et publiée dans le Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **10**: 2, 1901.

2) ARCHYTAS, dans NICOMAQUE, *Arithm.* I, 3.

sens contraire au même degré; pour trouver deux valeurs $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{2q_1}{p_1}$ pl
approchées, le procédé enseigné plus haut reviendrait à former $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$
et $\frac{4pq}{p^2+2q^2}$. Mais il y a une façon beaucoup plus simple de constru
une valeur intermédiaire; c'est celle qui formera, au XV^e^ siècle, le po
de départ du procédé d'approximation de NICOLAS CHUQUET, et qui co
siste à prendre ici $p_1 = p + 2q$, $q_1 = p + q$. Or il se trouve q
$p_1^2 - 2q_1^2 = -(p^2 - 2q^2)$, en sorte que les valeurs successives $\frac{p}{q}$, $\frac{p_1}{q_1}$ e
sont alternativement approchées par excès et par défaut. On n'a dès l
plus besoin de former à part la série des approximations inverses $\frac{2q}{p}$, $\frac{2q_1}{p_1}$
D'autre part, si, comme il est naturel, on prend $p_0 = 1$, $q_0 = 1$, $p^2 - 2$
est alternativement ± 1. On a donc la série complète des solutions
équations indéterminées

$$p^2 - 2q^2 = 1, \qquad 2q^2 - p^2 = 1.$$

Or les nombres p et q sont précisément les nombres diagonaux et latéra
de THÉON de Smyrne

p	1	3	7	17	41	99	etc.
q	1	2	5	12	29	70	etc.

Bien entendu, je conçois cette série comme obtenue sur les nombres e
mêmes, sans généralisation immédiate, et sans aucune prévision, ni mê
peut-être aucune démonstration de sa propriété caractéristique. Mais
ne crois pas qu'il y ait un moyen plus simple d'expliquer cette inventi
et ce moyen est, de fait, intimement lié à la considération de l'*harmon*
de PYTHAGORE, qui donne le premier degré d'approximation

$$\left(\frac{p}{q} = \frac{3}{2}, \frac{2q}{p} = \frac{4}{3}\right).$$

Le même procédé peut s'appliquer à $\sqrt{3}$. Soit $\frac{p}{q}$ une approximatio
on formera $\frac{3q}{p}$, et l'on prendra donc $p_1 = p + 3q$, $q_1 = p + q$. Mais
$p_1^2 - 3q^2 = -2(p^2 - 3q^2)$: si donc l'on part de la différence $+1$ (comm
pour $p_0 = 2$, $q_0 = 1$), la différence suivante sera -2, et l'on arrivera
ensuite à $+4$. Seulement, comme il est aisé de le voir, les deux term
du rapport correspondant sont pairs; en sorte que, prenant $2p_2 = p_1 + 3q$
$2q_2 = p_1 + q_1$, on retrouve $+1$ pour la différence $p_2^2 - 3q_2^2$, et l'on a d
lors alternativement $+1$ et -2. On obtient ainsi la série complète d
rapports, que je dédouble ci dessous:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par excès:} & \frac{2}{1}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{26}{15}\cdot\frac{97}{56}\cdot\frac{362}{209}\cdot\frac{1351}{780}\cdots\\ \text{Par défaut:} & \frac{5}{3}\cdot\frac{19}{11}\cdot\frac{71}{41}\cdot\frac{265}{153}\cdot\frac{989}{571}\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdot\frac{p_1}{q_1}=\frac{2p+3q}{p+2q}.$$

C'est dans cette double série qu'ARCHIMÈDE, pour sa mesure du cercle, a choisi les termes qui convenaient pour le degré d'approximation qu'il voulait obtenir.

Pour les nombres 5, 6 et suivants, le même procédé n'aboutit pas au contraire à la série des solutions d'équations analogues, ou du moins il ne donne ces solutions qu'indirectement; cette circonstance explique qu'une méthode aussi élémentaire n'ait pas été généralisée.

12. Au reste les Pythagoriens ne paraissent pas s'être préoccupés de l'approximation de $\sqrt{3}$, puisqu'ils ont laissé à THÉODORE de Cyrène à démontrer l'irrationalité de cette racine. Il n'en subsiste pas moins ce fait que des séries conduisant aux approximations utilisées par ARCHIMÈDE ont pu exister bien longtemps avant lui; il a donc pu trouver, déjà posée par des séries connues pour $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, la question à laquelle le nom de PELL est resté attaché, tandis que celui du géomètre de Syracuse devrait peut-être être préféré, même vis-à-vis de celui de FERMAT. Car son célèbre *problème des boeufs* suffit à prouver qu'il avait conçu cette question dans toute sa généralité.

Mais c'est déjà toucher à de bien lointaines conséquences des idées introduites en mathématique par les premiers problèmes d'origine musicale, et je dois m'arrêter ici, si du moins j'ai pu convaincre le lecteur que, loin d'être négligeables, ces idées ont été des plus fécondes et des plus importantes.

Zur Textgeschichte der „Ochümena“ des Archimedes.

Von WILHELM SCHMIDT in Helmstedt.

Die Schrift des ARCHIMEDES 'Über die schwimmenden Körper' nur lateinisch, nicht griechisch, in MOERBEEKS Übersetzung aus d▪ Jahre 1269 (ROSE, *Archimedes im Jahre 1269*, Deutsche Litteratu: 1884, S. 210—213; J. L. HEIBERG, *Neue Studien zu Archimedes*, Al z. Gesch. d. Mathem. 5, 1890, S. 46 ff.) erhalten. Ihr erster Teil wur erst 1543 von TARTAGLIA in Venedig herausgegeben, das zweite Bu sogar erst 1565 gedruckt. Spuren von dem Vorhandensein einer mitt alterlichen lateinischen Übersetzung (also wohl des WILHELM VON MOE BEEK) am Ende des 16. Jahrh. in Köln, hat CURTZE (Zeitschr. f Mathem. 28, 1883; Hist. Abt. S. 12) nachgewiesen. Aber schon v der Drucklegung durch TARTAGLIA wurde MOERBEEKS Übersetzung I nutzt, so von keinem Geringeren als LEONARDO DA VINCI.

Er zitiert sein Exzerpt im Codice Atlantico Fol. 153ᵛ — e (s. *Codice Atlantico di Leonardo da Vinci*, herausgegeben von der Accaden dei Lincei) am Schlusse unter dem Titel *Archimenidis* (sic!) *de insiden bus in humido. Liber secundus in humido*, abweichend von seiner g wöhnlichen Art zu schreiben, in rechtsläufiger Schrift. Vgl. dazu MOE BEEKS Schlufs der Übersetzung: *Archimedis de insidentibus in humido li secundus explicit.* Das Zitat umfafst bei LEONARDO folgende Abschnit ARCHIMEDES *Op.* II, 412, 24—415, 18 ed. HEIBERG „tertiam figuram pr scriptarum — equales et portiones.“ Damit schliefst, wenn wir uns re erinnern, die linke Spalte der Seite. Dann folgt ARCHIMEDES *Op.* 425, 11—426, 11 „kc. et sit c. erit autem propter — minorem angulo Zugehörige Figuren sind nicht vorhanden. Es ist wahrscheinlich, d LEONARDO auch noch andere Abschnitte exzerpiert hat, also mindest den Anfang der „Demonstratio partis II“ (ARCHIMEDES II, 409, 20—4 24) und die jetzt fehlenden Mittelstücke (ARCHIMEDES II, 415, 18—425, 1 Denn es konnte ihm doch unmöglich hier mit dem blofsen Schlufs-, d mit den blofsen Anfangsworten gedient sein. Aber in rechtsläufi Schrift habe ich weiter nichts gesehen[1]; ob unter der linksläufigen Sch

1) Lieferung 2—4 habe ich nicht gesehen. Es ist übrigens die Publikat

noch Exzerpte verborgen sind, konnte ich nicht ermitteln, da ich mich nicht der Fähigkeit rühmen kann, sie ohne Spiegel zu lesen, wie PIUMATI und PAUL MÜLLER-WALDE es vermögen. Aber in der beigegebenen Umschrift habe ich weder unser noch sonst ein Zitat entdecken können. Meine Abschrift des Exzerptes stützt sich also lediglich auf das Faksimile.

Aus mancherlei Lesarten ergiebt sich nun mit Gewißheit, daß LEONARDO die Übersetzung des WILHELM VON MOERBEEK, vielleicht dessen Originalexemplar, den *Ottobonianus* 1850 selbst, möglicherweise im Jahre 1502 (oder 1514?) benutzte. Ich stelle einige ausgewählte Lesarten zusammen:

ARCHIMEDES II, 413, Z. 2 MV] ou L(EONARDO); hier scheint sich L. verlesen zu haben[1]), da M(OERBEEK) nach HEIBERG qu hat.

— VN] q kn M: qkn L
— 3 minor est ML
— MV] o ML; bei beiden folgt eine Lücke.
— VN] ς ϟ u M: c ϟ n L
— 5. 6 igitur] g̊ (= ergo) L
— 7 inter] intra ML
— 8 autem] q (= quod) L
— 13 inclinabitur] reclinabitur corr. M_1, L
— 17 X] y ML
— 19 gravitate hanc ML
414, 1. 3 autem] χ L
415, 1 autem] χ L, a' M
— 9 AX] quae aχ M; quae a ϳ L
— 13 XO] χa M: ϳ α L
— 17 diametri ML
— 18 aequales om. ML
425, 22 TH] ih M: .ih. L
426, 1 Φ] f ML
BS quam BC_1 om. ML, statt dessen Raum für etwa 10 Buchstaben
bei M, für 8—9 bei L, am Rande HSBIHCCB bei M, IISßHCCß bei L
— minor om. ML
— 2 quam C, R] om. M: q̅m̅ ·ſr· L, quam sr TARTAGLIA.
— MX] quae n ϟ M, quae . n ϟ . L

Codice Atlantico noch nicht abgeschlossen. Bei RAVAISSON-MOLLIEN, *Les manuscrits de Léonard de Vinci* habe ich nichts gefunden.

1) Da TARTAGLIA auch *ou* hat und nach HEIBERG a. a. O., S. 6 einen Matritensis Aa 30 für die Herausgabe der Ὀχούμενα benutzte, so bliebe freilich auch für LEONARDO noch die Möglichkeit einer Benutzung des Matritensis oder seiner Vorlage.

— 5 HA] h ϛ ML
— 6 AH] ϛ h ML
— 7 MX] h ϛ ML
— TX] t ϛ ML
— 8 MY] hy ML.

Es ist selbstverständlich, dafs dies Zitat keine Bedeutung für di Textkritik, vielleicht aber einiges Interesse für die Textgeschichte ha Für letztere dürfte auch folgende Notiz des LEONARDO DA VINCI Beach tung verdienen. Sie steht Fol. 341ᵛ des Codice Atlantico; ich verdank sie der Güte des um LEONARDO hochverdienten Forschers PAUL MÜLLEI WALDE: Archimede è intero appresso al fratello di Monsignore di S. Gust in Roma; disse averlo dato al fratello che sta in Sardegna. Era prim nella libreria del duca d'Urbino — fù tolto al tempo del duca Valentin

Aus diesen Worten ergiebt sich, dafs ein vollständiger ARCH MEDES in der Bibliothek des Herzogs von Urbino war. Von diesen Herzöge spricht man erst seit dem Jahre 1474. Als aber im Jahre 1499 CESAR BORGIA, Herzog des von Ludwig XII neugeschaffenen Herzogtums Vale tinois in der Dauphiné, sich in den Besitz der Romagna setzte und il auch Urbino einverleibte, wurde der ARCHIMEDES entführt und befa sich zur Zeit von LEONARDOS Erkundung, also im Anfange des 16. Jah hunderts, bei dem Bruder des Monsignore von S. GUSTA in Rom, wen stens erklärte letzterer, ihn seinem in Sardinien wohnenden Bruder g geben zu haben.

Wir erfahren freilich weder, ob es sich um einen griechischen o lateinischen ARCHIMEDES handelt, noch ob S. GUSTA, der uns nicht wei bekannt ist, ihn als Eigentum besafs oder nur entliehen hatte, noch eine einzige oder mehrere Handschriften gemeint sind. Obwohl n LEONARDO wirklich, wie aus einem griechischen Zitate auf Fol. 178ʳ d Codice Atlantico erhellt, Griechisch gekonnt zu haben scheint, so ist nach Lage der Sache dennoch unwahrscheinlich, dafs es im 16. Jahrh dert noch einen vollständigen griechischen ARCHIMEDES gegeben ha Das würde das Vorhandensein auch derjenigen griechischen Vorlage d WILHELM VON MOERBEEK (oder wenigstens einer griechischen Abschri welche die Ὀχούμενα enthielt, voraussetzen. Denn in dem (griechische „Codex VALLAE" waren die Ὀχούμενα, für die sich doch LEONARDO sonders interessierte, nicht vorhanden. Da aber von jener seit dem Ja 1311 nichts verlautet, so ist wahrscheinlich eine lateinische Übersetz gemeint. Nun gab es zu LEONARDOS Zeit deren zwei, welche annähe vollständig waren, die des WILHELM VON MOERBEEK aus dem J 1269 und die im Auftrage des Papstes NICOLAUS V (1447—1455) a fertigte des JAKOB VON CREMONA. Die Übersetzung des LUCAS G

cus aus dem Jahre 1503 kommt nicht in Betracht, da sie nur die Quadratur der Parabel und die Kreismessung enthält. Danach hätte man die Wahl zwischen MOERBEEK und CREMONENSIS, doch werden wir auch den letztern ausscheiden müssen, da derselbe die *'Οχούμενα* ausläſst, auf die es LEONARDO ankam. Trotzdem nun MOERBEEK den *Ψαμμίτης* nicht bringt, sondern nur als in der griechischen Vorlage vorhanden erwähnt (HEIBERG a. a. O. S. 4), so erscheint es kaum auffällig, wenn LEONARDO dessen Übersetzung als den 'ARCHIMEDE intero' angesehen hat.

Eine weitere Frage wäre, ob die in den Händen des Monsignore v. S. GUSTA befindliche Handschrift der Ottobonianus oder der Matritensis oder noch eine andere Hs. war. Das läſst sich nicht mit Sicherheit entscheiden; daſs LEONARDO den Ottobonianus selber benutzt hat, ist nicht über allen Zweifel erhaben. Ob eine Vergleichung unseres Exzerptes mit dem Matritensis, dessen Lesarten nicht weiter bekannt sind, zu einem Ergebnis führen würde, vermag ich nicht zu sagen. Der Umstand, daſs der Matritensis ziemlich jung sein soll (aus welchem Jahrhundert, ist nicht bekannt), auch nur vier Schriften des ARCHIMEDES enthält, könnte die Wagschale zu Gunsten des Ottobonianus neigen. Ist aber wirklich der Ottobonianus beim Monsignore von S. GUSTA gewesen, so würden wir damit auch eine Bereicherung unserer Kenntnisse über die wechselvollen Schicksale dieser bemerkenswerten Handschrift[1]) gewonnen haben.

Der Fall, daſs der 'ARCHIMEDE intero' etwa verlorene, uns nur dem Titel nach bekannte Schriften des ARCHIMEDES enthalten habe, scheint uns auſserhalb aller Möglichkeit zu liegen.

---

1) Die ARCHIMEDESübersetzung, 1269 entstanden, wäre also nach 1311 aus der päpstlichen Bibliothek abhanden gekommen, vielleicht um 1480 nach Urbino geraten, aber 1499 dort weggenommen (tolto). 1508 ist sie in Venedig im Besitze 'ANDREAE CONERI' (s. HEIBERG, a. a. O. S. 3). Beim Monsignore von S. GUSTA würde sie wohl um 1502 oder um 1514 gewesen sein, da in diesen Jahren sich LEONARDO in Rom aufhielt. Die weiteren Schicksale sind bekannt, s. HEIBERG, a. a. O. 3, 4.

Leonardo da Vinci und Heron von Alexandria.

Von WILHELM SCHMIDT in Helmstedt.

Man hat LEONARDO DA VINCI nicht mit Unrecht den „Faust d… Renaissance“ genannt. Hat er doch auf fast allen Gebieten menschlich… Wissens und Könnens, der Wissenschaft, der Kunst, der Technik u. s. … sich nicht nur bethätigt, sondern auch bedeutende Erfolge gehabt. Se… dem man in neuester Zeit mit den von ihm hinterlassenen Papieren si… eingehender beschäftigt hat, müssen wir ihm für manche Erfindungen, … wir erst später anzusetzen pflegten, die Priorität zuerkennen. Um … Camera obscura[1]) u. a. nicht zu erwähnen, wer vernimmt nicht mit St… nen, wie sein gewaltiger Geist seiner Zeit um Jahrhunderte vorausei… welch' großartige Taucherapparate er z. B. ersonnen, wie er die Sch… schraube, Mitrailleusen, unterseeische Torpedoboote[2]) erfunden, zum … Dinge, die man gewöhnlich als ureigenste Ideen der heutigen Zeit … preisen pflegt!

So schöpferisch nun LEONARDO auch gewesen ist, so natürlich … es, daß er sich auch um seine Vorgänger gekümmert hat, wie es he… zutage jeder Fachgelehrte zu thun verpflichtet ist, und wenn er a… nicht von allen etwas gelernt hat, so mag er doch Anregungen empfang… haben. So hat schon MAX MAAS in der Beil. zur Allgem. Zeitu… 1899, Nr. 154, S. 5 im Gegensatz zu LOMBARDINI, *Dell' origine e del pr… gresso della scienza idraulica* (Mailand 1872) darauf hingewiesen, da… LEONARDO am Ende doch nicht der *Begründer* der Hydraulik gewes… sei, sondern vielleicht von HERON von Alexandria gelernt habe.

Daß LEONARDO auch bei den Alten in die Schule ging, beweis…

---

1) LEONARDO hat sie vor PORTA jedenfalls selbständig erfunden, obwohl sie oh… Linse nach M. CURTZE, *Die Dunkelkammer* (Himmel u. Erde 13, 1901, 225—2… bereits bei LEVI BEN GERSON im Jahre 1321 vorkommt.

2) Vgl. den hochinteressanten Aufsatz von PAUL MÜLLER-WALDE, *Beiträge … Kenntnis des Leonardo da Vinci*: VI. Einige Anweisungen LEONARDOS für den un… seeischen Schiffskampf, Taucherapparate und Torpedoboote. LEONARDOS Erfind… der Schiffsschraube. Jahrb. der Kgl. preuſs. Kunstsammlungen XX, 1, 18… S. 60 ff.

die mehrfachen Zitate aus ARCHIMEDES, ARISTOTELES, EPIKUR, EUKLID, LUKREZ, PLATO, PLINIUS, POSIDONIUS, PYTHAGORAS und VITRUV. Von letzterem hat er sich z. B. im Pariser Manuskript K_3 [nach MÜLLER-WALDE seit 1508 im Gebrauch] Fol. 109^v (RAVAISSON-MOLLIEN, *Les manuscrits de LÉONARD DE VINCI*, Paris 1890 ff.) notiert, daſs Messer VINCENTIO ALIPLANDO, der bei der Osteria del Corso wohne, den VITRUV des JAKOB ANDREA (iluetruvio di iacomo andrea) habe[1]), wie ihn auch dessen Wegemesser (Taxameter) zu Lande und Wasser interessiert haben (Paris. F 48^v, 54^r, 96^r; Atlant. Fol. 1^r, 2). Ob LEONARDO den HERON kenne, schien zweifelhaft, nachdem sich meine Vermutung, daſs er den Ambrosianus I 38 inf. geschrieben haben könne, als unerweislich herausgestellt hatte. Indessen hat jetzt Herr PAUL MÜLLER-WALDE auf Fol. 95^v des Codice Atlantico seinen Namen erwähnt gefunden: „Erone de acque". Nach der Reproduktion des Codice Atlantico[2]) heiſst es ferner Fol. 219^v—a (S. 779): „Erone de acqua". Dies Zitat setzt uns allerdings in einige Verlegenheit; denn eine Schrift *Περὶ ὑδάτων* kennen wir zwar von HIPPOKRATES und THEOPHRAST (nur Exzerpt von letzterem erhalten), aber von HERON nicht einmal dem Titel nach. Allerdings zitiert PAPPUS (p. 1070, 2 ed. HULTSCH) eine HERONische Schrift *Περὶ ὑδρείων*, meint aber die Schrift über die Wasseruhren (*Περὶ ὑδρίων ὡροσκοπείων*). Nach MÜLLER steht die Notiz unter trinkhörnerartigen Figuren (corni), unter deren einer wir lesen: Vetro acciochè si veda gli atimi (so!) nell' acqua che si move. Auch diese Notiz vermag ich bei HERON nicht unterzubringen; denn schwerlich darf man LEONARDOS Atome mit HERONS Molekülen (*σώματα*) in der Einleitung zu seiner *Pneumatik* identifizieren. Obwohl nun HERON sonst nirgends von LEONARDO zitiert wird, so steht dennoch fest, daſs LEONARDO HERONS *Pneumatik* gekannt und benutzt hat.

Sehen wir zunächst auch von der Figur des einfachen gebogenen Hebers (cicognola LEON. Cod. Atlant. 80^r — b u. sonst, *σίφων* HERON, *Pneum.* I 1) ab, so verrät schon die Kenntnis des Glockenhebers (zaina LEON. Atlant. 80^r — b, s. Fig. 1, HERON, *Pneum.* I 3 *πνικτὸς διαβήτης*) ohne Zweifel Bekanntschaft mit HERON. 'Dieses Instrument', sagt LEONARDO im Parisinus G 40^v, 'ist seiner Natur nach ein Heber. Durch (in LEON.) diese Vorsprünge (? spicchi) oder Seiten (coste) des Trinkbechers ruft man den Irrtum hervor, daſs der Wein durch

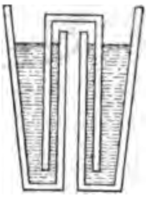


Fig. 1.

1) Vgl. noch LEON. Paris. E 51^v und Atlant. 122^v — b mit JULIUS AFRICANUS Κεστοί Kap. 21 (Messung der Breite eines Flusses).

2) *Il codice atlantico di LEONARDO DA VINCI nella Biblioteca Ambrosiana di Milano riprodotto e pubblicato della R^a Accademia dei Lincei.* Roma MDCCCLXXXXVI. Ich

den Boden des Gefäfses auslaufe.' Vgl. den HERONischen Tantalusl *Pneum.* I, 13. Dies benutzt LEONARDO dann weiter zur Konstruktion Bechers (Fig. 2), der eine gewisse Ähnlichkei unsern bekannten Vexierschoppen hat (im I Manuskript G 40v).

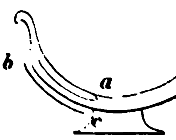


Fig. 2.

HERONS *Pneum.* I, 4 und 5 (Fig. 3a) hat Frage zu folgenden im Parisin. G 48r erha Ausführungen LEONARDOS (Fig. 3b) Veranlassu geben: 'Denn je mehr das Wasser sich im Gefäfse verringert, mehr senkt sich seine Oberfläche, und je mehr sich die Oberfläc Wassers senkt, um so weniger schnell läfst sein Heber es aus Aber wenn der Heber zusammen mit dem Wasserspiegel, der ihn sinkt, würde ohne Z die Bewegung (Ges digkeit) des Wasser ches durch den Heb fliefst, an sich immer mäfsig sein. Um diese Eigenschaft zuführen, werden w Gefäfs *n* auf das silberbad *m* gesetz lassen, ein Gefäfs, w einen Schwimmer LEON. = λεβητάριο selchen HERONs bil den Heber trägt, dessen (des Schwi Boden dieser Hebe der Luft zum Quec (argento vivo LEON.) HERON dringt, und Queeksilber ergiefst sich durch solchen Heber *nst* ins Gefäfs *fe.* die Oberfläche dieses Quecksilbers sinkt, soviel sinkt der Schwi welcher darüber steht, zusammen mit dem Heber, welcher (?)[1]) ei

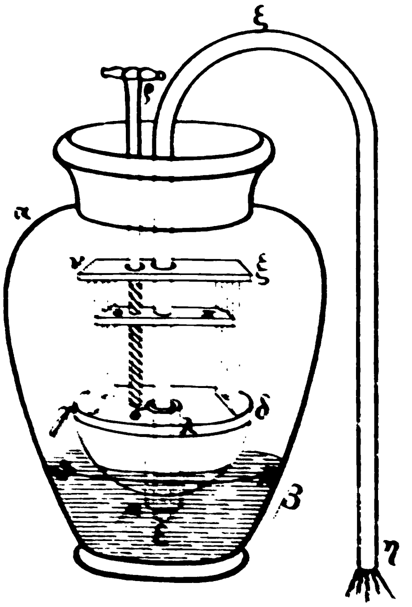


Fig. 3a.

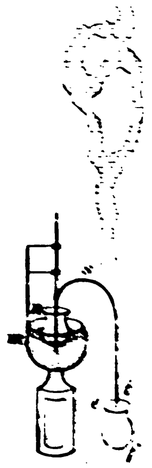


Fig. 3b.

vermag hier nicht festzustellen, ob es nicht vielleicht dieselbe Stelle ist. acq ist von PAUL MÜLLER-WALDE bezeugt, die letzte Silbe ist mit der für que üblichen Ligatur geschrieben.

[2]) LEONARDO hat [illegible] statt *la quale ha* = è [illegible]. Sonst ist „fil di rame" bloſs Kupferdraht.

dünnes, blankpoliertes Kupferrohr(?) bildet und ins Gefäfs fällt, welches, sobald es das nötige Gewicht erlangt, fällt und dabei einen Schufs abfeuert.' LEONARDO hat hier nur das Wasser durch Quecksilber ersetzt, der ganzen Vorrichtung einen festeren Halt gegeben und sie zu einem 'fuoco per colpo' benutzt. Zugleich aber hat die HERONische Vorrichtung LEONARDO zur richtigen Erkenntnis über das Gesetz der Ausflufsgeschwindigkeit geführt.

Ebenso augenfällig ist die Übereinstimmung zwischen HERON und LEONARDO bei der sich selbst regulierenden Lampe (HERON, *Pneum.* I, 34, Fig. 4^{a}, LEON. im Paris. G 41^{r}, Fig. 4^{b}). Hier macht sich LEONARDO die HERONische Vorrichtung in folgender Weise zu nutze. 'Eine Lampe', sagt er, 'dafs der Docht sich um soviel hebt, als sich das Öl senkt. Und dies geschieht (nasscie), weil das Rad (Zahnrad) (welches die Zeichnung (disegno,

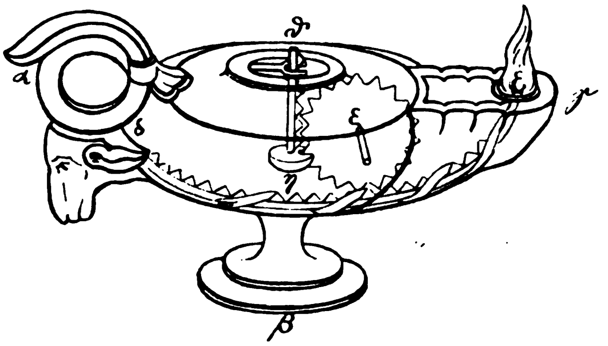


Fig. 4a.

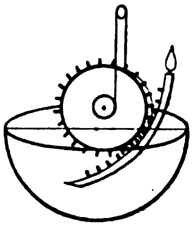


Fig. 4b.

Fig. 4^{b}) hochstellt), sich auf dem Öle aufrecht hält, und um soviel als das Öl abnimmt, sinkt das Rad, und indem es sinkt, dreht es sich um sich selbst mittelst des Fadens (filo), der um seinen Pol (das eine Ende seiner Achse) sich wickelt, und die (Korrektur von LEONARDO: solche) Zähne des Rades schieben (spincie!) die Zahnstange (canna dentata LEONARDO, πτερόνη hat (δγ) HERON), welche den Docht aufnimmt, vorwärts.' Aber LEONARDO hat wohl selbst gesehen, dafs der HERONische Schwimmer η (Fig. 4^{a}) ungemein praktisch ist und lehnt sich deshalb in seiner Variation (Parisin. G 41^{r}, Fig. 4^{c}) an diesen an. Dazu sagt LEONARDO: '*a*, *b* wird dasselbe leisten, wenn der Pol *a* des Rades nicht sinken wird, sondern blofs der leichte (gezahnte) Schwimmer *b* (levità LEONARDO [= lievità 'Leichtigkeit'], Kesselchen η mit gezahntem Stäbchen ϑ HERON), welcher auf dem Öle schwimmt, zusammen mit der Oberfläche des Öles sinkt und das Rad mit seiner

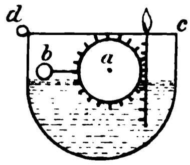


Fig. 4c.

Zahnung sich drehen läfst und mit (in) langsamer Bewegung die obe erwähnte Zahnstange nach oben schiebt.'

Jetzt wird man, hoffe ich, keinen Anstand mehr nehmen, auch fi den LEONARDOschen Thürverschlufs (Usscio serrato dachontrapeso, Parisi J 30r, s. Fig. 5) durch Gegengewicht das HERONische Urbild (*Pneum.* I, 3 anzuerkennen. Paris. J 93v steht die Zeichnung eines anderen Thürve schlusses mit Hilfe von contrapesi. Ob auch LEONARDOS Kenntnis d

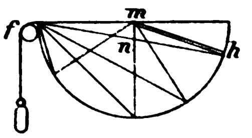


Fig. 5.

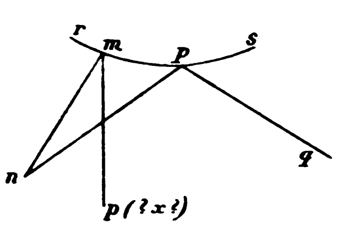


Fig. 6.

Gesetzes der kommunizierenden Röhren[1]) auf HERON (*Pneum.* S. 34, 2 zurückzuführen ist, mag dahingestellt bleiben. Eine im Paris. D 2r b findliche Figur (Fig. 6) scheint auf HERONS *Katoptrik* VIII (S. 332) hi zuweisen, zumal LEONARDO ebenda vom kürzesten Wege des Lichtes sprich wie HERON *Katoptr.* IV (S. 325). Auf den Kran mit einem Maste (LEO Cod. Atlant. 49v, HERON *Mech.* III, 1, bei PAPPUS S. 1130 ed. HULTSCH die scharf- und flachgängigen Schrauben (Atlant. 14v, HERON *Mech.* II, bei PAPPUS S. 1126) und die doppelt wirkende Druckpumpe mit zwei Stiefe (LEONARDO Parisin. B 20v, HERON *Pneum.* I, 28) hat bereits TH. BE in seinen *Historischen Notizen*: XV, XVIII, *Leonardo da Vinci* im Civi ingenieur, Bd. 39, 42, Sonderabdr. S. 17 bezw. S. 30 u. a. aufmerksa gemacht. Vgl. auch noch die Schraube ohne En (LEON. Paris. J 26r und HERON *Mech.* II, 18, b PAPPUS S. 1114, 4 ff.). Die HERONischen Heb und Schraubenpressen (HERON *Mech.* III, 13 f können freilich LEONARDO (Atlant. Fol. 49v, 1 BECK, XVIII, S. 32, 33) nicht vorgelegen haben.

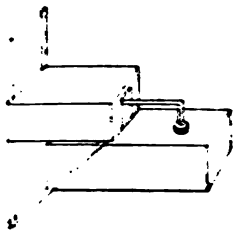


Fig. 7.

Vielleicht darf man auch LEONARDO Cod. Atla Fol. 102r—a (Fig. 7) zu HERONS *Pneum.* I, in Beziehung setzen. 'Mache', sagt LEONARD

1) Cod. Atlant. 216v (219v). 'Die Oberfläche aller unter einander verbunden unbeweglichen Flüssigkeiten haben immer gleiches Niveau' (la superficie di tu liquidi immobili i quali infra loro sieno chongiunti sempre sieno d'equale all Vgl. auch Fig. 96 bei GERLAND-TRAUMÜLLER, *Gesch. der Experimentierk* S. 106; HELLER, *Gesch. der Physik* I, 242.

'dafs dieser Wasserbehälter (pila), [der oben noch ein Zuleitungsrohr hat], eben voll ist, wenn der untere ihn (mit seinem Niveau) erreicht.' Leider beschränken sich LEONARDOS Ausführungen auf diese paar Worte. Der Satz 'mache den geheimen Ort (la segreta)' will vielleicht besagen, dafs ein Teil der Vorrichtung versteckt sein soll, wie es auch bei HERON und PHILON von Byzanz vorkommt.

Dafs LEONARDO auch PHILON kannte, scheint mir aus dem Paris. A 56ʳ hervorzugehen. 'Wenn das Warme Ursache der Bewegung des Feuchten ist, so hält das Kalte es fest. Dies wurde dargethan durch den Hinweis auf die kalte Region (der Luft), welche die aus dem warmen Elemente gezogenen Wolken anhält. Was den Beweis betrifft, dafs das Warme das Feuchte anziehe, so beweist man es folgendermafsen. Erwärme eine geschliffene(?) Flasche (?, amola oder mola LEONARDO, = ampolla?), und setze diese in ein Gefäfs mit der Mündung nach unten (Fig. 8) und lege eine glühende Kohle dahin, und du wirst sehen, dafs die Feuchtigkeit (die Flüssigkeit), um hinter der Wärme, welche aufsteigen wird, herzugehen, von selbst die Wasserflasche füllen und die in der Flasche enthaltene Luft durch die Mündung dieser Flasche entweichen wird.' Es ist klar, dafs wir hier denselben Versuch haben, den, nur in unwesentlichen Dingen abweichend, uns PHILON von Byzanz *Pneum.* 8 (HERON *Op.* I, S. 476), ausführlicher beschreibt[1]), und den später VAN HELMONT (1577—1644), ROBERT FLUDD (1574—1637) u. a. wiederholt haben. Die Schlufsworte dieses Abschnittes (LEON. Paris. A 56ʳ: 'des Feuers, welches von Natur sich nach der Region seines Elements erhebt') berühren sich wieder mit HERONS *Pneumatik* 15, 27 ff., wo es von der Flamme heifst, dafs sie ihrer eigentlichen Heimat, der allerhöchsten Region über der Atmosphäre, zustrebe.

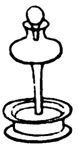


Fig. 8.

Mit den Übereinstimmungen auf physikalischem Gebiet sind aber die Beziehungen zwischen HERON und LEONARDO noch nicht zu Ende, sondern sie greifen auch auf das mathematische Gebiet über. Das Nivellement, welches wir Fol. 131ʳ im Cod. Atlant. finden, erinnert an HERONS *Dioptra.* 'Wenn Du', heifst es hier, 'eine meilenweite Fläche gut nivellieren wolltest, so würdest Du die Weise hier oben innehalten. Es sei zunächst das Nivellierinstrument (livello) *ab* (Fig. 9ᵃ) mit der Libelle oben *K* aufgestellt, und es seien von *a* bis (?) *b* (*ab* Hs.) ungefähr

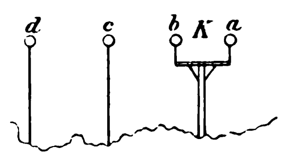


Fig. 9a.

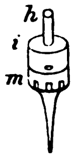


Fig. 9b.

1) Nach BECK a. O. XVIII, S. 53, 54 wird auch im Atlantico Fol. 7ᵛ ein Apparat zum Heben von Wasser mittels Luftverdünnung erwähnt.

10 Ellen, und an ihren Enden seien zwei kleine Lämpchen (lampanette) aufgestellt, und jede stehe, wie sie hier auf der rechten Seite abgebildet ist, d. h. die Düse *h* (vaschetta Leonardo, eigentlich kleines Bassin (Fig. 9[b]) träufle (das Öl) tropfenweise in die Lampe *i*, das Öl bleibe immer in der Höhe *m*, damit Du, wenn das Öl das Licht sinken läfst, das Nivellement nicht fälschest. Und bevor Du das Nivellierinstrument in Thätigkeit setzest, prüfe es, dann entferne Dich 200 Ellen bis zu *c*, und stelle dort eine andere Lampe auf, welche in gleicher Linie mit *ab* stehe, dann entferne Dich 400 Ellen und setze *d* auf dieselbe Linie, darauf nimm *b* weg u. s. w., und so mache es nach und nach, bis Du Deinen Weg nivelliert hast.' Es läfst sich freilich nicht leugnen, dafs Leonardos Art zu nivellieren nicht nur primitiv, sondern auch unzuverlässig ist, während Herons Apparat fein durchdacht ist (s. H. Schöne, *Die Dioptra des Heron*, Jahrb. d. Arch.-Inst. **14**, 91 ff.) und auch zu weit schwierigeren Aufgaben verwendet wird.

Noch bleibt zu erwähnen das lebhafte Interesse für das delische Problem, welches Leonardo (Cod. Atl. Fol. 85[r]—b, 218[v]—b, 231[r], Pari F. 50[r]) mit Philon und Heron teilt. Hier kritisiert Leonardo die Alten. Wenn er davon spricht, dafs diese mittels des Bogens bei ihren Operationen die zweifelhafte Lage der Sehne fanden (li antichi mediante l'arco trovavan negoziando la dubiosa situazione della corda), während er das Gegenteil mache (qui si fà il contrario, perchè io fo la situazion della corda colli suoi stremi Atlant. 218[v]—b), so scheint er eben Heron (bezw. Philon[1])) zu meinen. Vgl. Eutokios bei Archimedes III, 70 ff., Heron *Mechan.* I, 11 (*Op.* II, S. 24 und 266).

Schliefslich ist es bemerkenswert, dafs Leonardo den Heronischen Gnomon (Heron, *Defin.* 58, Cantor, *Vorl.* I², S. 151, Jahresber. f. Altertumswiss., Bd. **108** [1901, I], S. 81) kennt. Im Parisin. M 8[v] sagt er darüber folgendes: 'Parallelogramme, welche um den Durchmesser (= Diagonale) liegen, d. h. welche vom Durchmesser durchzogen (infilzati) sind. Dritte Parallelogramme (terzi paralogrammi!) heifsen Supplemente (supplementi), d. h. von denen, welche um den Durchmesser liegen.' Man ersieht aus den Figuren, dafs Leonardo vom Gnomon des Quadrats zu dem des Parallelogramms übergeht. Es ist hier freilich die Möglichkeit gegeben, dafs Leonardo sich an Euklid, *Elem.* II, Defin. 2 und nicht an Heron anlehnt.

Damit sind schwerlich alle Beziehungen zwischen Heron und Leonardo erschöpft, vielleicht wird ein gründliches Studium seines Nachlasses[2]) no

1) Es ist bekannt, dafs dieser seinerseits von Apollonius abhängt.

2) Lieferung 2—4 der Ausgabe des Atlantico sowie die Publikationen ü... der Londoner Leonardomanuskripte, z. B. von P. Sabachnikoff (1893, 1895), sind n

andere an den Tag ziehen. Sie zu erschöpfen war auch nicht unsere Absicht, wohl aber nachzuweisen, dafs LEONARDO, dieser erste grofse Moderne, es nicht verschmäht hat, von den heutzutage so vielfach verachteten Alten sich anregen zu lassen und zu lernen. Wie schon an anderer Stelle, erkennen wir auch hier, wie selbst auf dem physikalischen und technischen Gebiete der Faden der Kulturentwickelung nicht abreifst, sondern die moderne Kultur mit Erfolg an die antike anknüpft.

zu Gesicht gekommen. Übrigens ist auch die Herausgabe des Atlantico noch nicht beendet. Die ausgiebige Benutzung der Pariser Publikation (von RAVAISSON) wurde mir durch die Güte des Herrn PAUL MÜLLER-WALDE ermöglicht.

Una lettera inedita di Ticone Brahe.

Di ANTONIO FAVARO a Padova.

La lettera fin qui inedita di TICONE BRAHE, sulla quale ho avuta l[illegible] ventura di porre le mani, colma una lacuna nel carteggio di lui con l[illegible] Corte di Toscana, del quale or sono ormai parecchi anni, ho dato all[illegible] luce alcuni notevoli documenti.[1])

Ricorderò qui brevemente che il grande astronomo danese era e[illegible] trato in relazione con FERDINANDO I, Granduca di Toscana, dopo il su[illegible] esodo dalla patria e precisamente col mezzo d' uno dei suoi discepoli f[illegible] voriti, FRANCESCO TENGNAGEL, nobile boemo, che lo aveva seguito ne[illegible] volontario esilio, che più tardi ne impalmò una delle figlie per nom[illegible] ELISABETTA, e che se ne veniva in Italia incaricato tra le altre co[illegible] d' una segreta missione dello stesso BRAHE per GIOVANNI ANTONIO M[illegible] GINI.[2]) Il TENGNAGEL, munito d' una commendatizia per il Granduc[illegible] rilasciatagli da ENRICO RANZAU[3]), era anche latore di un' altra lette[illegible] allo stesso indirizzo, scritta dal BRAHE in data di Dresda, 8 novemb[illegible] 1598 e con la quale egli si preparava manifestamente il terreno a chi[illegible] dere ed ottenere due singolari favori, intorno ai quali ci informa il ségui[illegible] della corrispondenza già per lo passato data da me alla luce. I qu[illegible] favori erano anzitutto l' appoggio del Granduca per certe osservazio[illegible] astronomiche ch' egli desiderava fossero fatte prima in Italia e poi [illegible] Egitto, e di più che il figlio primogenito di lui[4]), dell' età di 18 anni, [illegible]

---

1) A. FAVARO, *Ticone Brahe e la Corte di Toscana* (Archivio storico Italia[illegible] 3_5, 1889).

2) A. FAVARO, *Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero e di altri cele[illegible] astronomi e matematici dei secoli XVI e XVII con Giovanni Antonio Magini* (Bolo[illegible] 1886), p. 89.

3) Era questi assai celebre per le sue immense ricchezze, le quali lo avev[illegible] messo in grado di diventare creditore di sovrani e di stati per ingenti somme. BRAHE, che in parecchi luoghi delle sue lettere lo dice suo «affinis», fu ospite lui per qualche tempo nello splendido castello di Ranzau: fu amico delle scienz[illegible] degli scienziati, e si occupò egli stesso con predilezione di cose astrologiche.

4) Questi, che si chiamava TICONE al pari del padre, era nato addì 28 Ago[illegible] 1581, fu allievo della scuola di Sorö in Danimarca nel 1591 e studente all' Uni[illegible] sità di Wittemberga nel 1598: v' era anche nel 1599, poichè il v. BIELA scrive (Ast[illegible] nomische Nachrichten 3, 1825, col. 256) d' aver veduto un album di que[illegible]

nisse accolto alla Corte di Toscana. Ma dell' aiutare queste osservazioni astronomiche, ossia a quanto pare, di provvedere alle relative spese non pare che il Granduca si chiarisse disposto, e quanto ad accogliere il figliuolo, che al pari del padre suo si chiamava TICONE, fu opposto un deciso rifiuto allegandosi che non era cattolico, e che acattolici non si volevano alla Corte di Toscana.

Il tentativo diretto ad ottenere che il giovane TICONE fosse mantenuto dal Granduca a Siena dove pur erano in gran numero i tedeschi protestanti non avendo avuto miglior fortuna, parrebbe che ogni pensiero avesse dovuto esserne smesso; ma convien credere che il BRAHE non avesse del tutto perduta la speranza di ottenere qualche cosa dal Granduca, se egli, non ostante i replicati rifiuti, s' indusse a scrivergli quest' altra lettera che ora appunto vede la luce.

Scopo principale di questa lettera è evidentemente quello di accompagnare e presentare al Granduca un suo figliuolo, anzi proprio quel TICONE stesso del quale FERDINANDO I non aveva voluto sapere per alcun conto. Egli se ne veniva in Italia al séguito di ROBERTO SCHERLEY, inglese, ambasciatore di CHA-ABBAS Re di Persia, spedito a varii Principi d' Europa con lo scopo di promuovere una lega contro il Turco: nel viaggio a Roma sostò l' ambasciata a Firenze, poichè, come è ben noto, intorno a questo tempo la Toscana era ancora considerata come una potenza navale, e quindi poteva interessare di raccoglierne la adesione.

La lettera, nel suo complesso semplicemente ufficiosa, ragguaglia ancora il Granduca del trasferimento di TICONE BRAHE a Praga, di dove essa è datata, e del trasporto operato dei ventotto strumenti astronomici che seco aveva portati dalla Danimarca, collocati provvisoriamente in un palazzo prossimo alla Reggia imperiale in attesa della costruzione di un osservatorio, che il grande astronomo non potè vedere compiuto, perchè nove mesi dopo la data di questa lettera egli era già morto.

Serenissime et Potentissime Princeps,
Domine Clementissime.

Cum magni Persarum Regis amplissima Legatio, quae hic aliquandiu apud Sacram Caesaream Maiestatem Dominum meum Clementissimum morata est, nunc in Italiam cogitet, et antequam Romam venerit Serenissimam Celsitudinem Tuam in Etruria Sua salutare, et quae in mandatis habet eidem reverentes exponere constituerit, mei officii esse ratus sum,

---

TICONE iuniore contenente parecchie notizie concernenti i figli ed i figli dei figli dell'astronomo danese: in esso TICONE seniore v' era inscritto con le seguenti parole: « *Disce puer virtutem ex me durumque laborem fortiter et sortis sustinuisse vices. TYCHO BRAHE filio TYCHONI primogenito scripsi. Anno 1599, feb. 28. Witebergae.* »

Serenissimam Celsitudinem Tuam et TENGNAGLIO nostro clementiss
bene meritam hisce litterulis submisse compellare praesertim cum Le
tionis eius antesignanum Illustrissimum Dominum AMMONIUM SCHERI
natione Anglum filius meus natu maior, TYCHO nomine, comitetur.
autem ille idem filius quem antea in Serenissimae Celsitudinis Vest
Aula aliquamdiu servire exoptaram, nisi ostacula quaedam intervenisse
quae attingere supervacaneum. Tradidissem illi opera quae hactenus
Astronomicis elucubravi secum adsportanda, prout Serenissima Celsit
Vestra aliquando clementissimis suis ad me literis expetiit, nisi quaed
in singulis ferme adhuc desiderarentur, typographico labore necdum al
luta. Quod ubi effectum, Serenissimae Celsitudinis Vestrae Clementissi
voluntati demisse et lubentissime obsecundabo.

Remoram nonnullam, quo minus illa ad colophonem deducta
iniecit migratio mea ex Arce prioris habitationis Bennatica huc Prag
sic clementissime mandante Caesarea Maiestate quo propior ei fac
humillima mea servitia ipsius Maiestatis promptius praestare possem,
tis etiam huc omnibus instrumentis astronomicis, quibus antea in D
Patria mea usus sum, quae numero sunt 28, iisdemque in domo quae
ampla et magnifice, italica architectura, non longe ab Arce iuxta Caes
hortum extructa, ordine dispositis donec in locum quendam usui eo
aptiorem a Caesarea Maiestate clementissime deputatum transferantur. Q
et brevius futurum spero.

Idque Serenissimae Celsitudini Vestrae debita submissione (siqui
eam benignissime studiis meis favere compertum habeam) indicandum d

Pluribus vero Eam gravioribus intentam, hac mea interpellati
remorari, nec volo, nec decet.

Quare nunc finem facio. Id solummodo addens et humillime rog
ut Serenissima Celsitudo Vestra praedictum Filium meum sibi comn
datum habere non dedignetur.

DEVS OPT. MAX. Serenissimam Celsitudinem Vestram Reipub
emolumento quam diutissime servet florentem et incolumem.

Praga, die 28 Ianuarii Anno 1601.

Serenissimae Celsitudini Vestrae
Submisse Addictissimus
TYCHO BRAHE,
manu propria scripsi.

Fuori: Serenissimo et Potentissimo Principi ac Domino,
Domino FERDINANDO Magno Duci Etruriae etc.
Domino suo Clementissimo.

Notizie storiche sulla misura degli angoli solidi e dei poligoni sferici.

Di G. VACCA in Torino.

L' idea di angolo solido sembra nota ai più antichi filosofi greci.

ARISTOTELE[1]), raccogliendo le opinioni dei suoi predecessori sulla costituzione della materia, aveva già osservato che, nello stesso modo che tre sole figure possono riempire il piano, il quadrato, il triangolo e l' esagono, nello spazio due sole, la piramide ed il cubo.

EUCLIDE[2]) dà due definizioni di angolo solido (στερεὰ γωνία) la prima delle quali, secondo l' HEIBERG, rimonta forse a più antichi geometri. EUCLIDE però non vide che questi angoli solidi fossero suscettibili di misura.

Bisogna risalire ad AVERROE[3]) per un primo tentativo di misura. Egli suppone che l' angolo solido del tetraedro regolare sia due terzi dell' angolo solido del cubo, perchè la somma degli angoli delle faccie del primo vale due terzi della somma corrispondente del secondo. Questo grave errore doveva essere confutato molti secoli dopo da MAUROLICIO.

È nelle opere di WITELO pubblicate nel 1572 da F. RISNER che si trova il primo teorema importante sulla misura degli angoli solidi[4]):

« Proportionem partis superficiei sphaericae ad totalem superficiem suae sphaerae, sicut anguli solidi in ipsam a centro sphaerae cadentis, ad octo rectos solidos necesse est esse. E NICOLAO CABASILLA[5]) in 3 librum *Magnae constructionis* PTOLEMAEI. »

---

1) ARISTOTELIS *Opera omnia*, ed. DU VAL (Lutetiae Parisiorum 1619), t. 1, p. 483 (Phys. lib. VIII, cap. VIII).

2) EUCLIDIS *Opera omnia* ed. HEIBERG (Lipsiae 1885), t. 4, p. 4 (lib. 11, Df. 11).

3) Queste notizie su AVERROE e quelle successive su MAUROLICIO sono stratte dalla interessantissima nota di L. DE MARCHI, *Di tre manoscritti del MAUROLICIO che si trovano nella biblioteca Vittorio Emanuele di Roma* (Biblioth Mathem. 1885, col. 193—195).

4) VITELLONIS *Thuringopoloni opticae libri decem. Instaurati a* FEDERICO RISNERO (Basileae 1572), lib. I, prop. 87, pag. 33.

5) Il commento quì citato di Νικολάου τοῦ Καβάσιλλα, si trova in PTOLEMAEI *Magnae constr.* (Basileae, Walderus 1538) t. 2, p. 131—194. Sembra molto interessante,

La dimostrazione ivi data è insufficiente, merita però di essere riprodotta come un primo tentativo dell' uso degli indivisibili, decomponendo egli l' area del triangolo sferico con un sistema di circoli massimi.

«..... sit *abc* pars superficiei sphaericae alicuius spherae cuius centrum sit *d*: et ducantur lineae *ad*, *bd*, *cd*: et in ipsa superficie ducantur lineae *ab*, *bc*, *ac*: fietque piramis, cuius vertex est punctum *d*, et basis *abc*.

Palam quoque quoniam angulus circa punctum *d* est solidus, tribus angulis superficialibus contentus.

Dico, quod quae est proportio illius anguli ad 8 angulos rectos solidos, qui replent locum solidum circa centrum *d*, eadem erit proportio superficiei sphericae, quae est *abc*; ad totam sphaericam superficiem suae sphaerae.

Imaginentur enim plurimi circuli magni, transeuntes per omnia puncta illius superficiei, non secantes se super illam. Patet itaque, quoniam aliqui arcus illorum circulorum determinantur per lineas terminales illius superficiei: omnium autem illorum arcuum partialium ad totos suos circulos est proportio sicut angulorum contentorum sub lineis a centro *d* ad ipsorum terminos productis ad 4 rectos superficiales per 33, f. 6. Patet ergo propositum ».

Sembra che questo passo debba attribuirsi a RISNER: certo gli appartiene la citazione di KABASILLA, nato probabilmente dopo la morte di WITELO.

REGIOMONTANO in uno scritto attualmente perduto (Biblioth. Mathem. 1885, 193) si è occupato del problema *de figuris solidis locum implentibus*; inoltre in una lettera del 4 luglio 1471 indirizzata a CHR. RODER, ha posto (ma non risolto) il problema di trovare l' area di un triangolo sferico i cui lati sono 15°, 24°, 34° (vedasi: Abhandl. zu Gesch. der mathem. Wissensch. **12** (Leipzig, Teubner 1902), p. 332).

Vengono quindi in seguito gli importanti lavori di MAUROLICIO pur troppo però ancora inediti, malgrado che fin dal 1885 il prof. L. DE MARCHI avesse fatto notare l' utilità della loro pubblicazione.[1])

Debbo quindi limitarmi a riportare alcuni passi dell' opuscolo:

« De quinque solidis, quae vulgo regularia dicuntur, quae videlicet eorum locum impleant, et quae non, contra commentatorem ARISTOTELIS AVERROEM ».

In esso MAUROLICIO considera gli angoli solidi e gli angoli diedri in quanto essi riempiono lo spazio attorno ad un punto, o attorno ad un asse (*verticaliter* od *angulariter*).

ma io non ho potuto in un rapido esame rinvenirvi la notevole proposizione che RISNER gli attribuisce.

1) Biblioth. Mathem. 1885, col. 195.

«Solidae ... figurae locum implere dupliciter intelligi possunt, aut angulariter, aut verticaliter.

Tunc enim angulariter solidae figurae locum implent, cum illarum anguli ex duorum planorum concursu effecti ad unam rectam sic copulantur, ut nihil in medio vacui supersit. Verticaliter autem locum eas implere dico, cum ipsarum vertices, ubi tria vel plura plana conveniunt, ad unum punctum sic copulantur undique concurrentes, ut nihil in medio loci non impletum remaneat».

Sarebbe interessante poter vedere dalle dimostrazioni di questo opuscolo di MAUROLICIO, come egli arrivi a riconoscere la falsità dell' opinione sopra citata di AVERROE, che dodici angoli solidi del tetraedro regolare riempiono lo spazio, ed altresì di poter vedere fino a che punto egli avesse spinto ricerca dei solidi regolari che riempiono lo spazio, aggiungendo egli a quelli dati da ARISTOTELE «pyramides cum octahedris cumpactas»; tanto più che la soluzione completa della questione e stata data soltanto in tempi recenti, interessando la cristallografia teorica.

E quì vi è una lacuna che altri forse un giorno potrà colmare.

Da una nota del BALTZER[1]) sembra che BROZEK (BROSCIUS) nella sua *Apologia pro ARISTOTELE et EUCLIDE*[2]), abbia trovato la regola per il calcolo dell' area di un poligono sferico, come desunta da *antiquis in VITELLONEM notis.*

Non ho potuto consultare il passo di BROSCIO, ma mi sembra però probabile che egli abbia voluto riferirsi soltanto alla misura dell' angolo solido per mezzo della superficie sferica corrispondente, che si trova nel passo da me precedentemente riportato.

Dobbiamo ora occuparci di HARRIOT. È a questo matematico, che non pote' veder stampato nessuno dei suoi importanti lavori, che si deve la scoperta dei teoremi di cui discorro in questa nota. Le sue dimostrazioni si sono perdute: ma è ben possibile che tanto CAVALIERI, quanto GIRARD, non si siano accinti a riprendere lo stesso problema senza che un' eco della sua soluzione fosse giunto a loro.

Ecco su quali titoli si fondano i diritti di HARRIOT.[3])

H. BRIGGS era in corrispondenza con KEPLERO. Nella sua lettera del 20 Febbraio 1625, con cui accompagnava l' invio della sua *Arithmetica logarithmica* (Londini 1624), gli scriveva:

«Cum doctissimus vir et geometra, THOMAS HARRIOTTUS, longe peritissimus invenerit modum metiendi angulum quemlibet solidum, ab angulis

1) BALTZER, *Elemente der Mathematik*, Aufl. 6 (Leipzig. 1883), t. 2, p. 167.

2) La prima edizione fu pubblicata in Danzig 1652, la seconda in Amsterdam 1699 (si veda Biblioth. Mathem. 1894, pag. 24).

3) Da me pubblicati nell Bollett. di bibliogr. delle sc. matem. 5, 1902, 1—6.

planis comprehensum, quantitatem anguli solidi tetraëdri hic adjungen censui, ut constaret, quam longe recedant a vero, qui arbitrantur, 12 gulos tetraëdri complere locum solidum.

Valet enim Angulus solidus tetraëdri $\frac{350958}{1000000}$ anguli solidi recti, ut locus solidus capiat 11 huiusmodi angulos et amplius.

Cum propediem expectemus et exoptemus ipsius auctoris lib posthumum (T. Harriotus, 1621), qui istud problema inter alia m ejus acutissima scripta nobis patefaciet, modum mensurandi illi integ relinquam: ne illi quicquam proripuisse aut ipsam rem non pro digni tractasse videar ». (Kepleri, *Opera omnia*, ed. Frisch, vol. IV, Francof 1863, p. 661).

Questo passo di Briggs rende manifesto che Harriot sapeva misu l' area del triangolo sferico; il calcolo riportato lo dimostra.

Ma vi ha di più. Nei Mss. di Harriot scoperti dal Barone di Zach 1784, e conservati ora nel « British museum » a Londra, nel mss. 6787 fol. 106 r. si trova il passo seguente, di mano di Harriot:

« Inveni rationem accuratam mensurandi superficies triangolo sphaericorum 18: sept: 1603.

Et est talis: Adde simul omnes angulos trianguli inde detrahe quod superest fac numeratorem ad 360. Dico quod illa fractio expri partes haemisphaerii quae continet triangul: vel tot gradus numera circulo magno quot sunt in numeratore et a polo illius circuli descend duo quadrantes terminantes illos gradus; dico quod hoc triangulum ae tur triangulo sphaerico praedicto ».

Lo stesso passo è ricopiato nel vol. 6001—2 fol. 24 Harl. Mss. un copista anonimo (forse Pell?), il quale vi ha scritto sotto: Mr. Harri

Più innanzi (add. 6785 fol. IV, fol. 119ʳ), ma senza data, si tr pure scritto da Harriot il seguente:

« Canon universalis, pro superficie cuiuslibet polygoni sphaerici.

Adde omnes angulos cuiuslibet polygoni simul: a summa subtr toties 180 quoties possibile: dimidium reliqui aequale est superfi polygoni ».

Non vi ha ragione per dubitare dell' autenticità di questi passi: risulta dalla lettera di Briggs sopra riportata, e dalla storia dei m scritti di Harriot.[1])

La dimostrazione di Girard è contenuta nella sua *Invention nou en l' algebre* (Amsterdam 1629) ristampata nel 1884 dal Bierens de H

1) Si veda p. es. la biografia di Harriot inserita nel *Dictionary of nat biography ed. by* Leslie Stephen *and* Sidney Lee (London 1890), vol. 24, p. 437—

Nel capitolo (fol. G 1ᵛ) intitolato: *De la mesure de la superfice des triangles & polygones sphericques, nouvellement inventée*, egli « à fin de declarer ... ceste science incogneuë jusques à present, si ce n'est devant le deluge » comincia col definire come si misurino gli angoli solidi. Passa quindi a dimostrare il teorema (fol. G 3ᵛ):

« Tout polygone sphericque compris d'arcs de cercles majeurs, tient autant de degrez superficiels, que la somme de tous ses angles interieurs excede la somme des angles interieurs d'un polygone rectiligne de mesme nom: quand la superfice de la sphere est posée estre de 720 degrez superficiels ».

Egli vede subito come la dimostrazione può limitarsi ai triangoli sferici, e la sviluppa in quattro pagine (fol. H 1ᵛ—H 3ᵛ).

LAGRANGE [1]) così giudica questa dimostrazione di GIRARD: « ... la preuve qu'il en donne n'est point rigoureuse, ... elle ne peut pas même être regardée comme une induction; on devrait plutôt attribuer ce théorème à CAVALIERI, qui l'a donné ... avec la belle démonstration rapportée par WALLIS, et inserée depuis dans la plus part des trigonométries ».

Dopo aver letto con attenzione la intricata dimostrazione di GIRARD, mi pare che non si possa convenire nel severo giudizio di LAGRANGE: sembrandomi invece che la dimostrazione di GIRARD abbia, almeno per la storia della matematica, un' importanza notevole, essendo fondata in sostanza sull' uso degli infinitesimi.

Ed è a notarsi che GIRARD stesso, maravigliato dall' insolito ragionamento, non osa darlo che « *en conclusion probable* ».

Per provare questa mia asserzione, ecco la dimostrazione che col nostro linguaggio traduce rapidamente quella data da GIRARD. [2])

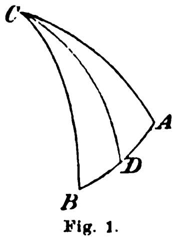


Fig. 1.

Sia dato il triangolo sferico ABC (Fig. 1). Lo si decomponga in striscie con tanti circoli massimi passanti per C. Basterà far vedere che il teorema sussiste per ogni striscia, cioè per ogni triangolo avente il lato AB infinitamente piccolo; poichè se è vero per due triangoli ADC, DBC aventi per base due archi BD, AD di uno stesso circolo massimo è pure vero pel triangolo sferico ABC che essi formano insieme, avendo questo triangolo la somma degli angoli eguale alla somma degli angoli di ciascuno dei due triangoli, diminuita di due retti.

1) LAGRANGE, Journal de l'école polytechnique, t. 2, cah. 5, pag. 275.

2) Mi permetto di fare una versione molto libera, per non allungare e complicare la dimostrazione.

Sia adunque CAB (Fig. 2) un triangolo avente il lato AB infinitesimo. Si conduca il circolo massimo AD normale ad AC. Il triangolo ADC, rettangolo in A, ha la stessa area del triangolo ABC (essendo trascurabile l' area ABD) ed ha la somma degli angoli eguale a quella del triangolo ABC. Infatti avendo il triangolo ABD tutte le sue dimensioni infinitesime, l' angolo esterno ADC è eguale alla somma dei due interni ed opposti DAB, DBA.

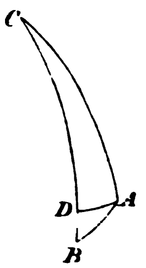


Fig. 2.

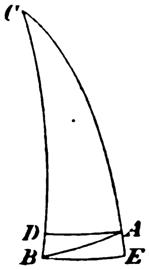


Fig. 3.

Basterà quindi limitarci a dimostrare il teorema per un triangolo rettangolo avente un cateto infinitesimo. Sia esso ABC (Fig. 3), rettangolo in A. Si conducano (considerando C come polo) i paralleli AD, BE.

Siano a, b, c i lati del triangolo ABC, ed A, B, C gli angoli. Per un noto teorema di ARCHIMEDE, l' area del triangolo ADC vale $(1-\cos b)\,C$, quella del triangolo BEC vale $(1-\cos a)\,C$. Quindi si avrà

$$(1-\cos a)\,C > \text{area } ABC > (1-\cos b)\,C. \qquad (\alpha)$$

Ora da EUCLIDE si sa che $A+B+C>\pi$, ed essendo

$$A=\frac{\pi}{2}, \quad \text{si avrà} \quad \frac{\pi}{2}-B<C.$$

Perciò da due teoremi di ARISTARCO:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}{\frac{\pi}{2}-B} > \frac{\sin C}{C}; \quad \frac{\operatorname{tang} C}{C} > \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}{\frac{\pi}{2}-B}$$

da cui:

$$C\frac{\cos B}{\sin C} > \frac{\pi}{2}-B > C\frac{\cot B}{\operatorname{tang} C};$$

ricordando che $A=\frac{\pi}{2}$, ed applicando note formole di trigonometria sferica:

$$(1-\cos a)\,C > A+B+C-\pi > (1-\cos b)\,C. \qquad (\beta)$$

Dalle (α), (β) si vede che l' area ABC e l' espressione $A+B+C-\pi$ sono comprese sempre fra gli stessi limiti. Ricordando infine che C è infinitesimo, il primo ed il 3° membro delle diseguaglianze (α) e (β) tendono a coincidere; si conclude quindi che l' area ABC tende verso (*veut esgaler*) il numero $A+B+C-\pi$.

Con ciò il teorema si può ritenere dimostrato. Non riporto la notissima dimostrazione di CAVALIERI[1], notando però che essa pure, mal-

1 *Directorium generale uranometricum* ... *authore* F. BONAVENTURA CAVALERIO Bononiae 1632, pag. 316.

grado la sua semplicità, solleva una difficoltà, superata solo molto più tardi; cioè egli ammette l' eguaglianza delle aree di due triangoli sferici simmetrici, aventi cioè i lati e gli angoli ordinatamente eguali. Questo teorema si trova enunciato e dimostrato nella *Géométrie* di LEGENDRE.[1])

Non voglio terminare senza ringraziare il signor G. ENESTRÖM a cui debbo la conoscenza di diverse opere citate in questa nota, ed a cui sono dovute varie citazioni di libri a me inaccessibili.

1) *Eléments de géométrie,* éd. 4 (Paris 1812), p. 221, livre VII, prop. XXI.

Simon Stevin und das hydrostatische Paradoxon.

Von D. Schor in Göttingen.

P. Duhem hat in dieser Zeitschrift (1_3, 1900, S. 15—19) einen Artikel: *Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique?* veröffentlicht, worin gezeigt wird, daſs Archimedes keine richtige Vorstellung vom hydrostatischen Drucke gehabt hat. Wie der Verfasser klar und deutlich beweist, hat Archimedes das folgende, überhaupt falsche Prinzip seiner Lehre von Flüssigkeiten zu Grunde gelegt: „*Pour connaître la pression exercée sur une aire AB* (Fig. 1), *concentrique à la Terre, menez par la contour de AB, des verticales AA′, BB′, ... qui formeront une sorte de vase tronc conique; la pression sur la paroi AB est égale au poids de tout ce qui existe dans ce vase, liquide ou solide.*“[1]) — Da aber diese Aussage nur dann zutrifft, wenn der Erdmittelpunkt unendlich weit entfernt ist — eine Bedingung, welche von Archimedes nirgends aufgestellt wird, — so zieht Duhem folgenden Schluſs daraus: „Il n'en reste pas moins que les lois découvertes par Archimède touchant la flottaison des corps graves nous offrent un mémorable exemple de vérités obtenues par une méthode erronée. Il convient de réviser le jugement de Lagrange[2]) au sujet de Simon Stevin et de regarder le géomètre de Bruges comme l'inventeur des véritables fondements de l'hydrostatique.“[3])

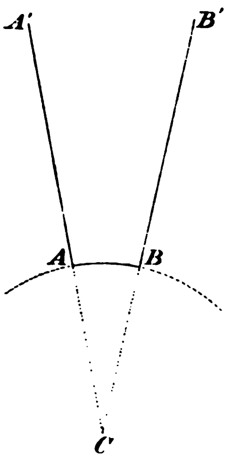


Fig. 1.

1) Duhem, a. a. O. p. 17.

2) Lagrange sagt nämlich: „Quoique d'après ce qu'Archimède avait démontré, il ne fût pas difficile de déterminer la pression d'un fluide sur le fond ou sur les parois du vase dans lequel il est renfermé, Stevin est néanmoins le premier qui ait entrepris cette recherche, et qui ait découvert le paradoxe Hydrostatique, qu'un fluide peut exercer une pression beaucoup plus grande que son propre poids.“ (*Mécanique analytique*; nouvelle édition, T. I. Paris 1811. Première partie, section VI, p. 176.)

3) Duhem, a. a. O. p. 19.

Nun will ich zeigen, dafs Stevin diese falsche, aber natürliche Vorstellung teilt. Im vierten Buche seines Traktates „*De l'art pondéraire, ou de la Statique*"[1]) behandelt er die Hydrostatik. Zunächst stellt er eine Reihe von *Definitionen*, welche, wie auch die ersten fünf darauf folgenden *Petitionen*, für uns kein Interesse haben. In der *Petition VI* setzt er voraus, die Oberfläche des Wassers sei horizontal, und erklärt in der folgenden *Declaration*, dafs solche Annahme für seine Zwecke genau genug ist. Weiter steht folgendes: „— *Petition VII. — Si une colomne droite d'eau a sa base et couvercle parallele à l'horizon, et sa superfice laterale perpendiculaire dessus (assavoir toutes les lignes droites entre les poinctes correspondans du couvercle et de la base perpendiculaires à l'horizon) qu'on nous concede que ces perpendiculaires tendent au centre de la terre, et que la base et le couvercle, soyent parties de la superfice de la terre.* — *Declaration.* — Soit $ABCD$ (Fig. 2) une eau, en figure de colomne droite, AB, CD paralleles à l'horizon, et AD, BC, etc. perpendiculaires dessus, soit aussi E centre de la terre, duquel menées EFA, EGB, etc. et fait FG semblable à DC; cela estant ainsi, combien que AD, BC ne tendent pas en E, nous demandons qu'on nous concede qu'elles y tendent, veu l'insensible difference qu'on y trouve en la practique, n'y ayant que des longueurs, superfices, et corps qui n'ont aucune raison sensible aux dimensions de la terre totale; En apres qu'on nous concede que AB, CD soyent parties de la superfice de la terre, assavoir AB, si la superfice de la terre estoit aussi esloignée du centre; et DC, si la superfice de la terre estoit en apres aussi esloignée du centre E." — Nachdem Stevin diese Voraussetzung aufgestellt hat, wendet er sich zur Ableitung der Gesetze, welche das Schwimmen und Einsinken verschiedener Körper im Wasser bestimmen; diese ganzen Auseinandersetzungen lassen wir aufser Acht, da sie für unser Thema nicht von Bedeutung sind. Dagegen erlaube ich mir den unmittelbar darauf folgenden Satz hervorzuheben, um ihn dann etwas näher zu besprechen.

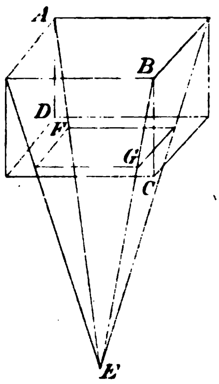


Fig. 2.

An dieser Stelle[2]) behandelt nämlich Stevin den Bodendruck: — „*Theoreme VIII. Proposition X. — Sur le fond de l'eau, parallele à*

1) Ich zitiere nach der bekannten französischen Ausgabe von A. Girard: *Les œuvres mathématiques de* Simon Stevin (Leyden 1634). Das holländische Original dieses Buches — *De Beghinselen des Waterwichts* — ist bekanntlich in Leyden im Jahre 1586 zusammen mit der Stevinschen Statik — *De Beghinselen der Weeghconst* — erschienen.

2) *Œuvres* éd. Girard, p. 487—488.

l'horizon, repose un poids, egal à la pesanteur de l'eau, qui est egal à l colomne, dont la base est le fond susdit; et la hauteur, la perpendicle su l'horizon entre le fond et la fleur de l'eau. — Le donné. Soit *ABC* (Fig. 3) une eau, en figure de parallelipipede rectangle, sa fleur *AB*, *EF* un fond à niveau, *EG* la perpendicle ent le fond *EF* et la fleur d'eau; la colomne so celle qui est comprise entre le fond pour base *EF*, et *GE* hauteur, assavoir la colom *GEFH*. — *Le requis.* Il faut demonstrer q sur le fond *EF* repose un poids egal à pesanteur de l'eau de la colomne *GEFH*. *Demonstration.* — Si sur le fond *EF* repo

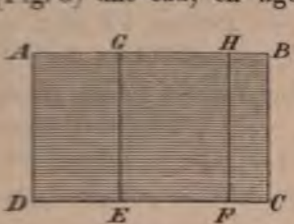


Fig. 3.

un poids plus grand que *GEFH*, cela viendra à cause de l'e prochaine: Soit, s'il est possible, de l'eau *ADEG*, et *HFCB*; et mesme pourra-on dire que sur le fond *DE* repose plus que l'eau *ADE* et sur *FC* plus que l'eau *HFCB*; tellement que sur *DC* reposera pl que l'eau *ADCB*; ce qui est absurde estāt iceluy un parallelipipe rectangle. Semblablement on demonstrera que sur *EF* ne repose p moins que *GEFH*, et par consequent sur *EF* reposera precisement poids egal à la colomne d'eau *GEFH*."[1]) — Hier wird von Stevin sti schweigend angenommen, der Druck auf den Boden *DC* könne unmögli dem Gewichte der im cylindrischen Gefässe *ADCB* enthaltenen Flüss keit ungleich sein. Schon hierin ist, meiner Meinung nach, diese Allgemeinen falsche Annahme enthalten, welche Duhem bei Archimed gefunden hat. Freilich ist sie hier ganz richtig, aber keinesfalls selb verständlich, denn das Paradoxon besteht eben darin, dafs Druck und (wicht gar nicht ein und dasselbe sind.

Noch schärfer tritt diese falsche Vorstellung im Beweise selbst h vor. Stevin behauptet, dafs auf den Teil *EF* nur das drücken ka was sich über demselben in senkrechter Richtung befindet, d. h. Wasser *GEFH*. Wir wissen seit Pascal, dafs der Druck in Flüss

1) Diese *Demonstration* lautet im Original (*Beghinselen des Waterwichts*, p. 2 „— Thewys. Soo op den bodem *EF* meer ghewicht rust dan des waters *GHF* dat sal moeten commen van weghen t'neuenstaende water; Laetet sijn soot mueg lick waer, van t'water *AGED* ende *HBCF*; Maer dat soo ghenomen, daer sal den bodem *DE*, van weghen t' water *GHFE*, om dat de reden de selue is, o meer ghewichts rusten dan des waters *AGED*; ende op den bodem *FC*, oock m ghewichts dan des waters *HBCF*, ende vervolghens op den bodem *DC* sal m ghewichts rusten, dan des heelen waters *ABCD*, t'welck (ghemerckt *ABCD* lichamelick rechthouck is) ongheschickt waer. S'ghelijcx sal men oock bethoonen op den bodem *EF* niet min en rust dan t'water *GHFE*, daer rust dan not kelick op t'ghewicht eenn ande swaerheyt waters des pilaers *GHFE*."

keiten sich nach allen Richtungen fortpflanzt und man ebenso gut sagen kann, der Druck auf den Bodenteil *EF* rühre von dem Wasser *ADEG*, oder aber vom Wasser *GEFH* her.

Ich meine sogar, daſs man ohne das PASCALsche Prinzip das hydrostatische Paradoxon nicht richtig verstehen kann. Es drängt sich jedem von selbst die oben in der Formulierung von DUHEM herbeigeführte falsche Annahme auf, welche ohne Zweifel tiefe psychologische Wurzeln hat. DUHEM sagt selbst: „Remarquons, tout d'abord, que cette hypothèse est celle qui se présente naturellement à tout esprit non instruit des lois de l'hydrostatique; c'est parcequ'elle contredit cette hypothèse que la proposition de STEVIN semble un paradoxe. Il n'est donc pas étonnant qu'elle ait été admise par le premier qui ait traité de l'équilibre des liquides."[1]) — Und es ist nicht ohne Interesse zu bemerken, daſs auch noch jetzt, wo die mathematische Theorie der Hydrostatik so weit fortgeschritten ist, in vielen Elementarbüchern der Physik der Lehre von Flüssigkeiten dieselbe falsche Prämisse zu Grunde gelegt wird. So, um ein Beispiel herbeizuführen, stellt MÜLLER-POUILLET folgende Behauptung auf, woraus er das hydrostatische Paradoxon ableitet: — „Daſs der Druck auf den Boden eines geraden cylindrischen Gefässes gleich ist dem Gewichte des darin enthaltenen Wassers ist klar; daſs aber der Druck auf den Boden der oben erweiterten, verengten und schrägen Gefäſse derselbe sein muſs, bedarf noch eines Beweises."[2])

Unwillkürlich entsteht die Frage: Wie konnte denn STEVIN das hydrostatische Paradoxon nicht begreifen, zumal er selbst es zuerst gefunden hat? — Das hydrostatische Paradoxon wird in den fünf *Corollaires* zu der oben angeführten *Proposition X* auseinandergesetzt. Zunächst zeigt STEVIN, daſs ein schwimmender, starrer Körper den Bodendruck nicht alteriert; dann denkt er sich das Wasser im Gefäſse bis auf einen Kanal von beliebiger Form, durch starre Körper von demselben spezifischen Gewicht wie das Wasser (*„corps solides parigraves à l'eau"*) ersetzt, und der Druck auf den Boden des so erhaltenen beliebig geformten Gefäſses muſs daher der *Proposition X* genügen. Weiter stellt sich STEVIN den ganzen starren Körper bis auf einen gefäſsförmigen Teil entfernt vor und, da dadurch nichts verändert werden soll, muſs der Druck auf den Boden eben so groſs bleiben. STEVIN erklärt also das hydrostatische Paradoxon ähnlich, wie es heutzutage noch in vielen Lehrbüchern geschieht. D. h. er geht von der Annahme aus, daſs auf den Boden nur

---

1) DUHEM, a. a. O. p. 17.

2) MÜLLER-POUILLETS *Lehrbuch der Physik und Meteorologie*, Aufl. 9 herausg. von L. PFAUNDLER. I. Band (Braunschweig 1886), S. 370 ff.

alles das drückt, was sich über demselben in senkrechter Richtu befindet, um dann durch mehr oder weniger logisch berechtigte Schlüs das Gegenteil zu zeigen. Von einer Idee, die mit dem Pascalschen Pri zip verwandt wäre, weiſs Stevin nichts.

Während in der obenstehenden Darlegung gezeigt worden ist, d die falsche Annahme, auf den Boden drücke nur das, was sich senkrec darüber befindet, von Stevin indirekt benutzt wird, habe ich diese A nahme bei ihm *auch direkt ausgesprochen* gefunden, und zwar in der A merkung zu derselben *Proposition X:* — „*Notez.* — Nous pourrions au proposer la 10 proposition comme s'ensuit: — *Sur quelconque fond d'ea de superfice parallele à la fleur d'icelle, repose un poids egal à la pesante de l'eau, comprise dans un secteur spherique, tronqué par une superf spherique parallele, ou homocentrique à la superfice spherique de la terre.* Nous eussions fait aussi les demonstrations comme dessus, mais no l'avons delaissé pour les raisons descrites en la septiesme petition"[1]) (v oben S. 199). Das ist in etwas wenig klarer Formulierung dassel was Duhem bei Archimedes stillschweigend vorausgesetzt findet (v oben S. 198).

Indem ich oben zu beweisen suchte, daſs Stevin ebenso wie Arc medes vom hydrostatischen Drucke eine unrichtige Vorstellung geha hat, will ich damit keineswegs sagen, daſs man die Bedeutung Stevi unterschätzen soll. Umgekehrt ist die Aussage von Lagrange (vgl. Anm. 2 S. 198) ganz zutreffend: Stevin hat zuerst den Druck auf den Bod und die Wände des Gefäſses bestimmt; aber nur für den Fall des unei lich weit entfernten Erdmittelpunktes. Eine allgemeine Theorie Hydrostatik lieſs sich, wie schon Lagrange bemerkt hat[2]), nur dann e wickeln, als man *das Prinzip der virtuellen Verschiebung* zu Hülfe nah was durch Pascal in seiner berühmten Schrift *Traité de l'équilibre liqueurs* zuerst in einwandsfreier Weise geschehen ist. In der üblich Darstellung der Geschichte der Hydrostatik ist aber weder die von Duh hervorgehobene Thatsache in Betreff Archimedes berücksichtigt w

1) Diese Anmerkung lautet in *Berghinselen des Waterwichts* (p. 23) folgend maſsen: „— Mercky. Wy souden t'boveschreuen 10e voorstel eyghentlicker aldus ghesprocken hebben: — Op yder bodem des waters in een weereltvlack sijn rust een ghewicht euen ende swaerheyt waters die euegroot is mettet clootsd begrepen tusschen den bodem ende tweereltvlack duer t'waters hoochste punt, e t'vlack tusschen die twee vlacken, beschreuen met de oneindelicke rechte lini v in t'weerelts middelpunt, ende ghedraeyt duer des bodems* omtreck. (*Circumfer tiam*). — Daer af bewysende sulcx als bouen bewesen is, maer om de redenen on de 7e begheerte verclaert, soo ist beter ghelaten."

2) *Mécanique analytique*, p. 178.

den, noch das, worauf ich in der gegenwärtigen Notiz hinweise, erwähnt.[1]) Und dadurch erscheinen, meiner Meinung nach, die Leistungen von drei grofsen Begründern der Hydrostatik — ARCHIMEDES, STEVIN und PASCAL — in einer falschen Beleuchtung.

---

1) Vgl. F. ROSENBERGER, *Die Geschichte der Physik* (Braunschweig 1882); J. C. POGGENDORFF, *Geschichte der Physik* (Leipzig 1879); QUÉTELET, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (Bruxelles 1864); E. DÜHRING, *Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik* (Berlin 1873); E. MACH, *Die Mechanik in ihrer Entwickelung* (IV. Aufl., Leipzig 1901).

Über den Ursprung der Benennung „Pellsche Gleichung‘

Von G. Eneström in Stockholm.

Am Ende seines Aufsatzes über J. H. Rahn[1]) hat Herr G. We heim die Frage nach dem Ursprung der falschen Benennung „Pells Gleichung“ für $ax^2 + 1 = y^2$ als eine noch offene bezeichnet und Hoffnung ausgedrückt, dafs die Sache baldigst aufgeklärt werden w Unserer Ansicht nach genügt schon das vorhandene Material, um die I stehung der Benennung befriedigend zu erklären, ohne dafs es nötig eine ganz neue Untersuchung anzustellen; auf der anderen Seite glau wir nicht, dafs eine solche Untersuchung neue Thatsachen an den bringen würde.

Bekanntlich hat man behauptet, dafs Pell in den Anmerkungen der englischen Übersetzung, die Brancker im Jahre 1668 von deutschen Algebra Rahns herausgab, die von Brouncker und Wal gefundene Auflösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ dargestellt hat[2]), a bezüglich dieser Behauptung, die, soweit uns bekannt ist, zuerst v Hankel[3]) bestimmt ausgesprochen wurde, haben die Herren H. Kone und G. Wertheim[5]) bemerkt, dafs sie unrichtig ist, da das Göttin Exemplar der Branckerschen Übersetzung, das unzweifelhaft vollstän ist[6]), die Auflösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ *nicht* enthält. Di Bemerkung ist ohne weiteres entscheidend, und es erübrigt nur zu zeig

1) G. Wertheim, *Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die e lische Übersetzung derselben;* Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 113—126.

2) Vgl. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II², S. 777.

3) H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittela* (Leipzig 1874), S. 203.

4) H. Konen, *Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$* (Leipzig 1901), S. 34.

5) Wertheim, a. a. O. S. 126.

6) Die Bibliothek der schwedischen Akademie der Wissenschaften besitz Exemplar der Branckerschen Übersetzung; zwei andere Exemplare derselben die Bemerkung des Herrn G. Wertheim S. 251 dieses Heftes) finden sich in Zü Stadtbibliothek und Bibliothek der naturforschenden Gesellschaft). Alle diese Exemplare stimmen vollständig mit dem Göttinger überein.

wie HANKEL, der die ziemlich seltene BRANCKERsche Arbeit wahrscheinlich nie selbst gesehen hatte, zu seiner unrichtigen Behauptung gekommen ist. Für diesen Zweck genügt es auf die betreffende Stelle in ARNETHS *Geschichte der Mathematik*[1]) hinzuweisen. Hier findet man nämlich folgende Notiz: „Diese erste Auflösung [durch BROUNCKER] . . . wurde von dem englischen Mathematiker PELL wieder vorgenommen, aber seine Auflösung war in vielen Fällen sehr weitläufig. In PELLS neuer Ausgabe von RAHNS Algebra, welche BRANCKER aus dem Deutschen ins Englische übersetzt hatte, kommt noch manches hierher Gehörige vor". Wer diese Zeilen liest, ohne das wirkliche Sachverhältnis zu kennen, mufs wohl die Ansicht bekommen, die PELLsche Auflösung befinde sich gerade in der citierten Arbeit von BRANCKER. Ob ARNETH selbst dieser Ansicht gewesen ist, hat für uns keine Bedeutung, da wir ziemlich leicht erraten können, dafs ARNETH aus KLÜGELS *Wörterbuch* geschöpft hat, und dieser nicht angiebt, dafs die PELLsche Auflösung in der BRANCKERschen Übersetzung vorkommt. Im Artikel: „PELLS Aufgabe"[2]) schreibt nämlich KLÜGEL u. a.: „PELLS Auflösung ist aber in manchen Fällen sehr langwierig. Man sehe EULERS Algebra, den Abschnitt von der unbestimmten Analytik, § 98 ff. . . . In seiner [d. h. PELLS] vermehrten und verbesserten Ausgabe von RAHNS Algebra, die BRANCKER aus dem Deutschen übersetzt hatte, kommt vieles über jenen Zweig der Analysis [d. h. der unbestimmten Analytik] vor, wie man aus dem Auszuge sieht, den WALLIS in seiner Algebra Cap. 57 davon giebt." Vergleicht man diesen Passus mit ARNETHS Worten, kann man wohl kaum zu dem Resultate gelangen, dafs die Übereinstimmung nur zufällig ist. Zwar sagt KLÜGEL nicht, dafs BROUNCKER vor PELL die Aufgabe gelöst hatte, aber zu dieser Bemerkung konnte ARNETH sehr wohl durch das Studium des Artikels „Unbestimmte Analytik"[3]) desselben *Wörterbuches* veranlafst worden sein; im Vorübergehen sei darauf hingewiesen, dafs dieser Artikel, der von GRUNERT herrührt, PELL gar nicht erwähnt.

Durch das Vorhergehende dürfte ersichtlich sein, wie die falsche Angabe, dafs PELL in der BRANCKERschen Übersetzung von RAHNS Algebra die Auflösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ gegeben hat, entstand. Mit HANKEL sind wir also jetzt fertig, und auch ARNETHS Behauptung, dafs PELL die BROUNCKERsche Auflösung der Gleichung „wieder vorgenommen" hat, können wir beiseite lassen, da sie allem Anschein nach auf einer unrichtigen Verknüpfung von zwei Notizen beruht, von denen die eine

---

1) A. ARNETH, *Geschichte der reinen Mathematik* (Stuttgart 1852), S. 278.
2) G. S. KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch*, Th. 3 (Leipzig 1808), S. 789—790.
3) KLÜGEL, a. a. O. Th. 5 (Leipzig 1831), S. 465.

[illegible] …ere sogleich berücksichtigt wer[illegible]
[illegible] die KLÜGELsche Bemerkung, [illegible]
[illegible] Kap. VII, § 98 ff. sich findet. Ri[illegible]
[illegible] …en, welche Aufschlüsse EULER [illegible]
[illegible] …ten Stelle finden wir freilich nur
[illegible] …ng aufgelöst hat und die Auseinan[illegible]
[illegible] als die PELLsche bezeichnet[1];
[illegible] EULER die PELLsche Gleichung
[illegible] PELL diese zuerst gelöst hat, ein
[illegible] PELL herrührt.[2] Dagegen hat EU[illegible]
[illegible] vom 10. August 1730 bemerkt, dafs „
[illegible] …enuus excogitavit D. PELL Anglus pec[illegible]
[illegible] …operibus expositam"[3]; er verweist
[illegible] Nun findet man zwar im zweiten Ba[illegible]
[illegible] Auflösung der Gleichung $ax^2 + 1 =$ [illegible]
[illegible] Forschungen auf dem Gebiete der
[illegible] …er Stelle, wo die Gleichung $ax^2 + 1 =$
[illegible] …ar nicht erwähnt, sondern die BROUNCKERs
[illegible] …er Stelle, die von PELL handelt, fehlt
[illegible] $+ 1 = y^2$. Auch in den zwei übri[illegible]
[illegible] …essen, keine Stelle, die die EULERsche N[illegible]
[illegible] …arum sehr nahe zu vermuten, dafs der ju[illegible]
[illegible] …ersten Brief an GOLDBACH schrieb, war er
[illegible] …des WALLIS nur [illegible] gelesen hat
[illegible] BROUNCKER verwechselte. Diese V[illegible]

1) Vgl. [illegible] WERTHEIM, Bibl. [illegible] 2 [illegible]
2) Vgl. [illegible] WERTHEIM, B[illegible] 2 [illegible] 1
[illegible] 401.
3) *Correspondance mathématique et physique* [illegible]
[illegible] tome I [illegible]
[illegible] 18.
4) WALLIS, *Opera mathematica* [illegible] Oxford 1693 [illegible]
[illegible] quaestionibus [illegible] [illegible]
[illegible] 127, 129: „Eadem [illegible] continuata".
[illegible] S. 234–236: „De [illegible]
[illegible] problematis [illegible] indeterminatis" [illegible]
[illegible]
5) Vgl. [illegible] a. a. O. S. 49.
6) Vgl. [illegible] von K[illegible] a. a. O. S. 49 [illegible]
7) Die [illegible] betreffenden Abschnittes [illegible]
[illegible] Mifsverständnissen führen kann, [illegible]
That [illegible] in der Algebra von W[illegible]
[illegible] vorstehe [illegible]
[illegible] …hrift entdeckt [illegible]

utung wird auch durch den Umstand bekräftigt, daſs EULER in seiner lgebra, nachdem er angegeben hat, daſs er die von PELL erfundene ethode zur Lösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ erklären will, genau e BROUNCKERsche Auflösung in der WALLISschen Form darstellt.[1])

Als Resultate unserer Untersuchung ergiebt sich also:

1. Die Benennung „PELLsche Gleichung“ ist dadurch entstanden, daſs EULER die zwei in den *Opera* des WALLIS erwähnten Mathematiker BROUNCKER und PELL verwechselt hat;
2. die Behauptung, daſs PELL die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ in der BRANCKERschen Übersetzung der RAHNschen Algebra behandelt hat, beruht auf einem Miſsverständnis von HANKEL.

1) Vgl. KONEN, a. a. O. S. 46.

Der Innsbrucker Mathematiker und Geophysiker Franz Zallinger (1743—1828).

Von SIEGMUND GÜNTHER in München.

Die Verhältnisse der exakten Wissenschaften, so wie sie sich
Übergange des XVIII. Jahrhunderts in das XIX. gestaltet hatten,
in der letzten Zeit eine erhöhte Beachtung. Aber im einzelnen
doch noch vieles zu thun übrig. Unwillkürlich verführt die be
Thatsache, dafs GAUSS zu den Mathematikern seiner Zeit nur gerin
ziehungen unterhielt, zu dem Trugschlusse, dieselben könnten sich
lich über ein gewisses niedriges Niveau nicht erhoben haben, w
doch daraus nur auf die unleugbare Überlegenheit des gröfsten D
seiner Zeit geschlossen werden kann, der gegenüber auch andere, im
der Zeitgeschichte betrachtet, ihren Platz als Gelehrte und Lehr
ausfüllten. Und gerade auf den kleinen süddeutschen Universitäten,
man vielfach nur kulturhistorisches Interesse zuzubilligen geneigt i
es einzelne in ihrer Art bedeutende Männer, die ganz gewifs im
ihres engeren Kreises einen segensreichen Einflufs ausübten, wen
ihnen auch schon durch die Stellung, welche sie einnahmen, die M
keit entzog, stärker hervorzutreten. Hier bleibt der historischen For
welche mit der Universitäts- und Gelehrtengeschichte enge Fühl
unterhalten hat, noch ein weites Feld eröffnet, dessen Bebauung
keine Ergebnisse von grundstürzender Tragweite, wohl aber danke
Einblicke in das Geistesleben damaliger Wissenszentren liefern kan
hoffen, dafs die nachfolgende monographische Schilderung diesen
Leitsatz bewahrheiten wird.

Das Lyzeum zu Innsbruck, eigentlich eine unvollständige Univ
der das Recht zustand, Doktoren der Philosophie zu ernennen, e
sich mehrere Jahrzehnte lang eines angesehenen Lehrers der Math
und Physik, dessen litterarische Thätigkeit eine äufserst vielseitig
zugleich nutzbringende war.[1] FRANZ JOSEPH ZALLINGER ZUM

1 Trotz unleugbarer Verdienste, mit deren Wesen uns die nachstehende
zung bekannt machen wird, ist die Orientierung [illegible] sehr du

us einer bekannten, geachteten Familie Südtirols stammend, bekleidete diese Professur zunächst in seiner Eigenschaft als Mitglied des Jesuitenordens, dem damals in Österreich das philosophische Studium fast mit Ausschliefslichkeit anvertraut war, und nachher als Exjesuit.[1]) Geboren am 14. Februar 1743 zu Bozen, starb er hochbetagt in Innsbruck am 2. Oktober 1828. Wie immer in solchen Fällen, läfst sich die unmittelbare Einwirkung des akademischen Lehrers auf die studierende Jugend nicht leicht nach festen Merkmalen beurteilen; indessen scheint der Um-

Mangel zuverlässiger Nachrichten erschwert. Selbst die in grofsem Stile angelegte *Deutsche Biographie* kennt ihn nicht. Die beste Quelle ist, wie vielfach, wenn es sich um Jesuiten handelt, die *Bibliothèque des écrivains de la Compagnie de Jésus*. Poggendorffs Aufzählung der Zallingerschen Arbeiten (*Biographisch-Litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, 2. Band, Leipzig 1863, Sp. 1391), ist weit davon entfernt, vollständig zu sein. Das Porträt vor dem Titelblatte der später zu erwähnenden Dissertation über die Hochfluten ist nicht, wie zu glauben nahe läge, dasjenige Zallingers, sondern das des Reichsgrafen Firmian, dem die Schrift zugeeignet ist. Natürlich machte der junge Mann zuerst den theologischen Lehrgang durch, und auch bei seiner Doktorpromotion wählte er ein einschlägiges Thema (*Dei infinita potestas cum ejus oeconomia conciliata*, Ingolstadt 1773), das aber doch schon die Neigung zur naturwissenschaftlichen Spekulation hervortreten läfst.

1) Ganz in gleicher Eigenschaft, d. h. als Professor der Philosophie, wirkte in Innsbruck ein Verwandter, Johann Baptist Zallinger zum Thurn (1731—1785). Auch von ihm rühren ein paar naturwissenschaftliche Schriften (Innsbruck 1769 und 1771), sowie solche über Agrikultur her (*De ortu frugum dissertatio ex mechanismo plantarum deducta*, Innsbruck 1769; *Beobachtungen über den Ackerbau*, Wien 1776). Die lateinisch geschriebene Abhandlung ist als ein Versuch, das Pflanzenwachstum auf physikalische Gesetze zurückzuführen, immerhin beachtenswert. Bedeutender war Jakob Anton Zallinger zum Thurn (1735—1815), der folgeweise in München, Dillingen, Innsbruck und Augsburg an den Jesuitenkollegien angestellt war und zuletzt als Privatmann in seiner Vaterstadt Bozen lebte. Er war ein eifriger und überzeugter Newtonianer, kein Anhänger der üblichen jesuitischen Schulphilosophie. Das bezeugen sowohl seine kleineren Arbeiten (*De lege gravitatis universali*, München 1769; *De expositione physica demonstrationum mathematicarum in philosophia naturali*, Dillingen 1772), als auch besonders sein Hauptwerk (*Interpretatio naturae seu philosophia Newtoniana methodo exposita*, Augsburg 1773—1775). Dafs dieses einen sehr achtbaren Standpunkt bekundende und eine umfassende Gelehrsamkeit verratende System gänzlich der Vergessenheit anheimfallen konnte, ist zu verwundern. Der erste der drei Bände ist der Logik, Metaphysik, Psychologie und „natürlichen" Theologie gewidmet; der zweite behandelt die „allgemeine" Physik oder Mechanik, und der dritte die „spezielle" Physik. Zu letzterer gehört auch die physikalische Geographie, die zwar kein Kapitel für sich darstellt, deren einzelne Teile dagegen in den verschiedenen Abschnitten ganz zweckmäfsig untergebracht sind. Von einigen Ausnahmen abgesehen, tritt allenthalben des Autors Bestreben zu tage, dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft Rechnung zu tragen. Da die bezüglichen Ausführungen gröfstenteils dem Sinne nach mit denjenigen übereinstimmen, die sich bei Franz Zallinger finden, so soll zunächst darauf nicht näher eingegangen werden.

stand, daſs ZALLINGER wiederholt bei der Verteidigung von Streitsätz als Präses fungierte, dafür zu sprechen, daſs er auch Schüler herangebild hat. Uns gehen hier natürlich nur seine Veröffentlichungen an, und zwa wieder am meisten jene, in denen uns selbständiges Denken und Forsche begegnet. Die übrigen mag es genügen in einer Randnote zusammenzu stellen.[1])

Nach vier Seiten hin erstreckt sich ZALLINGERS Streben, neue wissen schaftliche Werte zu produzieren. Er bearbeitet die Elektrizitätslehre, di Meteorologie, die Kartographie und Geodäsie, die Mechanik, und endlich mit besonderem Erfolge, die Hydrologie. Aber auch seine Thesensamm lungen dürfen nicht auſser acht gelassen werden. Er liebte es nämlich anderen Veröffentlichungen eine Zusammenstellung von kurzen, auf di verschiedensten Zweige der Mathematik und Naturwissenschaft bezu nehmenden Aussprüchen anzuhängen, die ohne Beweis fundamentale Wahr heiten enthalten sollen. Wir werden ihrer jeweils bei den einzelne Schriften gedenken, die wir der Besprechung unterziehen.

ZALLINGERS elektrische Arbeiten sind der Nachwelt völlig aus den Gedächtnis gekommen; kein physikalisches Geschichtswerk thut ihrer Er wähnung, und selbst HOPPES selten versagendes Repertorium[2]) befrag man vergebens. Und doch muſs die einschlägige Schrift Beifall gefunde haben, weil sie eine neue Auflage erlebte.[3]) Uns freilich will die An nahme einer „elektrischen Materie", welche zur „phlogistischen" einig Verwandtschaft unterhalte, nicht mehr zusagen, aber vor hundert und meh Jahren entsprach dieselbe doch dem allgemeinen Zeitbewuſstsein, das auc noch am „Wärmestoffe" keinen Anstoſs nahm, ganz und gar. Aber ZAL LINGER begnügte sich nicht mit theoretischen Auseinandersetzungen, son dern wandte seine Hypothese auch auf ein Problem an, das damals hoh Aktualität besaſs und selbst heute noch nicht als endgiltig geklärt gelte

1) Es sind die folgenden: *Praelectiones ex mathesi pura*, Augsburg 1783; *Pra lectiones ex mathesi applicata*, ebenda 1798; *Praelectiones ex physica theoretica et ex perimentali*, Innsbruck 1805.

2) E. HOPPE, *Geschichte der Elektrizität*, Leipzig 1884.

3) F. ZALLINGER, *Von den elektrischen Grundsätzen*, Innsbruck 1779; zweite Au gabe, ebenda 1801. Der Autor hatte sich, dem Vorworte zufolge, zur Abfassung dies Schrift wesentlich durch den Umstand anregen lassen, daſs seine Vorlesung üb Experimentalphysik niemals so gefüllt war, als wenn die elektrischen Versuche a der Reihe waren, daſs mithin dieser Gegenstand auf allseitige Teilnahme rechn durfte. Viel Neues darf man nicht erwarten; wohl aber liegt eine gute Verarbeitun der damals den modernsten Standpunkt anzeigenden Untersuchungen von PRIESTL VOLTA und BECCARIA vor. Angehängt sind auch diesem Schriftchen *Propositiones physicae*, die sich auch über die Anfangsgründe der — zur Zeit natürlich phlogistischen Chemie erstrecken.

kann. Er gehört zu den zeitlich ersten Erforschern der Thermoelektrizität der Krystalle.[1]) Was LINNÉ, AEPINUS, WILCKE, CANTON in der Erkundung der elektrischen Eigenschaften des aus Ceylon nach Europa gebrachten Halbedelsteines geleistet, war dem Tiroler Gelehrten wohl bekannt, und vor allem war seine Erkenntnis wertvoll, dafs der in seinem Vaterlande häufige, gemeine Schörl, wiewohl als schwarz und undurchsichtig vom „brasilianischen Smaragd“ und „Rubellit“ dem Anscheine nach sehr verschieden, thatsächlich echter Turmalin sei. Diese Behauptung eröffnet gleich die inhaltreiche Monographie[2]); auch der sächsische Schörl sei wahrscheinlich identisch. Die wohl ausgestattete Mineraliensammlung eines Grafen ENZENBERG lieferte die aus Brasilien bezogenen Probeexemplare. Zur Untersuchung diente ein Elektroskop, dessen Kügelchen aus Kork oder aus dem Mark der Sonnenblumen hergestellt waren. So glückte denn die Wiederholung aller bereits bekannten Grundversuche, ferner die Elektrizitätserregung durch Reibung; wesentlich neu war die Ausdehnung des Experimentes auf die Abkühlung.[3]) Die „Mutmafsungen über die Elektrizität des Turmalins“[4]) zeichnen sich durch verständige Abwägung dessen aus, was der Physiker leisten und was er nicht leisten kann. Das Publikum

1) E. HOPPE, a. a. O. S. 50 ff. AEPINUS (*Recueil de différents mémoires sur le tourmaline*, St. Petersburg 1762) hatte zuerst gezeigt, dafs der Turmalin, den die holländischen Entdecker „Aschentrekker“ nannten, von Hause aus völlig unelektrisch ist, und dafs entgegengesetzte Pole an einem solchen Krystalle erst dann bemerkbar werden, wenn man ihn erwärmt, wobei jedoch noch ein wichtiges Moment unberücksichtigt geblieben war. Die Ergänzung lieferte der Schwede BERGMAN (*Om tourmalinens electriska egenskaper*, Upsala 1766) durch den Nachweis, dafs der Erwärmungsakt als solcher neutral verläuft, und dafs die Herausbildung von Polen an den Enden des Krystalles nur erfolgt, wenn die letzteren ungleich temperiert sind. Ziemlich gleichzeitig hatte WILCKE die analoge Wahrnehmung gemacht. CANTON endlich (*An account for the regular diurnal variation of the horizontal magnetic needle, and also for its irregular variation at the time of an Aurora Borealis*; Philosophical Transactions 1759, S. 398 ff.; damit zusammenhängend *On the electrical properties of tourmaline*; Gentlemen's magazine 1759) konnte das verwandte Verhalten eines Magneten darthun, welches sich äufsert, wenn man beide in Stücke zerbricht; jedes Fragment hat wieder seine eigenen Pole. „CANTON“, schreibt HOPPE (a. a. O., S. 52), „hatte zu seinen Experimenten einen vollständigen Krystall, während alle anderen an geschliffenen Ringsteinen beobachteten, also wenig Elektrizität erhielten.“ Wir werden uns gleich überzeugen, dafs ZALLINGER in diesem Punkte noch weit günstiger als sein englischer Vorgänger gestellt und im Besitze eines viel reichhaltigeren Beobachtungsmateriales war, das er auch gut auszunützen verstand.

2) F. ZALLINGER, *Abhandlung von der Electricität des in Tirol gefundenen Turmalins*, Innsbruck 1779.

3) Ebenda S. 13: „Es ist unlaugbar, dafs der Turmalin bey der Abkühlung an seinen zwoen Grundflächen entgegengesetzte Electricitäten enthält.“

4) Ebenda S. 37 ff.

verlange gewöhnlich von ihm eine Aufklärung über die innersten U sachen, „denn sonst, sagt man, ist er nichts als ein Geschichtsschreiber de Natur.“ ZALLINGER scheint sich, obwohl er dies nicht geradezu sagt, in dieser Rolle ganz behaglich zu fühlen. Ihm kommt es nur darauf an, die Gesetze aufzufinden, denen die natürlichen Erscheinungen gehorchen; hat man erst sie ermittelt, so mag man ja wohl noch über den Urgrund der Dinge nachdenken, aber besser ist es durchweg, die eigene Unwissenheit einzugestehen, damit nicht andere in Irrtümer verfallen. Doch sei wohl gewiſs, daſs die elektrischen Eigenschaften „mit dem inneren Baue“ des Krystalles zusammenhingen. Auch stehe, weil das Verhalten der beiden Pole niemals ein gleichartiges sei, ganz fest, daſs „die elektrische Materie“ an einem Pole eine „leichtere Bewegung“ — d. h. eine gröſsere Bewegungsfreiheit — als am anderen finde. Ganz befriedigt die Hypothese ihren Begründer nicht; er wünscht, die Versuche mit einem kräftigeren Turmalinkrystalle wiederholen zu können.

Der Appendix enthält „Propositiones ex physica“. Satz 19 handelt von absoluter und relativer Festigkeit („cohaerentia respectiva“). In der Lehre vom Lichte gilt noch die Emanationstheorie, deren Gegnerin, die Vibrationstheorie, der Autor übrigens auch kennt, indem er in Satz 38 sein Glaubensbekenntnis folgendermaſsen formuliert: „Lumen non consistit in pressione, aut motu vibratorio aetheris circa corpora lucida diffusi; sed potius in tenuissimo effluvio, praesertim materiae igneae, e corpore lucido jugiter emisso.“ Das Wesen der Körperfarben — Absorption und Reflexion — wird zutreffend angegeben. Als klar denkender Vertreter der neueren, antischolastischen Quellenlehre erscheint der Autor in Satz 54: „Origo fontium ac fluminum a pluviis aliisque aquis ex atmosphaera deciduis repetenda videtur.“ Hinsichtlich des Polarlichtes steht ZALLINGER natürlich auf dem Boden seines Zeitalters, wogegen sein Abweichen von der HERSCHELschen Sonnenfleckenhypothese und seine Auffassung der Kometenschweife den selbständigen Denker verraten.[1])

Gleich nach seiner Anstellung in Innsbruck begann ZALLINGER mit regelmäſsigen Beobachtungen, die er konsequent weiterführte. Zuerst legte er 1784 der Öffentlichkeit seine Resultate vor.[2]) Auſser Luftwärme und Luftdruck wurden auch der Stand des — BRANDERschen — Hygrometers,

1) Satz 58 und 59: Lux borealis potissimum reflexione luminis solaris vel lunaris in particulis coagulatis, politis, inaequaliter densis, et vento quovis mobilibus facta nascitur. Maculae solares non sunt nisi exhalationes et fuligines ex sole ascendentes; caudae vero cometarum tenuissimi vapores ab eorum capite in propria atmosphaera elevati.“

2) F. ZALLINGER, *Witterungsbeobachtungen, nebst einigen Höhenmessungen mit dem Barometer*, Innsbruck 1784.

Heiterkeit und Bewölkung des Himmels, Regen und Windrichtung in die Tabellen aufgenommen. Eine Vergleichung des Witterungscharakters von Innsbruck und Bozen lehrt, dafs derselbe an letzterem Orte ein ungleich günstigerer ist — gerade wie heute. „Wetterableiter“ sah man schon in jener frühen Zeit hin und wieder in Tirol, vorzugsweise auf Pulvermagazinen. Von Erdbeben war im XVIII. Jahrhundert innerhalb des Beobachtungsgebietes wenig zu verspüren.

Nunmehr tritt Zallinger an die für die Witterungskunde seines Zeitalters mafsgebendste Frage heran: Inwieweit beeinflufst der Mond das Wetter? Dafs eine derartige Einwirkung, und zwar eine recht kräftige, bestehe, galt als gewifs, denn die Lehren zweier hochgeschätzten italienischen Meteorologen, Toaldo und Chiminello, beherrschten suverän die Geister.[1]) Um so höher müssen wir es Zallinger anrechnen, dafs er sich von jedem Autoritätsglauben freihielt und eine kühle Prüfung seiner Register an die Stelle erhabener Spekulationen setzte. Was er auf Grund der ersteren als seine Überzeugung hinstellt, ist so verständig, dafs auch ein moderner Meteorologe nichts daran auszusetzen finden wird. Der betreffende Satz lautet nämlich: „Allgemein bin ich der Meinung, dafs es zwar zwischen den Barometerhöhen“ — insoweit diese nämlich der Mond bestimmen hilft — „und dem Wetter eine Verbindung gebe, die sich aber wegen der allzu vielen Ursachen, von welchen beide abhängen, niemals auf einen gröfseren Grad der Wahrscheinlichkeit wird bestimmen lassen.“ Alle Regeln Toaldos werden für unhaltbar erklärt. So halte derselbe beispielsweise dafür, dafs bei Annäherung des Mondes an die Erde, weil dann die Anziehungskraft sich stärker bethätige und das atmosphärische Gleichgewicht störe, die Regenhäufigkeit zunehmen müsse. Allein von 735 Regentagen entfielen 345 auf das Perigäum, 390 auf das Apogäum. Auch sei durch Boscovich und Frisi schlagend erhärtet worden, dafs ein mefsbarer Einflufs der Mondattraktion auf unsere Lufthülle nicht angenommen werden dürfe.

Auch der Höhenbestimmung mit dem Barometer schenkte Zallinger

1) Da uns, trotz so vieler schätzbaren Einzelbeiträge, eine zusammenfassende Geschichte der atmosphärischen Physik immer noch fehlt, so ist auch jene hochinteressante, folgenreiche Episode eines letzten kräftigen Auflebens der Astrometeorologie noch nicht in ihrer historischen Bedeutung charakterisiert worden. Zum einen Teile traten jene Italiener für die Hypothese ein, dafs die Witterung in erster Linie von der mit der Entfernung jener Weltkörper wechselnden Anziehung des Mondes und der Sonne auf unsere Lufthülle abhänge; zum anderen Teile huldigten sie dem Irrglauben, dafs nach Umflufs einer bestimmten Zeit („Saros météorologique“) die Witterungsfaktoren sich ganz in der gleichen Reihenfolge und Stärke immer wieder zusammenfinden müfsten. Vgl. des Verf. Schrift: *Der Einflufs der Himmelskörper auf die Witterungsverhältnisse*, Nürnberg 1884.

große Aufmerksamkeit. Er teilt[1] eine größere Anzahl von tirolischen Höhenkoten mit, die vermöge der De Lucschen Höhenformel, also unter Bedachtnahme auf die Temperaturverschiedenheit der unteren und oberen Station, berechnet worden waren. Auch waren damals schon mehrfach Barometerbeobachtungen in Schächten angestellt worden, um deren Tiefe zu ermitteln. Dies zu thun, hatte allerdings schon hundert Jahre vorher der Schotte Sinclair vorgeschlagen[2], aber Zallingers Vorgänger J. v. Weinhart[3] ist jedenfalls unter den ersten zu nennen, die in diesem Sinne konsequent vorgingen. Derselbe erhielt für die Sohlentiefen der Schwazer Silbergruben sehr gut mit der Wirklichkeit stimmende Werte, die aber erst durch seinen Nachfolger bekannt gemacht wurden. Von letzterem wäre auch noch zu erwähnen, daß er L. v. Buch bei seinen damals weit aussehenden Unternehmen, ein barometrisches Nivellement quer von Nord nach Süd durch die Ostalpen zu legen, seine Unterstützung lieh.[4] Er und U. Schiegg in Salzburg übernahmen die zu diesem Behufe erforderlichen Korrespondenzbeobachtungen.

Auch der zuletzt besprochenen Schrift ist ein Anhang „Materia tentaminis publici ex mathesi applicata" beigegeben, der zumeist katechetisch in Frageform abgefaßt ist. Einbezogen sind praktische Arithmetik, M[illegible] festen Körper, Zivil- und Kriegsbaukunst, Hydrotechnik, praktische Optik, F[illegible]kunst, Gnomonik und Astronomie. In Satz 46 ist [illegible] neuen Methoden die Sprache, Polhöhe und geographische [illegible] bestimmen.

A[illegible] ist Zallinger auf seine Witterungsbeobachtungen [illegible] so wertvoller wurden, einen je längeren [illegible] Im Jahre 1807 lief die dreißigjährige Reihe [illegible] große Aufgabe der Sichtung dieses statt[illegible] daß ihr Ergebnis an die Öffentlichkeit [illegible] besonders die thermometrischen und [illegible] zur Gewinnung einer Charakteristik des

[illegible]

[1] [illegible] Rotterdam 1666, S. [illegible]
[2] [illegible] langen Lebens 1765–1787 [illegible]
[3] [illegible] ist in der [illegible]
[illegible] Stellung, die er zu den [illegible]
[illegible] Weinhart, Elogium [illegible]
[illegible] Beratung und [illegible]
[illegible] ersten dieser Name [illegible]

[4] [illegible] vorgenommenen Höhen[illegible]
[illegible] Mineralogie 9 Band.
[illegible] S. 55 ff.

Innsbrucker Klimas verwertet wurden.[1]) Für das Jahr sowohl, wie für dessen einzelne Monate wurde die Mitteltemperatur abgeleitet; als Ablesungstermine waren die Zeiten 4^h a. m. und 2^h p. m. festgehalten, indem zugleich nach Thunlichkeit, so gut es ohne automatische Instrumente geschehen konnte, die Extremtemperaturen aufgesucht wurden. Als Wärmemittel für den Beobachtungsort fand ZALLINGER 7,505° R. = 9,381° C. Es freute ihn, diese Zahl durch eine theoretische Betrachtung kontrollieren zu können. TOBIAS MAYER der Ältere hatte kurz zuvor eine Formel für die Bedingtheit des thermometrischen Jahresmittels t_m durch die Breite φ angegeben[2]), indem er $t_m = 24 \cdot \cos^2 \varphi$ setzte, eine Lage des Ortes am Meeresspiegel vorausgesetzt. Dies liefert für die Polhöhe 47° 16′ $t_m = 11{,}5°$ R. Nun liegt aber Innsbruck 354 Klafter hoch, und da man auf 100 Klafter 1° R. Temperaturabnahme rechnen kann, so ist die wahre Mitteltemperatur gleich 11,05° — 3,54° = 7,51° R.; übereinstimmend mit dem empirischen Werte. Ein so harmonisches Zusammentreffen war freilich nur dem Zufalle zu danken.

Die Barometerhöhe fand sich im langjährigen Mittel gleich 25 Zoll 11,74 Linien. Verglichen mit der Wiener Durchschnittszahl, lehrte die erstere, dafs die Innsbrucker Sternwarte 175,47 Klafter über der Wiener gelegen sei; die Berechnung stützte sich auf eine TREMBLEYsche Formel.[3]) Es lag nahe, auch wieder an der Hand ausgiebiger Daten auf das Problem der lunaren Wetterbeeinflussung zurückzukommen.[4]) Nach TOALDO werden aufs neue „die Ziehkräfte des Mondes und der Sonne“ untersucht, von denen man, falls sie überhaupt wahrnehmbar sind, voraussetzen darf, dafs sie sich ganz in derselben Weise, wie die Gezeiten des Meeres, offenbaren

---

1) F. ZALLINGER, *Auszug meteorologischer Beobachtungen von dreifsig Jahren in Innsbruck mit einer Anwendung auf das letzte Jahr 1807*, Innsbruck 1808 (Auszug aus dem 4. Bande der Zeitschrift Sammler für Geschichte und Statistik in Tirol). Die Instrumente waren richtig aufgestellt, während für ihre Konstruktion nach unseren Begriffen keine Gewähr hätte übernommen werden können, da sie, wie ausdrücklich bemerkt wird, ganz einfach beim „Barometer-Krämer“ gekauft worden waren.

2) TOB. MAYERI *Opera inedita*, ed. LICHTENBERG, 1. Band, Göttingen 1775. Darin ist als erster Teil die für terrestrische Physik und Ausgleichungsrechnung gleich wichtige Abhandlung enthalten: *De investigandis legibus variationum thermometri ex methodo, qua astronomi ad motuum coelestium inaequalitates cognoscendas utuntur.* Eine analoge Formel besafs man bereits von HALLEY (*On the proportional heat of the sun in all latitudes*; Philosophical Transactions 1693, S. 878 ff.).

3) Hier müssen starke Fehler obwalten. Nehmen wir nämlich, wie es stets geschieht, Wien als in 170 m, Innsbruck als in 579 m Meereshöhe gelegen an, so ist die Höhendifferenz gleich 409 m = 215,7 Klafter, die alte österreichische Klafter gleich 1,8965 m gerechnet.

4) A. a. O. S. 21 ff.

müssen. Allein die mittleren Barometerstände erweisen sich von de
Stellungen des Mondes und der Sonne so gut wie ganz unabhängig. De
Neumond entspricht mehr heiteren Tagen als der Vollmond, und das Zu
sammenfallen einer Syzygie mit der Erdnähe ist ohne jede Bedeutung
„Man kann also mit Grund behaupten, dass der Einfluſs der Ziehkräft
des Mondes und der Sonne auf das Barometer und die Witterung in einige
Rücksicht wahrscheinlich, doch noch zweifelhaft und so klein sei, daſs e
leicht von anderen Ursachen könne unmerklich gemacht werden.“ De
neunjährige Zyklus in den Regenbeobachtungen bestätige sich ebens
wenig. Einer schematischen Auffassung der meteorologischen Prozess
tritt Zallinger mit dem Hinweise auf die seinen Aufzeichnungen z
entnehmende Thatsache entgegen, daſs schönes Wetter gelegentlich auc
bei tiefem, stürmisches Wetter auch bei hohem Barometerstande eintrete
kann. Von Erdbeben waren in den abgelaufenen drei Jahrzehnten neu
undzwanzig, von Nordlichtern elf[1]) registriert worden.

Hiermit wenden wir uns der dritten Gruppe wissenschaftlicher A
beiten unseres Autors zu. Wir besitzen von ihm nur eine einzige Ve
öffentlichung[2]) geodätisch-kartographischen Charakters, aber diese ist e
wohl wert, einer ebenso totalen wie ungerechtfertigten Vergessenheit en
rissen zu werden. Es handelt sich um drei nicht direkt zusammenhängend
Probleme. Zuerst nämlich soll gezeigt werden, wie auf Grund einer Lande
vermessung eine Karte dieses Landes angefertigt werden kann; zum zweite
ist von der Verbesserung älterer Karten die Rede; an dritter Stelle en
lich werden gewisse Methoden der Netzentwurfslehre, vor allem die pe
spektivischen, der Erörterung unterstellt. Es wird also zunächst das Wese
der Basis- und Winkelmessung auseinander gesetzt, indem für die Einze
heiten eine Verweisung auf die Werke von Boscovich, Liesganig, Scherffe
und Ammann stattfindet. Das Meſstischchen und die Zollmannsche Winke
scheibe sind, als zu wenig Genauigkeit gewährleistend, zu verwerfen, un
unter allen Umständen ist zur Anvisierung der entfernten Fixpunkte d

---

1) Diese Zahl läſst sich ganz gut vereinbaren mit den von H. Fritz (*Das Pola
licht*, Leipzig 1881, S. 11 ff.) gezogenen Isochasmen, den Ortskurven der Erdorte, f
welche die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Anzahl von Nordlichtern in gegeben
Zeit zu sehen, die gleiche ist. Durch Innsbruck geht ungefähr die Isochasme 0
hindurch, und nach obiger Zählung läge die Stadt auf der Isochasme 11 : 30 = 0,3

2) F. Zallinger, *Anmerkungen über die Verbesserungen der partikulären Lan
karten*; Abhandlungen einer Privatgesellschaft von Naturforschern un
Oekonomen in Oberdeutschland 1, München 1792, S. 36 ff. Dieser ers
Band scheint auch der einzige geblieben zu sein; über den Verein selbst, der dies
Organ besaſs, hat sich nichts ermitteln lassen. Herausgeber war der bekannte bay
rische Akademiker F. v. Schrank (1747—1835), dem wir weiter unten nochmals b
gegnen werden.

Fernrohr zu verwenden. Auch von der Bussole, deren Nadel durch Metallmassen beeinflufst werden kann, sieht man besser ab. Dagegen kann zur Einschaltung von Ortslagen in die grofsen Dreiecke die Mensel unbedenklich angewandt werden. Von einer Reihe von Punkten mufs man die geographischen Koordinaten kennen, zu deren Bestimmung die von HELL angegebenen Verfahrungsweisen zu empfehlen sind, während für die Azimutmessung BOSCOVICH und LIESGANIG sehr brauchbare Regeln angegeben haben. Von letztgenanntem rührt auch eine Näherungsmethode zur Ermittelung der einer gegebenen Polhöhe entsprechenden Länge eines Meridiangrades her, von welcher ZALLINGER um so lieber Gebrauch macht, weil die Theorie der sphäroidischen Erdgestalt noch nicht so vollkommen begründet sei, um ganz zuverlässige Berechnungen jener Bogenlängen zu ermöglichen. Die Längen der Parallelkreisbogen kann man, so lange es sich um kleine Längendifferenzen handelt, auch ohne sphärische Trigonometrie durch eine einfache Proportion finden. Nachdem man so die Grundlagen für die Karte erhalten, setzt man für dieselbe einen Mafsstab fest und trägt an eine gerade Linie, die den ebenfalls nach Gutdünken anzunehmenden Mittelmeridian repräsentiert, in den berechneten Abständen senkrecht die gleichfalls berechneten Parallelbogen an. Nun tritt freilich eine Schwierigkeit auf: Einerseits sollen sich Meridiane und Parallele möglichst in den der Wirklichkeit angepafsten Verhältnissen schneiden, und andererseits sollen die Schnittwinkel durchweg rechte sein. ZALLINGER schlägt vor, die Abszissen und Ordinaten einer Anzahl von Punkten zu bestimmen und daraufhin deren Ort auf der Karte festzulegen, worauf man dann die Verbindungslinien als geradlinig gelten lassen könne. Damit wäre dann das Netz der Karte, die natürlich keinen grofsen Teil der Erde umspannen darf, hergestellt, und es bedarf nur noch einer Verständigung über die Gröfse der geographischen Meile, die in der richtigen Reduktionsgröfse am Rande verzeichnet sein soll. Wenn man den Halbmesser R der Erdkugel, die dem Erdellipsoide substituiert werden kann, dadurch bestimmt, dafs man die sphäroidische Erdoberfläche E ausmittelt und $4R^2\pi = E$ setzt[1]), so ist

1) Wie ZALLINGER dieses E gefunden hat, sagt er hier noch nicht. Er mufs ersichtlich die Komplanation eines Umdrehungsellipsoides durchgeführt haben, was zwar in geschlossener Form möglich, aber immerhin nur durch ziemlich mühsame Rechnungen zu bewerkstelligen ist, insofern es ihm um die Auswertung des Doppelintegrales

$$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

zu thun ist, wenn

$$b^2(x^2 + y^2) + a^2z^2 = a^2b^2$$

als die Gleichung des Ellipsoides betrachtet wird (s. u.).

$$1 \text{ Geogr. Meile} = \frac{R\pi}{15 \cdot 180} = 3916,125 \text{ Klafter}$$

zu setzen. Zur Flächenmessung eignet sich die Überdeckung der mit durchscheinendem Papiere; auf ihm zeichnet man die Grenze und summiert die innerhalb derselben gelegenen Kartenrechtecke ANICHsche Karte lieferte so für die gefürstete Grafschaft Tirol Flächeninhalt von 7355649573 Quadratklaftern.

Die zweite der oben genannten Aufgaben verlangt, dafs mar nur angenäherte, sondern möglichst genaue Werte für die Meridia Parallelgrade des Erdsphäroides besitze. Hier nun zeigt sich ZALı mit dem Mechanismus der analytischen Geometrie in einer Weis traut, wie es damals wohl noch nicht sehr allgemein war. Den A rialhalbmesser der Meridianellipse $= a$, den Polarhalbmesser $= b$ s während n das Stück der im Punkte A an die Kurve gelegten N zwischen A und dem Durchschnitte mit der Ebene des Äquators be findet er den Krümmungshalbmesser im Punkte A

$$\varrho_A = \frac{a^2 n^3}{b^4}.$$

Gesetzt, es sei derjenige Meridiangrad, der durch den Äquator h wird, $= G_0$ und derjenige, der durch den Breitenkreis des Punl halbiert wird, $= G_A$; da sich mit sehr grofser Annäherung die Grad wie ihre Krümmungsradien in den Mittelpunkten verhalten, so ha

$$G_0 : G_A = \varrho_0 : \varrho_A.$$

Es ist ferner $\varrho_0 = \frac{b^2}{a}$ und sonach

$$G_A = G_0 \cdot \frac{a^3 n^3}{b^6}.$$

Die Gröfse n läfst sich durch die geographische Breite φ des punktes von G_A ausdrücken, und zwar ist

$$n = \frac{b^2}{\cos\varphi \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \varphi}};$$

setzt man dies oben ein, so erhält man die Länge des Meridian durch lauter bekannte Gröfsen folgendermafsen dargestellt:

$$G_A = \frac{a^3 G_0}{\cos^{\frac{3}{2}} \varphi \, (a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daraus berechnet sich der zugehörige Parallelgrad als Kreisbogen

$$\frac{a^3 G_0}{b^2 \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \varphi}}.$$

Die obige Formel für G_A, so wie sie ZALLINGER giebt, ist noch

unbehilflich; sie nimmt aber eine elegante Gestalt an, sobald man die Exzentrizität ε der Meridianellipse mittelst der Relation

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

einführt. Dann wird nämlich

$$G_A = \frac{a^3 G_0}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Und dies ist keine andere als die berühmte BOHNENBERGERsche Formel, welche von dem württembergischen Mathematiker[1]) dazu benutzt ward, aus zwei gemessenen Meriadianbogen G_A und G_B mit den Mittelbreiten φ und ψ die Exzentrizität ε herzuleiten, indem durch einfache Umformung

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{G_A^{\frac{2}{3}} - G_B^{\frac{2}{3}}}{G_A^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi - G_B^{\frac{2}{3}} \sin^2 \psi}}$$

gefunden wird. Die Formel BOHNENBERGERS ist hiernach implicite in derjenigen von ZALLINGER enthalten. Und letzterer ist sich auch völlig klar über den wirklichen Sachverhalt. „Wäre die Erde", schreibt er, „eine vollkommene Sphaeroide, und würden die Beobachtungen durch nichts gestört, so könnte man aus jedem Paare von gemessenen Meridiangraden die Achsen bestimmen[2]); allein, wenn man die wirklich ausgemessenen Grade mit einander vergleicht, so findet man fast aus jedem Paare ein etwas verschiedenes Verhältnis der Achsen". Es leuchtet aus diesen Worten bereits ein leiser Zweifel daran hervor, ob wirklich eine endgültige Identität von Geoid und Sphäroid obwalte. Doch glaubt ZALLINGER den Bruch $b : a$, im Einklange mit SCHERFFER und FRISI, sehr approximativ gleich $230 : 231$ setzen zu dürfen, was einer Abplattung von $\frac{1}{231}$ gleich käme. In Wahrheit ist bekanntlich die Abweichung der Meridianellipse vom Kreise eine viel geringere.

Nunmehr wird an die Aufgabe der Komplanation, deren wir oben bereits gedachten, herangetreten, und wohl mit Recht durfte der Autor der Meinung[3]) sein, daſs vor ihm noch niemand sich an jene herangewagt habe.[4]) Die eine der im Doppelintegrale verbundenen Integrationen erledigt

---

1) BOHNENBERGER, *Astronomie*, Tübingen 1811, S. 187 ff.

2) Richtiger sollte es statt Achsen heiſsen Achsenverhältnis, wie ja auch aus dem Folgenden unmittelbar hervorgeht.

3) A. a. O. S. 61.

4) In der That scheint nur einmal vor ZALLINGER die Berechnung der Oberfläche eines zweiachsigen Ellipsoides geleistet worden zu sein, nämlich von L. EULER (*De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet*; Novi commentarii Petro-

sich leicht, und es bleibt noch

$$\int \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)\, y^2}\, dy$$

übrig. Dieses Integral findet sich gleich

$$\frac{y}{2}\sqrt{y^2 + \frac{b^4}{a^2 - b^2}} + \frac{b^4}{2(a^2 - b^2)} \log\left(y + \sqrt{y^2 + \frac{b^4}{a^2 - b^2}}\right) + C,$$

und die Konstante ist durch die Erwägung gegeben, daſs für $y = 0$ das ganze Integral sich annullieren muſs. Damit hat sich schlieſslich ergeben:

$$E = 2a\pi\left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right].$$

Der Meridiangrad jener Kugel, die dem Erdsphäroide an Oberfläche gleichkommt, muſs gleich 58742 Wiener Klaftern gesetzt werden, und die geographische Meile bekommt den früher vermerkten Wert.

Gestützt auf diese Resultate konstruiert Zallinger[1]) eine Tabelle, welche für jeden einzelnen Grad folgende Werte zu entnehmen gestattet: die Länge des Meridiangrades auf Sphäroid und Kugel, sowie die Länge eines Parallelgrades auf Sphäroid und Kugel nebst deren Differenz. Zallinger dürfte als einer der ersten — wo nicht als der erste — anzusehen sein, die uns Berechnungstafeln von der Einrichtung an die Hand gaben, wie sie nachmals durch H. Wagner und Hartl so erheblich vervollkommnet wurden. Wie man Interpolationen vornehmen und konkrete Aufgaben lösen könne, wird an mehreren Beispielen gezeigt. Auch die Frage, ob man bei der gewöhnlichen Kartometrie der sphäroidischen Gestalt der Erde Rechnung zu tragen verpflichtet sei, wird gestreift. Bei einem einigermaſsen groſsen Kartenmaſsstabe ist dies natürlich der Fall, wie dies durch die Betrachtung der Karte von Tirol unter verschiedenen Gröſsenverhältnissen erläutert werden kann.

Damit ist auch der zweite Teil von Zallingers Abhandlung genugsam besprochen, und es hat jetzt der dritte an die Reihe zu kommen. Es wird gleich die sehr allgemeine Forderung gestellt: Für eine ellipsoidische Erde die Gesetze der äquatorialen und polaren stereographischen Projektion aufzustellen.[2]) Durch Spezialisierung gelangt man zu den ana-

---

politani 16, 1772). Daſs Eulers Arbeiten noch nicht in die vom litterarischen Verkehre, nach des Autors eigener Angabe, nur wenig berührte Provinzuniversität gedrungen waren, wird nicht überraschen können. Kästners Studie, in der erwähnt wird, daſs auch schon Huygens sich mit dem Probleme beschäftigt habe (*Fläche eines elliptischen Sphäroids*, *Weitere Ausführung der mathematischen Geographie*, Göttingen 1795, S. 97 ff.), war damals noch nicht erschienen.

1) A. a. O. S. 64 ff.

2) A. a. O. S. 74 ff.

logen Ausdrücken für die kugelförmige Erde. Eigentlich Neues konnte hier nicht wohl gebracht werden, da u. a. KÄSTNER[1]) und RICHMANN[2]) die einschlägige Theorie sehr gründlich entwickelt hatten. Auf die stereographische folgt die zentrale Projektion, die man jetzt auch als die gnomonische bezeichnet[3]); doch wird hier nur die Kugelfläche ins Auge gefafst. Die orthographische, zu der nächstdem übergegangen wird, behandelt dagegen unser Schriftsteller wiederum ganz allgemein, indem er zeigt, dafs sich Meridiane und Breitenkreise des Rotationsellipsoides durchweg, soweit sie nicht Kreise oder Gerade werden, in Ellipsen verwandeln.

Den Schlufs des Ganzen bildet ein kurzer Hinweis auf die Natur der flächentreuen Abbildungen[4]), wobei LAMBERTS grundlegende Arbeit[5]) zur Richtschnur genommen wird, obwohl ZALLINGER seine Zylinderprojektion[6]) wenigstens für Länder unter niedrigen Breiten vorzieht. Endlich beschreibt er noch ein ihm eigenes Verfahren[7]), „die halbe Erdfläche so auf der Karte vorzustellen, dafs in den Meridian- und Parallelstücken ein sehr kleiner Fehler begangen werde". Die Parallelkreise erscheinen als konzentrische Kreisbogen von der gemeinsamen Gröfse 229°; der Mittelmeridian ist gerade, und die übrigen Meridiane sind gekrümmte Linien, welche dem ersteren, je nachdem ihre Länge östlich oder westlich ist, ihre konkave Seite symmetrisch zuwenden. Geradlinig sind die beiden den erhabenen Kreisausschnitt begrenzenden Meridiane, in welche die um 180° vom Mittelmeridiane abstehende Meridianhälfte auseinanderfällt. Ein Versuch, die Meridiane auf eine Gleichung zurückzuführen, ist nicht gemacht worden.

Der dritten Kategorie ZALLINGERscher Arbeiten gehört, wie wir ein-

1) KAESTNER, *Theoria projectionis stereographicae horizontalis*; Dissertationes mathematicae et physicae, Altenburg 1771, 12. Abteilung.

2) RICHMANN, *De perficiendis mappis geographicis, inprimis universalibus, per idoneas scalas metiendis distantiis inservientes*; Commentarii Petropolitani 13, 1751.

3) Einer früheren Bearbeitung der Lehre von der gnomonischen Abbildung (Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 18, S. 137 ff.) möge hier der nachträgliche Zusatz folgen, dafs auch KAESTNER (*Theoria projectionis superficiei sphaericae in planum tangens oculo in centro posito*; Acta academiae Moguntiacae, 1776) und SCHEIBFFER (*Abhandlung über die geographische und orthographische Projektion einer bei den Polen zusammengedrückten Ellipsoide*, Leipzig 1778) diese Manier ziemlich eingehend abgehandelt haben.

4) ZALLINGER, a. a. O. S. 89 ff.

5) LAMBERT, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, 3. Band, Berlin 1770.

6) Die Meridiane stehen, als gleichabständige Gerade, auf den gleichfalls geradlinigen Parallelen senkrecht. Die Abstände zweier Parallelen wachsen dagegen proportional zum Sinus der Breite.

7) ZALLINGER, a. a. O. S. 93 ff.

gangs festsetzten, die Mechanik an, und zwar kommt ebenso die Pri zipienlehre, wie auch die Hydraulik zu ihrem Rechte. Die Schrift[1]), welcl sich mit der ersteren beschäftigt, trägt ein entschieden didaktisches G präge. In der Vorrede wird Klage darüber geführt, daſs im herköm lichen physikalischen Lehrkurse so gar wenig Zeit auf die grundlegen Wissenschaft verwendet werden könne; auch liest man zwischen den Zeile daſs dem exakt denkenden Manne die Verquickung der Naturlehre m der Schulphilosophie unbequem war. Er habe, sagt er, durchweg d metaphysischen Begriffe durch physikalische ersetzt und eine geeigne Formelsprache eingeführt. „Et hoc quidem artificio problemata plurin mechanicae longe expeditius, elegantius, distinctius solvuntur." Mit L CAILLE[2]) halte er eine tiefergehende Behandlung der Mechanik ohne I finitesimalrechnung für ganz unthunlich, womit natürlich nicht ausgeschloss sei, daſs doch auch der Anfänger in den wenigen verfügbaren Stund sich nützliche Kenntnisse aneigne. Daſs die mechanischen Grundlehr noch keiner ganz allgemeinen Anwendung in der Natur fähig seien, müs zugestanden werden, weil man eben zunächst die den Thatsachen zu Grun liegenden Gesetzmäſsigkeiten aufgedeckt haben müsse; die molekular Kraftäuſserungen, wie sie bei der Kohäsion und beim chemischen Ve halten der Körper vorlägen, befänden sich noch nicht in diesem Fall Wären aber einmal diese Sätze bekannt, so werde auch der Unterstellu jener Kräfte unter die rationelle Mechanik nichts mehr entgegenstehen.

Alle Druck- und Stoſskräfte gestatten die Zurückführung auf d Schwerkraft.[3]) Diese letztere wird deswegen zur Norm genommen, ab trotzdem werden die Bewegungsgleichungen auch für ein allgemeiner Attraktionsgesetz $m\mu : r^n$ (m und μ Massenpunkte, r deren Entfernun n eine beliebige ganze Zahl) abgeleitet. Beispielshalber wird nach Newt der Weg bestimmt, den der Mond, von der Schwungkraft befreit, in ein Sekunde gegen die Erde zurücklegen würde. Auch wird der Luftwid stand sowohl beim freien Falle, wie auch beim lotrechten Wurfe berüc sichtigt. Anläſslich der Zentralbewegung berechnet ZALLINGER Werte f die Krümmungsradien der drei Kegelschnitte (s. o.) Sodann verbreitet sich über menschliche und tierische Kräfte, über Flüssigkeitsbewegung u über die Reibung. Indem er zum Schluſs alle Maschinen als Hebelve bindungen auffaſst[4]), entwickelt er die Beziehungen zwischen Weg u

1) ZALLINGER, *De generali et absoluta virium mechanicarum mensura dissertat* Innsbruck 1777.

2) LA CAILLE, *Leçons de mécanique* (1. Auflage Paris 1743).

3) ZALLINGER, a. a. O. S. 14 ff. „Et igitur in casu particulari res devolvitur, ratio datae vis ad gravitatem terrestrem rite determinetur."

4) ZALLINGER, a. a. O. S. 75 ff. Im Gegensatze zu VARIGNON, der — sowie

Zeit und kennzeichnet die mechanische Arbeit in ganz zutreffendem Sinne, wobei er auf EULERS[1]) Theorie der einfachen Maschinen bedacht nimmt. Der ganze Tenor der Darstellung zeigt, daſs sich der Autor sehr gründlich in die durch GALILEI begründete Reform der Statik und Dynamik eingelebt hat und zumal auch der Erkenntnis des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit gar nicht ferne stand.

Nur kurz sei hingewiesen auf eine Studie zur Dynamik[2]), welche uns wesentlich nur beweist, daſs gerade auch die EULERschen Arbeiten ihm nicht fremd geblieben waren. Über die theoretische Maschinenlehre verbreitet sich noch eine weitere Universitätsschrift[3]) welche teilweise die in der vorgenannten (s. o.) niedergelegten Gedanken weiter ausführt. Sie beginnt mit einer Einleitung in die Festigkeitslehre, die hauptsächlich an GALILEI und MUSSCHENBROEK anknüpft, behandelt sodann mit Litteraturangaben — DE LA HIRE, LEIBNIZ, BELIDOR, AMONTONS, BOSSUT — die Reibung und die Steifheit der Seile und geht sehr gründlich auf die Messung der tierischen Kräfte ein. Daran schlieſst sich die Lehre von den einfachen Maschinen, die manch neues oder doch wenig bekanntes enthält, wie etwa die Beschreibung einer Vorrichtung zum Ausheben der Bäume mit den Wurzeln, welche ein Berner Bauer PETER SOMER erfunden haben soll. Das Ganze darf als ein sehr brauchbarer Abriſs der gesamten Maschinenkunde gelten, in der ZALLINGER offenbar ganz besonders zu Hause war, und deren Litteratur er höchst vollständig beherrschte.

So war er denn auch ganz dazu berufen, den Betrieb von Bewegungsmechanismen durch das strömende Wasser wissenschaftlich zu prüfen. In seiner Abhandlung über die Wasserräder[4]) betont er, daſs die Praxis sich mit den Lehren, welche BELIDOR und v. LANGSDORF vortrugen, gar nicht vertragen wolle.[5]) Daraufhin werden die Stoſsmomente für senk-

heutzutage wieder mit Vorliebe gemacht wird — vom Parallelogramme der Kräfte ausgegangen war, stellte CHR. WOLF den Hebel an die Spitze der Lehre von Gleichgewicht und Bewegung, und ihm schloſs sich die Mehrzahl der Fachmänner des XVIII. Jahrhunderts an. Ein besonderes Verdienst WOLFS erblickt in diesem seinen Vorgehen KAESTNER (*Anfangsgründe der angewandten Mathematik*, Göttingen 1780, S. 4 der Vorrede).

1) L. EULER, *De machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucroso*; Comment. acad. Petrop. 10, 1747.

2) ZALLINGER, *Von der krummlinichten Bewegung der Körper*; Neue Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften 3, 1783.

3) ZALLINGER, *De aestimanda perfectione machinarum ad mechanicam solidorum pertinentium dissertatio*, Innsbruck 1780.

4) ZALLINGER, *Von der Anzahl der Schaufeln bei unterschlächtigen Rädern*; SCHRANKS Sammlung naturhistorischer und physikalischer Aufsätze, Nürnberg 1786, S. 415 ff.

5) Gemeint sind die folgenden Werke: BELIDOR, *Architecture hydraulique*, Paris

rechten und schiefen Wasserstoſs berechnet, um so diejenige Anzahl v
Schaufeln, welche ein Optimum des Nutzeffektes gewährleiste, ausfin
zu machen. Doch sieht auch ZALLINGER sich zuletzt genötigt, e
zuräumen, daſs die mathematische Betrachtung für sich allein unvermöge
sei, eine Entscheidung zu bringen.

Eine zweite Abhandlung[1]) über verwandte Dinge ist wegen ein
Exkursion beachtenswert, die ihr Verfasser, wie schon zum öfteren, a
das Gebiet der abstrakten Mechanik unternimmt. Er ist nämlich, als ih
das Projekt eines neuen Bewässerungsrades vorgelegt worden war, z
Stellung der Frage veranlaſst: Wie kommt es, daſs sehr häufig das Mod
einer Maschine trefflich funktioniert, während letztere versagt, wenn m
sie in den richtigen Dimensionen ausführt? „Die Modelle der Maschine
so lautet die zutreffende Antwort, „verschaffen uns ohne Zweifel den V
zug, daſs wir in denselben ihre Einrichtung viel deutlicher einsehen u
auch einige Versuche im Kleinen damit anstellen mögen; doch wür
man sich damit nicht selten in seiner Hoffnung betrügen, wenn man l
der Maschine die Ähnlichkeit aller Teile beibehielte und sich auch äh
liche Wirkungen verspräche". Nun wachse aber die Wasserkraft quad
tisch, der Widerstand kubisch, und damit sei die Möglichkeit, aus d
Kleinen ohne weiteres auf das Groſse zu schlieſsen, ganz von selbst negie
denn die Maschine erfordere eine Geschwindigkeit des strömenden Wasse
wie sie kein „freier" Fluſs darbieten könne. Wie man sieht, ist ZALLING
damit dem Begriffe der geometrischen Ähnlichkeit der Bewegungen se
nahe gekommen, wie ihn achtzig Jahre später HELMHOLTZ[2]) formuli
und bei der Erklärung des Vielen unerwartet gekommenen Umstan
verwertet hat, daſs die Aëronautik als solche nichts dabei gewinnt, we
man tadellos arbeitende Mechanismen im kleinsten Maſsstabe ausfüh
Diese Erkenntnis war also schon gegen Ende des XVIII. Jahrhunde
angebahnt, freilich nur bei Einzelnen. ZALLINGER behandelt übrigens
diesem inhaltreichen Essay auch sonst noch manche interessante Aufga

---

1737—1751; K. C. v. LANGSDORF, *Lehrbuch der Hydraulik, mit beständiger Rücks auf die Erfahrung*, Altenburg 1794. Daſs gerade in der sehr schwierigen The des Wasserstoſses die Ausführungen v. LANGSDORFS nicht genügen können, hatte g um dieselbe Zeit auch ein anderer deutscher Gelehrter mit groſser Entschieden in der Recension hervorgehoben, welche er dem fraglichen Lehrbuche widm (HINDENBURGS Archiv der reinen und angewandten Mathematik, 6. H S. 230 ff.).

1) ZALLINGER, *Beurteilung eines neuen Wasserschöpfrades*; SCHRANKS Sammlu (s. o.) S. 441 ff.

2) HELMHOLTZ, *Ein Theorem über geometrisch ähnliche Bewegungen flüssi Körper*; Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 18 S. 501 ff.

u. a. diese[1]): „Den Fall eines Körpers über eine schiefe Ebene zu bestimmen, deren Neigungswinkel indessen immer gleichmäſsig zunimmt.“

ZALLINGERS Arbeiten über Strombau und Stromregulierung sollen, als für die physische Geographie höchst bemerkenswert, an anderer Stelle zur Besprechung gelangen. Auch hier zeigt er sich nicht minder als Mann von selbständiger Denkart und weiſs, unbeeinfluſst von Vorgängern, neuen Auffassungen Geltung zu verschaffen, wie dies insonderheit die oben berührte Untersuchung über die Überschwemmungen darthut.

1) ZALLINGER, a. a. O. S. 451 ff.

Wie soll ein Mathematiker-Kalender zweckmäſsig bearbeitet werden?

Von G. Eneström in Stockholm.

Anläſslich des geplanten Mathematiker-Kongresses in Zürich wurde ich 1897 von dem Organisationskomité des Kongresses aufgefordert, demselben einige Fragen zu bezeichnen, die meiner Ansicht nach geeignet wären am Kongresse behandelt zu werden, und in meiner Antwort gab ich als solche an auch die womöglich jährliche Herausgabe eines Adreſsbuches aller Mathematiker der Erde mit Angabe ihrer speziellen Fachrichtung. Herr F. Rudio war dann so freundlich, diesen Vorschlag in seinem Vortrage *Über die Aufgaben und die Organisation internationaler mathematischer Kongresse* zu erwähnen[1]), und dadurch scheint Herr C. A. Laisant angeregt worden zu sein, ein Annuaire des mathématiciens in Angriff zu nehmen, dessen erster Jahrgang kürzlich erschienen ist.[2])

Wenn man eine litterarische Arbeit beurteilen will, kann man sich darauf beschränken, ganz einfach zu fragen: „Ist die Arbeit nützlich?", und die Antwort auf diese Frage als Urteil gelten zu lassen. Thut man dies, so wird das Urteil gewiſs dahin ausfallen, daſs der erste Jahrgang des Annuaire des mathématiciens eine nützliche Arbeit ist. Seine Hauptabteilung enthält nämlich etwa 6000 Namen und Adressen von Personen, die laut dem Titel des Buches Mathematiker sein sollen, und zum Teil wirklich Mathematiker sind. Die Adressen sind ohne Zweifel in den meisten Fällen richtig[3]); zwar kann man durch Zuhilfenahme der von verschiedenen Mathematiker-Vereinigungen veröffentlichten Mitglieder-Ver-

1) Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich 1897, herausg. von F. Rudio (Leipzig 1898), S. 34.

2) Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et A. Buhl (Paris, Naud 1902), Préface, S. I.

3) Daſs Seite 36, Zeile 24 „Paris (France)" statt „Bruxelles (Belgique)" steht, ist natürlich nur ein Schreibfehler.

zeichnisse oft eine erwünschte Adresse ermitteln, aber dieses Verfahren ist natürlich zuweilen zeitraubend, und dazu kommt noch, dafs das Annuaire die Adressen einer gewissen Anzahl von wirklichen Mathematikern erwähnt, die in den genannten Verzeichnissen fehlen.

Aber meiner Ansicht nach ist es nicht genug, dafs eine Arbeit, die dem gelehrten Publikum geboten wird, als nützlich bezeichnet werden kann, und mit voller Absicht habe ich in den Titel dieses Artikels die Worte „zweckmäfsig bearbeitet" gesetzt, die für mich etwas ganz anderes als nur „nützlich" bedeuten. In der That habe ich das vorangehende Urteil über das Annuaire hier ausgesprochen, um diesen Umstand schon von Anfang an besonders kräftig hervorzuheben, denn wenn die Begriffe „nützlich" und „zweckmäfsig bearbeitet" identisch wären, so würde ja die Frage in der Überschrift unmittelbar durch eine Verweisung auf das Annuaire erledigt und damit der ganze Artikel überflüssig sein.

Im Vorworte des Annuaire macht Herr LAISANT auf einige Hauptfragen aufmerksam, die bei der Herstellung eines Mathematiker-Verzeichnisses zu berücksichtigen sind, und die erste unter diesen ist natürlich: Welche Personen sind hier als Mathematiker aufzuführen?

Auf diese Frage giebt Herr LAISANT folgende Antwort[1]):

1° Les membres de toutes les sociétés mathématiques ou, dans les sociétés scientifiques d'ordre général, ceux qui en font partie comme représentant la science mathématique;

2° Les auteurs ayant publié dans un Recueil ou sous forme d'ouvrages, des travaux mathématiques originaux, et non pas de simples solutions d'élèves;

3° Les personnes qui, par leurs fonctions, sont appelées à enseigner *spécialement* la science mathématique ou l'une de ses branches, quel que soit le degré de l'enseignement.

Herr LAISANT will also drei Gruppen berücksichtigen, und in Bezug auf die zweite Gruppe bin ich mit ihm wesentlich einverstanden. Meines Erachtens mufs es nämlich der Hauptzweck eines Adrefsbuches der Mathematiker sein, den Forschern auf dem mathematischen Gebiete zu ermöglichen, sich mit einander in Verbindung zu setzen, und in unseren Tagen giebt es wohl wenige Forscher, die nicht litterarisch thätig sind. Dagegen scheint es mir nicht an sich klar, dafs das Verzeichnis auch solche Personen umfassen soll, die vor längerer Zeit eine einzige mathematische Abhandlung veröffentlicht haben. Auf Grund dessen, was ich soeben bemerkt habe, stelle ich also den folgenden Satz auf:

---

1) Annuaire des mathématiciens 1901—1902, Préface, S. IV.

> Ein Mathematiker-Kalender soll in erster Linie die Namen und die Adressen der Mathematiker bringen, die in ihrem Fache litterarisch thätig sind.

Herr Laisant hat besonders betont, dafs solche Personen, die *nur* Lösungen von einfachen Aufgaben veröffentlicht haben, ausgeschlossen werden sollen, und dagegen habe ich nichts einzuwenden; indessen könnte man wohl ausnahmsweise solche mitnehmen, die eine sehr umfassende Wirksamkeit auf diesem Gebiete entwickelt haben.

Die dritte von Herrn Laisant erwähnte Gruppe umfafst Lehrer, deren Spezialfach Mathematik ist. Hier bin ich mit ihm einig, sofern es sich um Universitätslehrer handelt, denn wenn auch ein solcher nicht mehr als Verfasser auftritt, so soll er ohne Zweifel im Verzeichnisse aufgenommen werden. Dagegen scheint es mir unnötig und unnütz, alle Schullehrer, die sich speziell mit mathematischem Unterricht beschäftigen, zu verzeichnen. Es giebt ja eine grofse Menge von Gymnasiallehrern, die möglicherweise einmal eine mathematische Doktordissertation veröffentlicht haben, aber sonst der wissenschaftlichen Forschung fremd sind, und weder sie selbst, noch ihre Fachgenossen haben irgend einen Nutzen davon, ihre Namen und Adressen im Verzeichnisse zu finden. Auf der anderen Seite giebt es gewifs eine grofse Anzahl von Schullehrern, deren Namen nicht fehlen dürfen, nämlich die, welche noch in ihrem Fache litterarisch thätig sind; aber diese sind schon in der vorigen Gruppe enthalten.

Aufser diesen zwei Gruppen giebt Herr Laisant noch eine dritte an, die er sogar in erste Linie stellt, nämlich Mitglieder der mathematischen Vereinigungen oder der mathematischen Klassen allgemeiner wissenschaftlicher Gesellschaften. Diese Gruppe aber möchte ich fast vollständig streichen. Haben die Vereinigungen einen wissenschaftlichen Charakter, so sind wohl ihre Mitglieder fast ohne Ausnahme entweder Universitätslehrer oder Verfasser von mathematischen Arbeiten, und dasselbe dürfte ebensosehr von den Mitgliedern der mathematischen Klassen wissenschaftlicher Gesellschaften gelten; handelt es sich dagegen um Vereinigungen von Studenten, so liegt meiner Ansicht nach kein Grund vor, die Mitglieder derselben in das Verzeichnis aufzunehmen.

Eigentlich würde ich jetzt mit dem Laisantschen Vorschlag zur Begrenzung des Mathematiker-Verzeichnisses fertig sein, und wenn dies der Fall wäre, könnte ich mich wohl im Grofsen und Ganzen mit ihm einverstanden erklären. Aber Herr Laisant hat als Note zu seinem ersten Absatze eine Bemerkung hinzugefügt, die praktisch genommen so wesentlich ist, dafs die Begrenzung, um die es sich bisher gehandelt hat, fast als eine Nebensache erscheint. Diese Note lautet folgender-

mafsen[1]): „Il nous a semblé aussi qu'il y avait lieu de comprendre l'astronomie dans les sciences mathématiques, au point de vue dont il s'agit.“ Da diese Note, wie gesagt, typographisch zum ersten Absatze gehört, könnte man versucht sein, die ziemlich dunklen Schlufsworte so zu deuten, dafs Astronomen in Betracht kommen sollen, sofern sie Mitglieder der astronomischen Vereinigungen oder der astronomischen Klassen wissenschaftlicher Gesellschaften sind, und das Verzeichnis des Annuaire widerspricht nicht einer solchen Deutung.[2]) In jedem Falle mufs ich aber *bestimmt* von dieser Erweiterung des Kreises von Personen, die in einem Mathematiker-Verzeichnisse zu berücksichtigen sind, Abstand nehmen. Durch eine solche Erweiterung würde man nämlich mit der Redaktion des Annuaire genötigt sein, unter die Mathematiker Hunderte von Personen einzubegreifen, die sich sicherlich gar nicht mit der Mathematik beschäftigt haben, und die wohl auch kein Recht haben Astronomen genannt zu werden, obgleich sie Mitglieder der „Société astronomique de France“ sind. Ich habe keine genauere Zählung der im Annuaire verzeichneten Mitglieder dieser Gesellschaft vorgenommen, aber ich bin geneigt anzunehmen, dafs sie fast ebenso zahlreich sind wie alle Übrigen zusammen, und unter solchen Umständen wird ja in jedem Falle der Titel: „Annuaire des *mathématiciens*“ irreleitend.

Man könnte möglicherweise einwenden, teils dafs ein Adrefsbuch um so nützlicher wird, je mehr Namen es enthält, teils dafs man auf diese Weise die Aussicht hat, eine viel gröfsere Anzahl von Käufern zu bekommen, wodurch der Preis des Buches wesentlich ermäfsigt werden kann. Diese Einwendung ist ja nicht ganz und gar unbegründet, aber auf der anderen Seite mufs ich bestimmt festhalten, dafs das Verfahren der Redaktion des Annuaire meines Erachtens wesentliche Übelstände mit sich führt. Um ein *gutes* Adrefsbuch herstellen zu können, genügt es nämlich nicht, eine Menge von Fragezetteln auszusenden und die Antworten in bestimmter Ordnungsfolge drucken zu lassen, sondern es ist auch nötig, eine gewisse Personenkenntnis zu besitzen, sodafs man das vorhandene Material kritisch behandeln kann, und je umfassender das Gebiet ist, dem die Personen angehören, um so schwieriger wird es, Redakteure mit dieser Art von Sachkunde zu bekommen. Welche Ungenauigkeiten aber durch fehlende Sachkunde verursacht werden können, davon giebt eben das

1) Annuaire des mathématiciens 1901—1902, Préface, S. IV.

2) So findet sich z. B. S. 328 ein hervorragender schwedischer Dramaturg und Romanverfasser, der sich als Dilettant mit der Astronomie beschäftigt hat und darum Mitglied der „Société mathématique de France“ geworden ist, während die ordentlichen Professoren der Astronomie an den zwei schwedischen Staatsuniversitäten (in Upsala und Lund) im Annuaire fehlen.

Annuaire genügende Auskunft; so z. B. findet man dort ziemlich bekannte Mathematiker verzeichnet, die schon vor dem Anfange des Jahres 1901 (das Annuaire erschien Anfang März 1902) gestorben sind[1]), in einigen Fällen ist der Vorname als Familienname aufgefaſst worden[2]), für viele Mathematiker, deren jetzige Adressen sehr leicht ermittelt werden können, sind nur ihre Wohnorte am Ende 1900 angegeben, u. s. w.[3]) In diesem Zusammenhange erlaube ich mir zu bemerken, daſs ein Mathematiker-Kalender auch dazu benutzt werden kann, eine Übersicht der Forscher auf dem mathematischen Gebiete zu geben, und eine solche Übersicht wird natürlich erschwert, wenn die wirklichen Mathematiker nur $^1/_2$ oder sogar nur $^1/_3$ der verzeichneten Personen betragen.

Aber die Art, in der die Redaktion des Annuaire das Verzeichnis erweitert hat, bringt noch einen anderen Übelstand mit sich. Wenn nämlich ein Buch, das sich ein „Annuaire des *mathématiciens*" nennt, eine Anzahl von Personen aufnimmt, die sich gar nicht mit der Mathematik, und überhaupt nicht mit wissenschaftlichen Studien beschäftigt haben, so gewährt es diesen Personen den Anschein Gelehrte zu sein, und bekanntlich giebt es Menschen, die sehr gern sehen, daſs sie als Gelehrte betrachtet werden, obgleich (oder vielleicht *weil*) sie kein Recht dazu haben. Solche Personen werden gewiſs mit Vergnügen ein Exemplar des Verzeichnisses kaufen, nur um ihren Bekannten zeigen zu können, daſs sie unter die Gelehrten gerechnet werden, und durch diesen Umstand kann ein rühriger Verleger leicht versucht werden, sich der menschlichen Eitel-

---

1) Schon am 15. Dezember 1899 starb K. Bobek (S. 32); im Jahre 1900 sind gestorben O. Böklen (S. 33), F. Bucca (S. 44), E. B. Christoffel (S. 62), Th. Craig (S. 71; auch in der Abteilung „Nécrologie" genannt!), H. Schaeffer (S. 305) und K. Zelbr (S. 372). — Vor dem Ende des Jahres 1901 sind gestorben A. Berger (9. Juni 1901), F. Caspary (17. Juli 1901; auch in der Abteilung „Nécrologie" genannt!), R. Doergens (4. Februar 1901), P. Pokrowsky (14. Februar 1901), O. Schlömilch (7. Februar 1901), F. Schmidt (7. März 1901), W. Schur (1. Juli 1901), und es wäre wohl nicht unmöglich gewesen, einige derselben zu streichen, wenn die Redaktion rechtzeitig von ihrem Tode Kenntnis gehabt hätte.

2) Dies ist der Fall z. B. S. 23 („Bellino"), 69 („Corrado"), 94 („Eduardo"), 186 („Lauro"), 218 („Matteo"), 301 Zeile 34 („Salvatore"), etc.

3) Daſs zuweilen eine und dieselbe Person an zwei verschiedenen Stellen vorkommt (vgl. S. 78 und 104, sowie S. 198 und 273), beruht ohne Zweifel nur auf einem kleinen Übersehen; wenn dagegen, wie es S. 43, 216 und 336 der Fall ist (an letzterer Stelle muſs wohl Z. 19 „Thomas" als Druckfehler betrachtet werden), derselbe Name wiederholt ist, muſs wohl ein Sachkundiger leicht ermitteln können, daſs auch dieselbe Person gemeint ist. — Ebenso kann es ja unter allen Umständen leicht eintreffen, daſs gewisse Namen verdruckt werden, aber Fehler wie Cantar" (S. 51), („Hill") (S. 140), „Winnan" (S. 365) deuten vielleicht an, daſs die Redaktion keine umfassendere Personenkenntnis besitzt.

keit in der Weise geschäftlich zu bedienen, dafs er im Verzeichnisse eine möglichst grofse Anzahl von Nicht-Mathematikern aufnimmt. Aber solche Konsequenzen müssen vermieden werden, und Eitelkeit haben wir ja schon genug unter den wirklichen Mathematikern.

Nachdem nun festgestellt ist, welche Gruppen von Personen in einen Mathematiker-Kalender aufzunehmen sind, wird die nächste Frage sein: Welche Angaben sollen für jede Person mitgeteilt werden? Dafs hierbei Familienname, Vorname[1]), Beruf und Adresse in Betracht kommen sollen, ist an sich klar; hinsichtlich des Übrigen hat Herr LAISANT in seiner schon zitierten Vorrede bemerkt, dafs es nötig ist, sich auf das Wichtigste und besonders auf das Nützlichste zu beschränken.[2]) Diesem Grundsatze mufs gewifs Jedermann beipflichten, aber die Schwierigkeit ist natürlich zu bestimmen, was hier das Wichtigste und das Nützlichste ist. Im Annuaire kommen, so viel ich sehen kann, nebst dem Namen, dem Berufe und der Adresse, eigentlich nur zwei Arten von Angaben vor, nämlich: 1) „docteur en philosophie" (oder ein äquivalenter Titel), 2) Namen von Gesellschaften, deren Mitglied die betreffende Person ist, aber weder das eine noch das andere kann ich als wichtig anerkennen. Im Gegenteil scheinen mir die Angaben der ersten Art in Bezug auf die Universitätsprofessoren die unnötigsten, die man überhaupt ersinnen kann, da es nur ausnahmsweise vorkommt, dafs ein solcher Professor nicht entweder „docteur en philosophie" oder „ingénieur" ist; noch wertloser wird natürlich die Angabe, wenn man, wie das Annuaire thut, inkonsequent verfährt, sodafs wohl kaum die Hälfte der Professoren, die Doktoren sind, als solche angegeben werden. Nur in den sehr seltenen Fällen, dafs ein Mathematiker keinen gelehrten Beruf hat, ist das Hinzufügen der fraglichen Titel zu billigen.

Auch in Bezug auf die Angaben zweiter Art bin ich der Meinung, dafs das Verfahren der Redaktion des Annuaire nur sehr geringes Interesse bietet, und zwar sowohl an sich, als weil die Redaktion ohne jede Konsequenz zu Wege gegangen ist. Dafs ein Mathematiker Mitglied einer geschlossenen wissenschaftlichen Gesellschaft geworden ist, beruht bekannt-

---

1) Leider giebt es viele französische Mathematiker, deren Vornamen fast unmöglich zu ermitteln sind, da sie immer als Verfasser *nur* Familienname mit vorangehendem M. [= Monsieur] angeben, und in vielen Fällen vermag auch das Annuaire hierüber keine Auskunft zu geben. — Ich benutze diese Gelegenheit, um darauf aufmerksam zu machen, dafs es sehr nützlich wäre, wenn die Schriftführer der verschiedenen Mathematiker-Vereinigungen in die Mitglieder-Verzeichnisse auch Geburtsjahre einführen wollten. Eine solche Anordnung hat schon seit vielen Jahren der „Circolo matematico di Palermo" getroffen.

2) Annuaire des mathématiciens 1901—1902, Préface, S. V.

lich in sehr vielen Fällen auf persönlichen Beziehungen (zuweilen kommt es vor, dafs ein Mathematiker besondere Mafsregeln ergreift, um Mitglied der möglichst gröfsten Anzahl von Akademien zu werden), und ob ein Professor der Mathematik Mitglied z. B. der „Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ ist oder nicht, hat ja gar keine Bedeutung. Da hierzu noch kommt, dafs die Redaktion offenbar keine Möglichkeit gehabt hat, die ihr zugegangenen Mitteilungen im Bedarfsfalle wesentlich zu ergänzen, so versteht man leicht, dafs die Angaben ohne Konsequenz[1]) eingefügt worden sind, und darum noch wertloser werden.

Aus dem Anfange dieses Artikels geht hervor, dafs ich bei jedem Namen womöglich das Hinzufügen einer Angabe der speziellen Fachrichtung empfehlen möchte. In einer gewissen Anzahl von Fällen wird es ohne Zweifel schwierig sein, eine bestimmte Fachrichtung anzugeben, aber im allgemeinen dürfte es verhältnismäfsig leicht sein, und gewifs wäre es nützlich, wenn ein Forscher auf diese Weise imstande sein könnte, seine Fachgenossen im beschränktesten Sinne kennen zu lernen. Eine andere sehr erwünschte Angabe ist meiner Ansicht nach das Geburtsjahr, denn wenn es auch ziemlich unwesentlich ist, ob man genau das Geburtsjahr eines Fachgenossen kennt oder nicht, so kann es doch zuweilen von grofsem Interesse sein zu wissen, ob er z. B. 25 oder 65 Jahre alt ist.

Selbstverständlich giebt es noch viele andere Angaben, die nützlich sein könnten, da es aber meines Erachtens sehr wichtig ist, dafs ein Mathematiker-Kalender bequem zu handhaben und dazu wohlfeil ist, so möchte ich dem Verzeichnisse nichts Weiteres hinzufügen. Vielmehr will ich auf das wärmste empfehlen, dafs, mit Bezugnahme auf das soeben Bemerkte, alle Abkürzungen, die das Verständnis nicht erschweren, eingeführt werden. Namen und Adressen können wohl nur wenig abgekürzt werden, dagegen ist es ja durchaus unnötig, oft vorkommende Worte, z. B. „Professor“, vollständig auszuschreiben, sondern in solchen Fällen genügen im allgemeinen die Anfangsbuchstaben. Auf diese Weise braucht man für jeden Namen nur eine Zeile in Anspruch zu nehmen, und da die Gesamtzahl der Namen kaum 2500 überschreiten wird, könnte das ganze Verzeichnis auf etwa 60 Druckseiten (à 40 Zeilen) Platz finden.

Bisher habe ich nur von der Anordnung eines Mathematiker-Verzeichnisses gesprochen, obgleich ich in der Überschrift des Artikels und zuweilen auch im Texte das Wort „Mathematiker-Kalender“ gebraucht habe. In der That bin ich mit der Redaktion des **Annuaire** darüber einig, dafs es angemessen ist, dem Verzeichnisse auch andere Mitteilungen hinzu-

1) So z. B. findet sich S. 171 für einen hervorragenden Mathematiker „Deutsche math. Vereinigung“ aufgeführt, während S. 72 für einen anderen hervorragenden Mathematiker 16 gelehrte Gesellschaften angeführt sind.

zufügen. Im Annuaire giebt es deren folgende: 1) Nachruf für CH. HERMITE (mit Porträt); 2) Verzeichnis kürzlich verstorbener Mathematiker; 3) Verzeichnis wissenschaftlicher Gesellschaften; 4) Verzeichnis periodischer Schriften, die mathematische Artikel enthalten; 5) sechs „notices scientifiques“. Hier bin ich im Grofsen und Ganzen mit dem Plane der Redaktion des Annuaire einverstanden, aber bezüglich der Ausführung derselben könnte ich wohl hier und da eine abweichende Ansicht haben. Dafs der Mathematiker-Kalender mit dem Nachrufe für einen bedeutenden Mathematiker beginnt, scheint mir nicht unangemessen, aber auch in Bezug auf übrige kürzlich verstorbene Mathematiker möchte ich kurze biographische Notizen (womöglich mit Porträts) empfehlen.[1] Das Verzeichnis wissenschaftlicher Gesellschaften kann meiner Ansicht nach ohne Schaden auf mathematische Gesellschaften wissenschaftlichen Charakters beschränkt werden, und auch im Verzeichnisse periodischer Schriften halte ich es für unnötig, andere Zeitschriften als die rein oder wenigstens überwiegend mathematischen aufzunehmen.[2] Endlich bin ich der Ansicht, dafs in einen Mathematiker-Kalender kein Artikel, wie z. B. „Les fontions elliptiques au point de vue de leurs applications“ gehört. Auf der anderen Seite habe ich mir einige Sachen notiert, die in einem Mathematiker-Kalender von Interesse sein können, und besonders scheint es mir wünschenswert ein alphabetisches Verzeichnis der Universitäten und Technischen Hochschulen mit Angabe der Namen der Professoren der Mathematik zu bringen.

Ich habe jetzt in grofsen Zügen den Plan zur Herstellung eines Mathematiker-Kalenders angegeben, und erlaube mir hinzuzufügen, dafs ich einen solchen Kalender auch schon in Angriff genommen habe. Um die Namenliste zu bekommen, habe ich zuerst die letzten Jahrgänge des

1) Auch hier zeigt das Annuaire, wie notwendig es ist Personenkenntnis zu haben, um eine gute Arbeit leisten zu können. Im Vorworte (S. V—VI) bemerkt Herr LAISANT: „Nous donnons une liste des mathématiciens décédés dans le courant des années 1900 et 1901. Nous l'avons limitée . . . à un petit nombre de mathématiciens connus.“ Aber in der Liste findet sich auch SOPHUS LIE, der bekanntlich schon am 18. Februar 1899 starb, und dafs die Liste nicht *nur* „bekannte“ Mathematiker aufnimmt, dürfte wohl schon daraus ersichtlich sein, dafs die Redaktion selbst nicht weifs, ob für Nr. 10 „Guelfo“ Familienname oder Vorname ist, und über ihn gar keine Auskunft geben kann.

2) Dafs S. 399 unter den Herausgebern des Giornale di matematiche G. BATTAGLINI (der bekanntlich schon 1894 starb) angegeben wird, ist wohl nur ein *lapsus calami*. Meines Wissens giebt es nur eine mathematische Zeitschrift, die lange Zeit nach dem Tode eines Mathematikers denselben noch als Mitglied der Redaktion angiebt, nämlich die Acta Mathematica (siehe die zweite Seite des Umschlages des am 15. Dezember 1901 erschienenen Doppelheftes **25**: 1—2, wo unter „Redaction“ auch der Name „S. LIE“ vorkommt).

Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik und der Rev semestrielle des publications mathématiques benutzt, und die Li dann durch Zuhilfenahme der Mitgliederverzeichnisse verschiedener mat matischer Gesellschaften u. s. w. ergänzt. Dann habe ich begonnen, gaben über Geburtsjahr, Beruf, Fachrichtung und Adresse zu samm selbstverständlich fehlt noch sehr viel, aber ich hoffe auf den Beist der Fachgenossen rechnen zu dürfen, sodafs der Kalender am Anfange Jahres 1903 druckfertig sein kann. Ich hoffe auch, dafs es möglich s wird, den ganzen Kalender auf etwa 100 Druckseiten in kl.-Oktavform zu beschränken, und dafs der Preis des Büchleins, in biegsamen Leinwa band gebunden, nicht mehr als 2 Mark betragen wird.

Zur Frage über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften.

Von Felix Müller in Steglitz.

Bei dem Versuche, die von Herrn Stäckel in der Bibliotheca Mathematica 2_3, 1901, S. 133—138 aufgestellten Regeln auf die Titel von mehr als 700 Zeitschriften, in denen wiederholt Abhandlungen aus der reinen und angewandten Mathematik zu finden sind, anzuwenden, bin ich auf einige Gesichtspunkte aufmerksam geworden, die ich hier mitzuteilen mir erlauben möchte.

Die erste Regel (l. c. S. 135) verbietet, die Namen der Herausgeber der Zeitschriften bei der Abkürzung der Titel zu verwenden. Im allgemeinen wird wohl Jeder mit dieser Regel einverstanden sein, der den wiederholten Wechsel der Redaktion einer und derselben Zeitschrift berücksichtigt. Nur in demjenigen Falle dürfte eine Personalbezeichnung gestattet sein, wo die Zeitschrift während ihres Bestehens nur den einen und einzigen Herausgeber gehabt hat. Solche Nominalbezeichnungen haben immerhin den Vorzug der Kürze, sind aber nur in Ausnahmefällen zu billigen.

Die zweite Regel des Herrn Stäckel (l. c. S. 135) fordert für häufig wiederkehrende Worte feste Abkürzungen, zunächst betreffen sie den Charakter der Zeitschrift oder ihren Namen, wofür man auch Hauptwort oder Stichwort sagen kann. Die Bedeutungen der Mehrzahl der gebräuchlichen Abbreviaturen sind, allerdings mit Berücksichtigung der verschiedenen Sprachen, leicht zu erraten, bei einzelnen bedürfte es aber doch einer Warnung vor unrichtiger Ergänzung, und bei einzelnen mufs erst der „Schlüssel“ ergeben, ob der Singular oder der Plural gelesen werden soll.

Wenn ich hiernach mich nicht damit einverstanden erklären kann, alle Abbreviaturen zu vermeiden, zu deren Erklärung es eines „Schlüssels“ bedarf, so stimme ich doch durchaus der Regel III (l. c. S. 135) des Herrn Stäckel bei: „Es ist unzulässig, dem ersten Stichwort ein Beiwort hinzuzufügen, das in dem Titel der Zeitschrift selbst nicht vorkommt.“ Ebenso beherzigenswert ist die vierte Regel (l. c. S. 136), welche die Abkürzung

verbietet, wenn entweder keine wesentliche Raumersparnis erzielt werden oder darunter die Deutlichkeit leiden würde. Wir lassen mithin ungekürzt die ersten Stichworte: Acta, Actes, Atti, Abstracts, Analyst, Årsskrift, Circular, Cronica, Diary, Essays, Rapport, Recueil, Revue, Rivista, Revista, Resultate, Séances, Sessioni, Saggi, Sammlung, sowie (um Verwechslungen mit der gebräuchlichen Deutung von Ann., Mém., Proc. zu vermeiden) Annuaire, Annuario, Mémorial, Procès (verbaux). Auch Report darf nicht in Rep. gekürzt werden, wofür man möglicher Weise Repertorium lesen könnte.

Aufser diesen Stichworten kommen in den Titeln noch andere Hauptworte vor, wie die Namen der Gesellschaften, Vereine, Institute, welche die Zeitschrift veröffentlichen. Für diese hat man eine Reihe vielfach benutzter Abkürzungen; unter diesen könnte Obs. für Observatoire Anstofs erregen, da es oben für Observations gebraucht ist, doch ergiebt sich die betreffende Bedeutung leicht aus dem Zusammenhang. Ebenso verständlich sind Abkürzungen für Wissenschaften und ihre verwandten Zweige, wie Wiss., Weet., Vet., Sc. (Science), Math., Astr., Bibliogr., Gesch. u. ä.

Was die Adjektive betrifft, die neben den Hauptworten auftreten, so sind die gewöhnlichen Abkürzungen im allgemeinen nicht mifszuverstehen.

Die Ortsnamen (für den Ort des Erscheinens und für den Sitz der Gesellschaften) sollten nur in den seltensten Fällen abgekürzt werden, und nur dann, wenn mindestens 3 Typen erspart werden, z. B. bei Amst(erdam), Bol(ogna), Brux(elles), Christ(iania), Edin(burgh) aber nicht Berl., Lond., Par., für Berlin, London, Paris.

Wir kommen nun zu der wichtigen Frage: in welcher Reihenfolge sollen die Worte der Titel bei den Abkürzungen wiedergegeben werden und welche dieser Worte sollen überhaupt fortgelassen werden. Die Hauptregel des Herrn STÄCKEL (l. c. S. 138) lautet: „Die Titel der Zeitschriften sollen in der Weise abgekürzt werden, dafs der Reihe nach 1. das Hauptwort (Abh., Ann., Arch., Ber. u. s. w.), 2. die sachlichen, 3. die lokalen Beiworte in geeigneter Abkürzung aufeinander folgen; 2. oder 3. können auch, wenn die Deutlichkeit es gestattet, wegfallen". Das Wesentlichste in derselben ist, dafs der Ortsname an das Ende gesetzt werden soll, dafs also nicht, wie es bisher vielfach üblich war, geschrieben wird: Paris Mém., London Proc., Bologna Mem. etc. Bei der grofsen Zahl von Zeitschriften, die an einem und demselben Orte (wie Paris, London, Berlin, Leipzig etc.) erscheinen, ist diese Umstellung wohl gerechtfertigt, weil dann der charakteristische Name der Zeitschrift am Anfange deutlicher hervortritt. Dieser charakteristische Name besteht häufig nicht blos aus dem oben angeführten Hauptwort allein; es gehen diesem Artikel und Beiworte vorauf. Deshalb möchte ich als Ergänzung

zu obiger Regel vorschlagen: die Beiworte, welche im vollständigen Titel dem Hauptworte vorangehen, dürfen im gekürzten Titel nicht hinter dasselbe gestellt werden. Also nicht: Ann. (nouv.), J. (Amer.), sondern: Nouv. Ann., Amer. J., Gött. gel. Anzeigen, etc. Es gilt also die Regel: diejenigen im Titel einer Zeitschrift auftretenden Worte, welche nicht fortgelassen werden, sind in derselben Reihenfolge (verkürzt oder unverkürzt) anzugeben, in welcher sie im vollständigen Titel aufeinander folgen.

Schwieriger ist die Frage, welche Beiworte fortgelassen werden dürfen. Es giebt eine Anzahl von Zeitschriften, deren Name oder Hauptwort so charakteristisch ist, dafs schon ein Wort oder zwei Worte genügen würden, den Titel eindeutig zu bestimmen. Solche Namen sind: The Analyst, L'Astronomie, The Athenaeum, Časopis, Il Cimento, etc.; ebenso eindeutig bestimmt sind die Titel: L'Ateneo Veneto, Biblioteca Italiana, Biblioteca fisica, Bibliotheca mathematica, etc. Soll man hier den Artikel Der, Il, Le, La, The, etc. fortlassen? Ich würde vorschlagen, ihn überall, wo er im vollständigen Titel steht, beizubehalten. Wenn wir z. B. La in La Nature fortliefsen, so könnte eine Verwechslung mit dem englischen Journal eintreten.

Auch die Ortsnamen würde ich überall, selbst in den soeben angeführten Titeln beifügen und dieselben nur fortlassen, wenn der Ort sich aus den Namen der Zeitschrift oder der herausgebenden Gesellschaft ergiebt, wie in: Atti R. Ist. Ven., Comm. Bon. Inst., Königsb. Arch. für Naturw. und Math.

Vor den Namen der Gesellschaften resp. Institute kann der Artikel ohne Schaden fortbleiben, z. B. Abh. Ak. der Wiss. Berlin, Ann. Ec. Normale Paris, Atti R. Acc. Napoli, C. R. Ac. des Sc. Paris.

Ob „die Deutlichkeit es gestattet", dafs einzelne sachliche oder lokale Beiworte fortfallen, kann nur an speziellen Beispielen entschieden werden, indem man den Titel einer Zeitschrift mit dem ähnlich lautenden einer anderen vergleicht. Es genügt nicht zu schreiben Proc. London, da man Proc. R. Soc. London und Proc. Math. Soc. London unterscheiden mufs. Ebensowenig Proc. Edinb. wegen Proc. R. Soc. Edinb. und Proc. Math. Soc. Edinb., ferner Proc. Philad. wegen Proc. Amer. Phil. Soc. Philad. und Proc. Ac. of Nat. Sc. Philad. etc. Dafs der Titel „Hist. Ac. Berlin avec les Mém." nicht einfach mit Mém. Berlin bezeichnet werden darf, versteht sich von selbst.

Über die Bezeichnung der Serie, des Bandes, des Jahres der Abfassung und der Veröffentlichung, sowie der Seitenzahl (z. B. Mém. Ac. des Sc. Paris (2) **6**, an. 1823 (1827) 1—60) habe ich nichts hinzuzufügen.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1:12, 22, 29, 34, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1:36, 64,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:103, 135,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:135, 144, 155, 169, 171,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, 137—138. — **1:190, 197, 202,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:225, 234,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138.

1:255. Für die Leser der *Vorlesungen* würde es willkommen gewesen sein, wenn Herr Cantor auch die Sätze 54 und 57 des 10. Buches der *Elementa* besonders hervorgehoben hätte. Bekanntlich bringen diese Sätze die Umformung des Ausdruckes $\sqrt{m + \sqrt{m^2 - n}}$ in $\sqrt{\frac{m + \sqrt{n}}{2}} + \sqrt{\frac{m - \sqrt{n}}{2}}$, woraus man durch die Substitution $m^2 - n = m'$ unmittelbar die bekannte Formel $\sqrt{m + \sqrt{m'}} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - m'}}{2}} + \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - m'}}{2}}$ erhält. In den *Vorlesungen* kommt diese Formel zum ersten Mal S. 586 vor, wo es sich von Bhâskara handelt; die meisten Leser müssen dadurch bewogen werden, Bhâskara als Erfinder der Umformung anzusehen (vgl. H. Fehr, L'enseignement mathématique **4**, 1902, 25), und dies um so mehr, als man aus den *Vorlesungen* keine Auskunft über das Vorkommen dieses Verfahrens bei den Arabern oder im früheren christlichen Mittelalter bekommt. Jetzt weiss man ja, dass die Araber dasselbe lange Zeit vor Bhâskara kannten (siehe Curtzes Anaritius-Ausgabe S. 344) und abgesehen von den direkten Euklides-Übersetzungen, wurde es etwa gleichzeitig mit Bhâskara im Abendlande auch durch Gherardo Cremonese bekannt (siehe Curtzes Anaritius-Ausgabe S. 270; vgl. Leonardo Pisano, *Scritti* ed. Boncompagni I, S. 363). G. Eneström.

1:283, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1:383, 400, 432,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:436,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

1:457. Le Patritius des écrits héroniens est peut-être le „Nicephorus patricius, geometriae ludo praefectus sub Constantino Porphyrogenito" (Fabricius, *Biblioth. graeca*, ed. Harles, VII, p. 679). Ce serait donc un byzantin du 10^e siècle. P. Tannery.

1:463, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:467, 469,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:476,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314.

1:519—520. Bekanntlich hat Herr CANTOR zuerst darauf hingewiesen, daſs bei den Agrimensoren die Formel

$$1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3 = (\tfrac{10 \cdot 11}{2})^2$$

vorkommt, und er glaubt auch den Weg aufgefunden zu haben, worauf der von den Agrimensoren benutzte, jetzt unbekannte Mathematiker, zu dieser Formel gelangte. Es ist ja immer eine miſsliche Sache, sich über solche Fragen zu äuſsern, aber viel einfacher wäre es wohl anzunehmen, daſs die Agrimensoren (oder der Verfasser ihrer Vorlage) beobachtet hatten, daſs jede der Summen

$$1^3 + 2^3 = 9,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225, \text{ u. s. w.}$$

eine Quadratzahl ist, und daſs die Wurzeln 3, 6, 10, 15, u. s. w. dieser Quadratzahlen offenbar die Reihe der Dreieckzahlen bilden. — Daſs an der (S. 520, Anm.) zitierten Stelle des PASCAL das Wort „veteres" die Griechen oder die Römer bezeichnet, scheint uns wenig wahrscheinlich; konnte PASCAL nicht z. B. STIFEL (vgl. *Arithmetica integra*, fol. 306—307) gemeint haben?

G. ENESTRÖM.

1:537, 540, 542, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:687—688,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144. — **1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 449—500. — **1:749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854, 855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502.

2:20. Z. 2 ist $b^2 + (a+b)^2 + (2a+b)^2 + \cdots + (na+b)^2$ su setzen, da LEONARDO auch Einzelfälle, wo b nicht gleich Null ist, in Betracht nimmt; er behandelt nämlich den Fall $a = 2$, $b = 1$ und bemerkt, daſs man auf ähnliche Weise die Summe für $a = 3$, $b = 1$ erhalten kann. — Z. 3 ist natürlich „Quadratzeilen" Druckfehler für „Quadratzahlen". Auf der anderen Seite soll die Bemerkung zur Zeile 11 (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502) gestrichen werden, weil das Wort „arithmetischen" richtig ist. Freilich wäre es der Deutlichkeit halber angemessen, Z. 12 nach „u. s. w." die Worte „einer geometrischen Reihe" einzufügen.

G. ENESTRÖM.

2:25, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352.

2:31. In Bezug auf die frühere Bemerkung (BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352) ist hinzuzufügen, daſs LEONARDO auch in dem *Liber abbaci* (S. 381—383) die

gewöhnliche Kubikwurzelausziehung aus den Zahlen 2345, 56789, 456789, 9876543 lehrt (vielleicht hat Herr Cantor Z. 31 diesen Umstand durch das Wort „auch" andeuten wollen), und zwar ganz wie später in der *Practica geometriae*, aber es scheint uns durchaus unwahrscheinlich, daſs die Worte des Leonardo: „et cum super hanc diffinitionem diucius cogitarem, inveni hunc modum reperiendi radices" sich auch auf diese Methode beziehen, denn sonst hätte er wohl dieselbe als die wichtigste zuerst dargestellt. Abgesehen hiervon, darf man wohl nicht ohne zwingende Gründe annehmen, daſs ein so elementares Verfahren, das schon den Indern geläufig war, ihm unbekannt geblieben ist.

G. Eneström.

2:34, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:37**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:38**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:39**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:41, 57**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:70**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2:98**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2:100**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:105**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2:111**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:122, 128**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504. — **2:132**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:157, 158**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:163, 166**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:175**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:210, 219**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2:229, 242, 243**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2:253**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2:273**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2:282, 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2:296**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2:313**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2:328**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:334, 353, 381, 386, 395, 401, 405, 425**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2:430**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2:449, 474, 480**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2:481, 482**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2:482**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354.

2:482. In Bezug auf Scipione del Ferros Lebensumstände wird nur auf S. Gherardi, *Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Fakultät der alten Universität Bologna* (1871) verwiesen, aber der Leser, der sich des Verweises bedient, wird finden, daſs diese Schrift gar nichts über die Wirksamkeit des Ferro im Jahre 1526 enthält. Da hierzu noch kommt, daſs in den meisten Handbüchern 1525 als Ferros Todesjahr angegeben wird, werden einige Leser ohne Zweifel die Sache ein wenig auffällig finden. Es wäre darum gut gewesen, wenn Herr Cantor hier in erster Linie die von ihm wirklich benutzte Quelle, nämlich C. Malagola, *Della vita e delle opere di Antonio Urceo* (Bologna 1878) S. 354—356, citiert hätte. G. Eneström.

2:484, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:486, 489, 490, 497**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:509**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2:510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:512**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:530**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:532, 535, 541, 548, 549**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2:550**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2:554, 569, 572, 573**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2:572**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:576**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2:582**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2:583**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2:592**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2:594, 597**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, S. 270. — **2:597, 599—600**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2:602, 603—604**, S. 270—271. — **2:611**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. —

2:612, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2:613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:614, 620,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:621, 623,** siehe BM. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2:638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2:665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:683,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—273. — **2:719,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:721, 742,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2:742,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2:746, 747,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2:766,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2:767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2:772, 775,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **2:784, 820, 825, 840, 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2:876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2:891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2:901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2:VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2:IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3:10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3:12, 17, 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3:26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3:45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3:70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3:100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **3:116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3:123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3:183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432.

3:188. Ob die Worte: „Bei der letzten hier niedergeschriebenen Formel haben wir allerdings die Treue der Berichterstattung zu Gunsten der Richtigkeit des Ergebnisses verletzt; bei Leibniz fehlt die Quadraterhebung der im Nenner auftretenden Wurzelgröſse" jetzt ohne weiteres als richtig anerkannt werden müssen? Bekanntlich hat C. J. Gerhardt in seiner letzten Ausgabe (1899) von Leibniz' Briefwechsel an der betreffenden Stelle (S. 242) als Nenner $3 \times \overline{a+by+cy}|^{\frac{2}{3}}$, wo also die Quadraterhebung sich findet, aber cy statt cy^2 steht. Auf derseben Seite der Gerhardtschen Ausgabe findet sich als Differential von $b\sqrt[3]{1+y}$ der richtige Ausdruck $\frac{b\,dy}{3 \times \overline{1+y}|^{\frac{2}{3}}}$, aber auf der folgenden Seite wird als Integral eines Ausdruckes von der Form $\frac{dt}{nt^{\frac{1}{n}}}$ unrichtig $t^{\frac{1}{n}}$ angegeben. Ehe man hier ein entscheidendes Urteil fällt, wäre es vielleicht zweckmäſsig, das in London befindliche Original des Briefes zu vergleichen.

G. Eneström.

3:201, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3:215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3:218, 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513—514. — **3:225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3:232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3:246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3:250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3:303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155.

3:330—331. Daſs einige von Herrn Cantor erwähnte Sätze aus der *Nova algebrae promotio* viel früher von Leibniz gefunden worden sind, als man aus dem Cantorschen Berichte schlieſsen könnte, hat Herr G. Vacca im Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, S. 113—116 nachgewiesen. So

war z. B. der polynomische Lehrsatz schon 1678 Leibniz bekannt, und spätestens 1683 entdeckte er selbständig den Fermatschen Lehrsatz. — S. 33[illegible] hätte Herr Cantor bemerken können, daſs Leibniz auch den Wilsonschen Satz ausgesprochen hat (siehe Vacca, a. a. O. S. 114). G. Eneström.

---

3 : 447, 455, siehe BM 2_3, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM 2_3, 190[illegible], S. 154—155. — **3 : 477, 479,** siehe BM 2_3, 1901, S. 151—152. — **3 : 521, 6[illegible]6—637,** siehe BM 2_3, 1901, S. 441. — **3 : 652,** siehe BM 2_3, 1901, S. 446. — **3 : 660, 667, 689, 695,** siehe BM 2_3, 1901, S. 441—442. — **3 : 750, 758, 76[illegible], 766,** siehe BM 2_3, 1901, S. 4[illegible]2—443. — **3 : 774, 798,** siehe BM 2_3, 1901, S. 4[illegible]2—443. — **3 : 845,** siehe BM 2_3, 1901, S. 447. — **3 : 848, 881,** siehe BM 2_3, 190[illegible], S. 443. — **3 : 882,** siehe BM 2_3, 1901, S. 447. — **3 : 892,** siehe BM 3_3, 1902, S. 1[illegible]3. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM 2_3, 1901, S. 443.

Vermischte historische Notizen.

Über eine wiedergefundene Handschrift der Trigonometrie des Johannes Werner. Unter dem handschriftlichen Nachlaſs des Nürnberger Pfarrers und Mathematikers Johannes Werner befand sich bekanntlich eine sphärische Trigonometrie, die später in den Besitz des G. J. Rheticus kam (vgl. z. B. Braunmühl, *Vorl. über Gesch. der Trigonom.* I, S. 133). Rheticus hatte die Absicht, dieselbe zusammen mit einer anderen Schrift des Werner herauszugeben, und lieſs wirklich 1557 in Krakau eine dünne Broschüre von sechs Folioseiten drucken, deren erste Seite folgenden Titel trägt: „*Ioannis Verneri De triangulis sphaericis libri quatuor; De meteoroscopiis libri sex; nunc primum studio et diligentia Ioachimi Rhetici in lucem editi*“, aber auſser dem Titelblatte nur eine Vorrede des Rheticus enthält. Warum der Druck der zwei Wernerschen Arbeiten unterblieb, ist nicht bekannt, daſs er aber wirklich nach Beendigung der Vorrede unterbrochen wurde, geht aus folgender handschriftlichen Notiz hervor, die sich auf dem einzigen bekannten Exemplare (in der Universitätsbibliothek in Krakau) der genannten Broschüre findet: „Praefatio hec sola Cracoviae impressa, reliquum opus mittere in Germaniam proposuerunt, ut ego intellexi ex quadam epistola manu ipsius Rhetici ad Wolffium scripta; an missum et impressum sit, nondum scio“ (vgl. Zebrawski, *Bibliografia pismiennictwa polskiego z dzialu matematyki i fizyki oraz ich zastosowan*, Krakow 1873, S. 140—141). Ob und wohin das Manuskript gesandt worden ist, weiſs man auch jetzt nicht, daſs es aber nicht gedruckt wurde, kann als festgestellt angesehen werden, da trotz umfassender Nachforschungen in verschiedenen Ländern, kein einziges gedrucktes Exemplar der Wernerschen Trigonometrie aufgefunden ist, und bei den Verfassern, die sich mit Werner beschäftigt haben, keine Aufschlüsse hierüber gegeben worden sind.

Es schien also, als ob die Wernersche Trigonometrie verloren gegangen wäre, aber kürzlich hat Herr A. A. Björnbo das Glück gehabt, in der Vatikanischen Bibliothek in Rom eine Handschrift (Cod. Reg. Su. 1259) zu finden, die wahrscheinlich mit dem oben erwähnten Druckmanuskript identisch ist, und jedenfalls die zwei Wernerschen Schriften enthält, die Rheticus herauszugeben beabsichtigte. In dieser Handschrift findet sich nämlich zuerst „*Ioannis Verneri norimbergensis de triangulis sphericis*“ in vier Büchern (367 Seiten),

und dann „IOANNIS VERNERI *norimbergensis de meteoroscopiis*" in sechs Büchern (622 Seiten); die Figuren fehlen ganz.

Dafs man es hier nicht mit dem Originalmanuskripte des WERNER, sondern mit einer Bearbeitung oder Abschrift des RHETICUS zu thun hat, dürfte daraus hervorgehen, dafs nach zuverlässigen Angaben (vgl. BRAUNMÜHL, a. a. O. S. 133) die von WERNER hinterlassene handschriftliche Trigonometrie den Titel „*De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V*" hatte, während die von Herrn BJÖRNBO gefundene Handschrift nur vier Bücher enthält; ebenso wird als Titel der im Nachlasse des WERNERS gefundenen praktischen Astronomie: „*De constructione et utilitatibus meteoroscopiorum libri V*" angegeben, während Cod. Reg. Su. 1259 eine Schrift „*De meteoroscopiis*" in sechs Büchern enthält. Auf der anderen Seite stimmen ja sowohl die Titel als die Einteilung der zwei Abhandlungen des Cod. Reg. Su. 1259 genau mit den Angaben auf dem Titelblatte vom Jahre 1557. Vielleicht könnte man auch den Umstand, dafs im Cod. Reg. Su. 1259 alle Figuren fehlen, dahin deuten, das wir hier eine speziell für den Druck angefertigte Handschrift vor uns haben.

In einem der nächsten Hefte der Bibliotheca Mathematica wird Herr BJÖRNBO über die Bedeutung, die sein Fund für die Geschichte der Trigonometrie hat, Auskunft geben. Vorläufig sei nur bemerkt, dafs dadurch die Richtigkeit der BRAUNMÜHLschen Darstellung a. a. O. S. 135—137 wesentlich bestätigt wird.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Anfragen.

99. Über Summierung der Reihe von Kubikzahlen im christlichen Mittelalter. Bekanntlich bringt PACIUOLO in seiner *Summa* (1494) die Formel für die Summe der Reihe von Kubikzahlen, und da er ausgiebig LEONARDO PISANO benutzt, hat LIBRI (*Histoire des sciences mathématiques en Italie* III, S. 140) vermutet, dafs auch diese Formel von LEONARDO herrührt. Nun findet sich in den von BONCOMPAGNI herausgegebenen *Opere* desselben keine Stelle, wo die Reihe der Kubikzahlen behandelt wird, aber da ein Teil des *Liber quadratorum* verloren gegangen ist, und da LEONARDO, der die Reihe der Quadratzahlen vermittelst der Identität

$$r(r+2)(2r+2) = (r-2)r(2r-2) + 12r^2$$

summiert, ebenso gut erkannt haben könnte, dafs die Reihe der Kubikzahlen vermittelst der Identität $r^2(r+1)^2 = (r-1)^2 r^2 + 4r^3$ summiert werden kann, so ist es ja nicht unmöglich, dafs diese letzte Reihe entweder am Ende des *Liber quadratorum* oder in einer jetzt verlorenen Schrift behandelt wurde.

Welche Mathematiker des christlichen Mittelalters haben sich mit Summierung der Kubikzahlen beschäftigt, und findet sich bei ihnen irgend eine Andeutung, aus welcher Quelle sie dabei geschöpft haben?

G. ENESTRÖM.

Recensionen.

W. W. R. Ball. A short account of the history of mathematics. Third edition. London, Macmillan 1901. XXIV + 527 S. 8°. Sh. 10.

Die erste Auflage des *Account* erschien 1888 (Anzeige von G. Loria in der Biblioth. Mathem. 1889, S. 56—58), die zweite 1893 (Anzeige von G. Eneström in der Biblioth. Mathem. 1893, S. 90—91) und ein Auszug daraus wurde 1895 unter dem Titel: *A primer of the history of mathematics* veröffentlicht (Anzeige von G. Eneström in der Biblioth. Mathem. 1895, S. 55—63). Der Plan des Buches geht aus den genannten Anzeigen hervor; es behandelt nicht in erster Linie die Entwickelung der mathematischen Ideen, sondern beschäftigt sich hauptsächlich mit den Mathematikern, ihren Lebensverhältnissen (wobei sehr oft Anekdoten hinzugefügt werden) und ihren Entdeckungen. Auf der anderen Seite giebt es auch hie und da kürzere Übersichten der Entwickelung gewisser Theorien oder Begriffe, und zuweilen ist ein ganzes Kapitel (chap. VII: „systems of numeration and primitive arithmetic“, S. 125—133) solchen Gegenständen gewidmet.

In der dritten Auflage hat Herr Ball S. 272 seine Darstellungsweise folgendermaßen motiviert:

> To give a sense of unity to a history of mathematics it is necessary to treat it chronologically, but it is possible to do this in two ways. We may discuss separately the development of different branches of mathematics during a certain period (not too long), and deal with the works of each mathematician under such heads as they may fall. Or we may describe in succession the lives and writings of the mathematicians of a certain period, and deal with the development of different subjects under the heads of those who studied them. Personally, I prefer the latter course; and not the least advantage of this, from my point of view, is that it adds a human interest to the narrative. No doubt as the subject becomes more complex this course becomes more difficult, and it may be that when the history of mathematics in the nineteenth century is written it will be necessary to deal separately with the separate branches of the subject, but, as far as I can, I continue to present the history biographically.

Inwieweit wir mit den soeben angeführten Ansichten des Herrn Ball einverstanden sind, brauchen wir nicht an dieser Stelle auseinanderzusetzen, da wir am Anfange des vorigen Bandes der Bibliotheca Mathematica unsere Meinung über die verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung angegeben haben (vgl. auch Biblioth. Mathem. 1895, S. 55—57). Nur im

Vorübergehen erlauben wir uns zu bemerken, dafs wir nicht warum die biographische Darstellungsweise schwieriger werden das 19. Jahrhundert erreicht, aber vielleicht will Herr BALL diesem Falle die von ihm bevorzugte Darstellungsweise wen dem Leser eine Übersicht über die Geschichte der Mathematik wenn seine Worte diesen Sinn haben, sind wir mit ihm einig.

Bezüglich der Einzelheiten wurde in den oben citierten Anzeigen darauf aufmerksam gemacht, dafs die von Herrn BALL ursprünglich benutzten Quellen zum Teil unzuverlässig waren, und dafs in seinem Buche darum viele unrichtige Angaben sich fanden. Zwar hat Herr BALL bei der Herausgabe der neuen Auflagen eine ziemlich grofse Anzahl von Fehlern berichtigt, aber teils sind einige solche noch stehen geblieben[1]), teils scheint ihm die neueste mathematisch-historische Litteratur nur spärlich zugänglich gewesen zu sein, so dafs in seinem Buche noch viel zu verbessern übrig ist. Die Art der Fehler dürfte aus den folgenden Beispielen hervorgehen.

S. 63. „A work which purports to be the *Catoptrica* [of EUCLID] exists in the form of an Arabic translation, but there is some doubt as to whether *it* represents the original work written by EUCLID." Hier genügt es auf den 7. Band von EUCLIDIS *Opera omnia*, ed. von J. L. HEIBERG und H. MENGE zu verweisen, wo der *griechische* Text der Katoptrik abgedruckt ist, und wo in der Einleitung dargelegt wird, dafs die Schrift *nicht* von EUKLIDES herrühren kann.

S. 102. „A book on *optics* ... [is] sometimes attributed to him [PTOLEMY], but [its] authenticity is doubtful." Diese Notiz ist als ganz veraltet zu bezeichnen, nachdem teils die lateinische Übersetzung der Optik des PTOLEMAIOS bekannt und herausgegeben worden ist, teils die Schrift *De speculis* als dem HERON angehörend, im zweiten Bande von HERONIS *Opera omnia* publiciert wurde.

S. 116. Nachdem Herr BALL bemerkt hat, dafs EUTOKIOS Kommentare zu den vier ersten Büchern der *Conica* des APOLLONIOS und zu verschiedenen Schriften des ARCHIMEDES verfafst hat, fügt er hinzu: „he also published some examples of practical Greek arithmetic. His works have never been edited, though they would seem to deserve it." Das Wort „also" ist hier vielleicht nichs ganz passend, da die fraglichen Rechenbeispiele in einem der schon angedeuteten Kommentare sich finden (EUTOCII *Commentarius in dimensionem circuli*; ARCHIMEDIS *Opera omnia* ed. HEIBERG III, 263—303), aber besonders auffällig mufs es sein, dafs die Schriften des EUTOKIOS als unediert angegeben werden. Bekanntlich besitzen wir vom Kommentar zu APOLLONIOS Übersetzungen oder Ausgaben von F. COMMANDINO, E. HALLEY und J. L. HEIBERG; über Ausgaben der Kommentare zu ARCHIMEDES hätte Herr BALL in *The works of ARCHIMEDES by* T. L. HEATH (Cambridge 1897), S. XXIX—XXX ohne Mühe Auskunft bekommen können.

Ähnliche Unrichtigkeiten bezüglich der litterarischen Notizen kommen ziemlich oft vor, zumal in solchen Fällen, in denen die richtigen Angaben

1) Die Angabe S. 59, dafs auch das 10. Buch der *Elementa* der Zahlentheorie gewidmet ist, mufs wohl als ein dreimal übersehener Schreibfehler betrachtet werden, da S. 62 richtig bemerkt wird, dafs dies Buch die Lehre von den irrationalen Gröfsen enthält.

leicht den CANTORschen *Vorlesungen* zu entnehmen sind. Etwas unangenehm ist es auch, dafs Herr BALL zuweilen ganz unbestätigten Konjekturen den Rang von wirklichen Thatsachen giebt. So z. B. behauptet er (S. 97—98) kategorisch, dafs NIKOMACHOS ein Jude war, der im Jahre 50 n. Chr. geboren und c. 110 gestorben ist, weiter (S. 99), dafs PTOLEMAIOS im Jahre 168 starb, und (S. 173) dafs LEONARDO PISANO im Jahre 1175 geboren wurde. Solche Behauptungen sind ja an sich recht unschuldig, aber sie tragen dazu bei, die Zuverlässigkeit der Arbeit verdächtig zu machen.

Auf der anderen Seite enthält die BALLsche Arbeit eine grofse Anzahl von bibliographischen Notizen, die sehr nützlich werden können, für den Fall dafs der Leser über einen gewissen Gegenstand etwas Näheres erfahren will; insbesondere scheint der Verf. besorgt gewesen zu sein, auf Auflagen der Gesammelten Werke der verschiedenen Mathematiker, sowie auf ausführliche Biographien derselben hinzuweisen.

Von den Bemerkungen, die wir noch notiert haben, erlauben wir uns die folgenden hier hinzuzufügen.

S. 13. Es ist wahr, dafs CANTOR noch in der 2. Auflage seiner *Vorlesungen* (I, Leipzig 1894, S. 108) THEOFRASTOS als Geschichtsschreiber auf dem Gebiete der Mathematik nennt, aber USENER und nach ihm P. TANNERY (*La géométrie grecque*, Paris 1887, S. 73) haben bemerkt, dafs die betreffende Stelle des DIOGENES LAERTIUS einen anderen Sinn hat, und wenn wir uns nicht irren, ist auch CANTOR jetzt der Ansicht, dafs THEOFRASTOS mit Unrecht unter den Geschichtsschreibern der Mathematik genannt worden ist.

S. 79 (Anm.). Es ist ein wenig auffallend, dafs die HEIBERGsche Ausgabe von APOLLONIOS' Schriften (Leipzig 1891—1893) nicht erwähnt wird; statt p. 51 lies p. 52.

S. 87. Wenn Herr BALL sagt, dafs HYPSIKLES „developed the theory of arithmetical progressions which had been so strangely neglected by the earlier mathematicians“, so schreibt er wohl HYPSIKLES zu viel zu. Wie S. 72 angedeutet worden ist, summierte ja ARCHIMEDES auch die arithmetische Reihe, und HYPSIKLES hat nur im Vorübergehen drei hierher gehörende Sätze aufgestellt, von denen die zwei letzten eigentlich nur die ARCHIMEDische Summenformel enthalten.

S. 91. Dafs die HERONischen Vielecksformeln nicht trigonometrisch, sondern auf rein geometrischem Wege hergeleitet wurden, hat W. SCHMIDT in der Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 319—320 nachgewiesen.

S. 97. Statt „SERENUS of Antissa“ ist „SERENUS of Antinoeia“ zu setzen (vgl. HEIBERG, Biblioth. Mathem. 1894, S. 97—98).

S. 103. Es dürfte jetzt ziemlich bekannt sein, dafs es keinen Mathematiker Namens „Ottajano“ (Oltajano ist wohl ein Schreibfehler) gegeben hat; der von Herrn BALL erwähnte „Neapolitan lad“ hiefs ANNIBALE GIORDANO (geb. 1771, gest. 1835) und war aus Ottajano.

S. 172. Was meint der Verf. mit der Notiz: „ADELHARD also procured a manuscript or a commentary on ALKARISMI's work, which he likewise translated into Latin“? S. 162 hat er *drei* verschiedene Schriften ALKHWARIZMIs citiert, nämlich die Algebra, die Arithmetik und die astronomischen Tafeln; bekanntlich ist die letzte Schrift von ATELHARD übersetzt worden, und man hat die Vermutung ausgesprochen, er habe auch die Arithmetik übersetzt (vgl. hierüber Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 520).

S. 184. BRADWARDIN war nicht „the first European to introduce the cotangent into trigonometry"; die Kotangente findet sich schon bei ROBERTUS ANGLICUS (vor 1276).

S. 185. Der Passus „NICHOLAS ORESMUS ... is said in most histories of mathematics to have influenced the development of the subject ... but I do not propose to discuss his writings" ist uns unverständlich. Hat der Verf. irgend einen Grund zu bezweifeln, dafs die gewöhnliche Darstellung von ORESMES Verdiensten um die Mathematik unrichtig ist?

S. 188 (Anm.). Der Verweis auf „an article in the supplement (pp. 1—100) of the Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, 1877" ist ungenau; entweder sollen die Worte „the supplement of" gestrichen werden, oder soll Zeitschrift für Mathematik und Physik Band 22 zitiert werden.

S. 195. Dafs die Neunerprobe nicht „was invented by the Arabs" sondern schon den indischen Mathematikern bekannt war, kann wohl jetzt als ziemlich sicher angesehen werden (vgl. CANTOR, *Vorl. über Gesch. d. Mathem.* I^2, S. 571), und P. TANNERY hat Spuren derselben bei den Griechen gefunden (*Sur l'invention de la preuve par neuf*; Bullet. d. sc. mathém. 6_2, 1882, S. 142—144).

S. 201. Die Notizen über + und — sind nicht gut abgefafst (Z. 19 ist natürlich 1554 Druckfehler für 1544), und auch die folgenden Stellen (S. 212—214, 217, 220, 221, 222), wo derselbe Gegenstand behandelt wird, enthalten unvollständige Aufschlüsse hierüber.

S. 209. Dafs REGIOMONTANUS *res* für x und *census* für x^2 braucht, ist ganz richtig, aber es wäre wohl angemessen gewesen hinzuzufügen, dafs beide Benennungen weit älter waren. Dafs *res* schon bei LEONARDO PISANO vorkommt, kann der Leser aus S. 217 folgern, aber aus dieser Stelle kann er nicht ersehen, dafs LEONARDO auch das Wort *census* anwendet.

S. 211. Die Bemerkung des Herrn BALL in Bezug auf den *Algorismus demonstratus*: „it is possible that the text which has come down to us contains additional matter contributed to REGIOMONTANUS" ist nicht ernstlich zu nehmen, da wir bekanntlich Handschriften des JORDANischen *Algorismus* besitzen, die aus dem Anfange des 14. Jahrhunderts herrühren (vgl. z. B. CURTZE, *IORDANI NEMORARII de triangulis libri quatuor*, Thorn 1887, S. VII). Eine Bemerkung derselben Art findet sich S. 224, wo Herr BALL hinsichtlich der Lösung der Gleichung $x^3 + qx = r$ behauptet, dafs „it is probable that FERREO had found the result in an Arab work", und auch der Passus S. 225: „it is possible that TARTAGLIA also wrote a treatise on algebra and the solution of cubic equations, but if so no copy is now extant" zeigt nur, dafs Herr BALL nicht genug Sachkunde besitzt, um kompetent zu sein sich über den betreffenden Gegenstand zu äufsern. Bekanntlich hat TARTAGLIA die Algebra im 6. Teile (1560) des *General trattato di numeri e misure* und die Lösung kubischer Gleichungen im 9. Buche der *Quesiti ed inventioni* (1546) behandelt.

S. 230. Herr BALL macht hier auf das Vorkommen imaginärer Gröfsen in der *Ars magna* des CARDANO aufmerksam, und fügt hinzu: „except for the somewhat similar researches of BOMBELLI, a few years later, the theory of imaginary quantities received little further attention from mathematicians until EULER took up the matter." Aber vor EULER hat wohl wenigstens JOHANN BERNOULLI den imaginären Gröfsen grofse Aufmerksamkeit gewidmet.

S. 239. Eine Notiz wie die folgende: „an approach to index notation,

such as A^q, are said to occur in VIETA's works" sollte man nicht bei einem Geschichtsschreiber der Mathematik im Jahre 1902 finden.

S. 241. Dafs der Wert, den VIÈTE für $\frac{2}{\pi}$ giebt, *nicht* korrekt, sondern verdruckt ist, hätte Herr BALL aus der neuen Auflage von CANTORS *Vorlesungen* unmittelbar ersehen können.

S. 252. Dafs STEVIN „early in the seventeenth century" gestorben ist, ist zwar richtig, aber warum diese schwebende Angabe, da man sein Todesjahr 1620 genau kennt?

S. 285 (vgl. S. 317). Die erste lateinische Aufgabe von DESCARTES' Geometrie erschien nicht 1659 sondern 1649.

S. 296. Über die Geschichte der Cykloide vor GALILEI siehe z. B. GÜNTHER, Biblioth. Mathem. 1887, S. 7—13.

S. 302. Die Notiz, dafs Band 4 von FERMATS *Œuvres* 1901 erschien, mufs auf einem Mifsverständnisse beruhen (liegt vielleicht eine Verwechselung mit dem 1901 erschienenen 4. Bande von DESCARTES' *Œuvres* vor?).

S. 365. Die Behauptung hinsichtlich LEIBNIZ, dafs „nearly all his mathematical papers were produced within the ten years from 1682 to 1692" ist kaum zutreffend.

S. 413. Z. 26 ist der Druckfehler x für n besonders sinnstörend.

S. 457. Die von SCHERING besorgte Ausgabe von GAUSS' *Werken* umfafst nicht sieben, sondern nur sechs Bände; Band 7 ist noch nicht erschienen.

S. 476. Es scheint uns wenig passend, in einer Geschichte der Mathematik einen einzelnen Mathematiker als „one of the most distinguished of living mathematicians" zu bezeichnen.

S. 488. Die sehr auffällige Notiz: „SCHUBERTS lectures have been published by F. LINDEMANN" beruht ohne Zweifel auf einem Unfall; das Notenzeichen § ist wohl unrichtig nach SCHUBERT statt nach CLEBSCH gesetzt worden, und dann hat Herr BALL die Note ohne weiteres ergänzt.

Für die kürzlich verstorbenen Mathematiker hat Herr BALL im allgemeinen Geburts- und Todesjahr angegeben, was ja sehr lobenswert ist. Aber unnötig scheint es uns diese Zahlen zweimal, wie für BETTI (S. 460, 486), KRONECKER (S. 469, 473) und BRIOSCHI (S. 473, 486) anzugeben; für HERMITE finden sie sich sogar viermal (S. 469, 474, 475, 486). Auf der anderen Seite fehlen (S. 475, 486, 498, 500) die Zahlen für CH. BRIOT (1817—1882), J. C. BOUQUET (1819—1885), S. H. ARONHOLD (1819—1884), J. GRAINDORGE (1843—1896) und H. A. NEWTON (1830—1896).

S. 489 ist für SOPHIE KOWALEVSKI das Geburtsjahr 1850 zu setzen.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

H. Konen. Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$. Leipzig, Hirzel 1901. 132 S. 8⁰. Mark 4.

Herr KONEN hat sich in der vorliegenden Schrift die ebenso interessante wie verdienstvolle Aufgabe gestellt, die in ganzen Zahlen zu lösende Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ von der ersten Spur ihres Auftretens bis in die Gegenwart zu verfolgen. Er behandelt zuerst S. 2—18 die Nachrichten über die Auflösung der Gleichung durch die Griechen. Im Anschlufs an die Untersuchungen von M. CANTOR, P. TANNERY, HULTSCH u. a. beleuchtet er die Stellen im PLATO,

THEON SMYRNAEUS und PROCLUS, welche mit jener Gleichung in Verbindung gebracht werden können, und faſst nach HULTSCH die Ergebnisse folgendermaſsen zusammen:

Wenn man $s_1 = 1$, $d_1 = 1$ annimmt und allgemein $s_n = s_{n-1} + d_{n-1}$, $d_n = 2 \cdot s_{n-1} + d_{n-1}$ definiert, so gelten für die von den Griechen erfundenen Diametral- und Seitenzahlen d und s die Gesetze:

$$1)\ d_n^2 = 2 \cdot s_n^2 \pm 1; \qquad 2)\ d_n^2 + d_{n-1}^2 = 2\left(s_n^2 + s_{n-1}^2\right);$$

3) $\frac{d_n}{s_n}$ ist ein Näherungswert von $\sqrt{2}$, und zwar nimmt die Annäherung bei wachsendem n zu.

Weiter geht KONEN auf die übrigen die Sache betreffenden Nachrichten ein, über deren Auslegung weniger Übereinstimmung unter den Gelehrten herrscht, zunächst auf das *Problema bovinum*, das nach seiner Einleitung von ARCHIMEDES herrührt, und dessen vorletzte Bedingung zu der ganzzahlig zu lösenden Gleichung $t^2 - 4\,729\,494\,u^2 = 1$ führt, das also, wenn sein Ursprung gesichert wäre, eine Beschäftigung des ARCHIMEDES mit der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ beweisen würde. Zu demselben Ergebnis würde man gelangen, wenn ARCHIMEDES die Näherungswerte, die er für $\sqrt{3}$ giebt, ohne darzulegen, auf welchem Wege er sie erhalten, wirklich nach der mit dem modernen Kettenbruchverfahren in Zusammenhang stehenden Methode gefunden hätte, die man von vornherein voraussetzt und dann plausibel zu machen sucht. Freilich ist die Schluſsfolgerung durchaus nicht sicher, denn es ist nicht ausgeschlossen, daſs ARCHIMEDES auch anders verfahren, daſs er sich etwa des falschen Ansatzes bedient habe, der gerade für die Ermittelung von Näherungswerten ein nahe liegendes Hülfsmittel ist. Der falsche Ansatz wird nun freilich für durchaus ungriechisch erklärt, aber es ist schwer einzusehen, weshalb die Griechen, die doch sonst so viel von den Barbaren angenommen haben, gerade ihn verschmäht haben sollen. Übrigens mehren sich die Stimmen, die eine Anwendung des falschen Ansatzes seitens der Griechen nicht von der Hand weisen. So hat mir Herr Prof. A. STURM am 29. 1. 1899 geschrieben, „er habe ebenfalls stets die Überzeugung gehegt, daſs das HERONsche Verfahren der Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln auf dem doppelten falschen Ansatze beruhe."

KONEN erwähnt ferner die von P. TANNERY vor etwa 20 Jahren ausgesprochene Vermutung, daſs DIOPHANT, in dessen Arithmetik, soweit sie uns erhalten ist, die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ nicht vorkommt, dieselbe nichts destoweniger behandelt habe; diese Behandlung habe sich in einem der verlorenen Bücher befunden. Ob TANNERY noch jetzt dieser Ansicht ist? KONEN sagt p. 15 „ . . . , und so erübrigt uns nur noch, von den griechischen Mathematikern DIOPHANT zu nennen, in dessen *Arithmetik* man wohl zu allererst nach einer Behandlung der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ suchen möchte, wäre es auch nur für rationale t und u." Daſs DIOPHANT die Gleichung durch rationale Werte hat befriedigen können, unterliegt wohl keinem Zweifel, da solche Werte durch ein von DIOPHANT vielfach angewandtes Verfahren ohne weiteres geliefert werden. Recht zweifelhaft ist es jedoch, ob er, der in der Regel nur rationale Lösungen seiner Aufgaben ermittelt, auch die ganzzahlige Lösung jener Gleichung versucht habe. Wer das behauptet, muſs bessere Gründe vorbringen, als bisher gegeben sind. Auch ist es recht eigentümlich, daſs man

behauptet, der verlorene Teil der Arithmetik DIOPHANTS habe im wesentlichen nichts anderes als der auf uns gekommene Teil enthalten, dann aber eine so wichtige Sache, wie die ganzzahlige Lösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$, die dem ganzen Werke DIOPHANTS ein anderes Gepräge aufdrücken würde, in diesen verlorenen Teil verweist. Ob nicht allgemein der Umstand, dafs sich von jener Gleichung keine Spur in den Schriften der *Araber* findet, der Annahme einer Beschäftigung der Griechen mit derselben widerspricht, scheint mir noch weiterer Überlegung zu bedürfen. Jedenfalls steht die Sache hinsichtlich der Griechen nicht so unanfechtbar fest, wie für ein anderes Volk des Altertums, die *Inder*, denen KONEN die Seiten 18—28 seiner Schrift gewidmet hat.

Die „cyklische Methode", wie sie BHÁSCARA und BRAHMEGUPTA anwenden, giebt in allen Fällen die Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ in ganzen Zahlen, und wenn die Inder auch nicht den Beweis geführt haben, dafs ihr Verfahren immer zum Ziele führen müsse, so fällt dieser Mangel für jene entlegenen Zeiten doch nicht sehr ins Gewicht. KONEN schliefst sich in seiner Darstellung des Gedankengangs der Inder im wesentlichen HANKEL an. Er hat diesen Abschnitt, wie es scheint, mit besonderer Liebe behandelt, und seine Darlegung wird wohl bei jedem Leser ein Gefühl völliger Befriedigung hervorrufen. Ob — wie HANKEL annimmt — die Lösung der Aufgabe eine ureigene Leistung der Inder gewesen ist, oder — wie CANTOR und mehr noch TANNERY behaupten — die Inder die Anregung zu derselben von den Griechen erhalten haben, ist eine Frage, die für jetzt wohl keine sichere Beantwortung finden wird, und Herr KONEN hat Recht, dafs er die Frage, nachdem er sie formuliert, wieder fallen gelassen hat.

Seitdem den Indern (etwa 600 n. Chr.) die ganzzahlige Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ gelungen war, verstrichen mehr als 1000 Jahre, bis die Beschäftigung mit derselben wieder aufgenommen wurde. Es geschah dies durch FERMAT, der 1657 nach der Sitte der Zeit die übrigen Mathematiker, speziell die englischen herausforderte, zu beweisen, dafs die Gleichung für jeden nichtquadratischen Wert von D in ganzen Zahlen lösbar sei, und ein allgemeines Lösungsverfahren derselben zu geben. Der Beweis der Lösbarkeit wurde von den Engländern nicht erbracht. Die Auflösungsmethode, welche im wesentlichen von Lord WILLIAM BROUNCKER[1]) erdacht und von JOHN WALLIS, Professor in Oxford[2]), redigiert worden ist, wird von KONEN eingehend besprochen. Die zwei Jahre früher als die KONENsche Schrift erschienene Arbeit des Referenten über den Streit zwischen FERMAT und WALLIS, der u. a. ebenfalls die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ zum Gegenstande hatte, ist Herrn KONEN, wie er S. 29 bemerkt, erst nach Abschlufs des gröfsten Teils seiner Schrift bekannt geworden. KONEN schildert weiter EULERS Bemühungen um die Gleichung, die in der Lösung derselben durch Kettenbrüche endigen, ohne dafs freilich der Beweis der dabei zur Anwendung kommenden Fundamental-Sätze gegeben wird. Dabei erörtert er auch die Frage nach dem Ursprung der von EULER aufgebrachten unrichtigen Benennung „*PELLsche Gleichung*", ohne zu einer befriedigenden Antwort zu gelangen. Übrigens ist es ein Irrtum, wenn

1) Es sind wohl nur Druckfehler, wenn an einigen Stellen BROUNCKER mit THOMAS BRANCKER, dem Übersetzer der RAHNschen Algebra, verwechselt wird.

2) Nicht in *London*, wie KONEN irrtümlicher Weise S. 31 sagt.

KONEN S. 33 behauptet, PELL habe die englische Übersetzung[1]) der deutschen Algebra RAHNS anfertigen lassen (siehe Bibliotheca Mathematica 3_3, 1902, S. 121). Der Wunsch KONENS, dafs der Ausdruck *Pellsche Gleichung* endlich verschwinden und die Aufgabe der Gerechtigkeit entsprechend nach FERMAT benannt werden möge, ist vom Referenten schon verschiedentlich ausgesprochen worden. Wenn sich nur nicht auch in diesem Falle zeigen wird, dafs Irrtümer ein zähes Leben haben!

Im folgenden Paragraphen behandelt KONEN die einschlägigen Arbeiten von LAGRANGE, der sich im Jahre 1768 dem Gegenstande zuwandte, und giebt die Resultate, zu welchen derselbe schliefslich gelangte, nach LEGENDRES Darstellung wie folgt wieder:

1) Entwickelt man $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch mit nur positiven unvollständigen Quotienten, von denen a der erste sei, so ist der Kettenbruch unrein periodisch. Der Periode geht nur der eine Quotient a voraus, sie schliefst mit dem unvollständigen Quotienten $2a$, und ihre übrigen Glieder bilden eine symmetrische Reihe.

2) Die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ ist stets ganzzahlig lösbar, und zwar genügen ihr Zähler und Nenner jedes zum Quotienten $2a$ gehörigen Näherungsbruchs, wenn die symmetrische Reihe ein mittleres Glied hat, im entgegengesetzten Falle aber nur Zähler und Nenner des zu $2a$ gehörigen Näherungsbruchs der zweiten, vierten u. s. w. Periode.

3) Man erhält auf diese Weise *alle* Lösungen der Gleichung und zwar der Gröfse nach geordnet.

KONEN geht sodann zu den Fortschritten über, welche die Theorie der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ durch GAUSS erfahren hat, der sie als Spezialfall der Gleichung $t^2 - Du^2 = m^2$ behandelt, ferner durch DIRICHLET und JACOBI, die 1837 unabhängig von einander gefunden haben, dafs dieselbe mit Hülfe der Kreisteilungstheorie als möglich bewiesen und aufgelöst werden kann, endlich durch verschiedene andere Mathematiker, wie STERN, MINNIGERODE, ROBERTS, welche die Zulässigkeit von Kettenbrüchen mit negativen unvollständigen Quotienten näher untersucht haben.

Es war hier natürlich nur möglich, eine kurze Übersicht über den reichen Inhalt der KONENschen Schrift zu geben, die überall erkennen läfst, dafs der Verfasser den Gegenstand in allen seinen Einzelheiten beherrscht und gut darzustellen verstanden hat. Mit dem von dem russischen Mathematiker SCHAPIRA vorgeschlagenen und von KONEN adoptierten Ausdruck „gemeinteilig" für „mit gemeinschaftlichen Divisoren" kann sich der Referent freilich nicht befreunden; derselbe hält es auch für recht unwahrscheinlich, dafs dieser Ausdruck in die deutsche Sprache aufgenommen werden wird.

1) In meiner Arbeit: *Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die englische Übersetzung derselben* im vorigen Heft dieser Zeitschrift ist Zürich unter den Städten genannt, welche die englische Übersetzung nicht besitzen. Es ist das ein Irrtum, in Zürich befinden sich sogar 2 Exemplare des seltenen Buches, das eine in der Stadtbibliothek, das andere in der Bibliothek der naturforschenden Gesellschaft. Meine falsche Notiz beruht auf einer unrichtigen Auskunft, die ich aus Zürich erhalten habe, und die dadurch etwas entschuldigt wird, dafs die Kataloge beider Bibliotheken das Buch nicht unter dem Namen „BRANCKER", sondern unter „RAHN" enthalten.

Frankfurt a. M. G. WERTHEIM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
12 (1902).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
3_3 (1902) : 1. — [Recension der Bände 1_3—2_3:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 659—665. (H. Bosmans.)

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°. [3
1_2 : 8. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Procès-verbaux sommaires du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, rédigés par E. Duporcq. Paris 1901. [4
8°, 17 S.

Annales internationales d'histoire. Congrès de Paris 1900. 5e section. Histoire des sciences. Paris 1901. [5
8°, (7) + 348 S. — Die Beiträge zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften sind in diesem oder im vorhergehenden Schriftverzeichnis besonders erwähnt.

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl (1902). — [Recension:] Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 11, 1902, 309—310. (A. Gutzmer.) [6

Eneström, G., Über Periodeneinteilung in der Geschichte der Mathematik. [7
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 1—6.

Jacobi, M., Die Bedeutung der modernen historischen Forschung in den mathematischen Wissenschaften. [8
Das Weltall 2, 1902, 89—91. — Der Titel verspricht zuviel: der Artikel behandelt eigentlich die Bedeutung der Kenntnis der astronomischen Mythen der Urvölker.

Müller, Felix, Über die Bedeutung der Zeitschriften für die mathematische Litteratur und die mathematisch-historische Forschung. [9
Berlin, Mathem. Gesellsch., Sitzungsber. 1901—1902, 17—18.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. = 1^2 (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 137—139. (A. Sturm, W. Schmidt.) = 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 140—142. (A. Sturm, H. Bosmans.) = 3^2 (1900—1901). [Recension oder kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 142—143. (G. Eneström.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 15—18. (G. L.) — Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 128. (E. Lampe.) [10

Loria, G., La trasfigurazione di una scienza (1900). [Recension:] Jornal de sc. mathem. 14, 1901, 187. (G. T.) [11

., Histoire des mathématiques dans
st le moyen âge, traduite par J. Mas-
. [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient.,
quest. scient. 1_2, 1902, 699—700. —
athem. 3_3, 1902, 146—148. (G. Ene-
Revue scient. 17_4, 1902, 400—401. —
Americ. mathem soc., Bulletin 8_2,
55. (D. E. Smith.) [12

Storia della geometria. Traduzione
asia (1901). [Recension:] Bollett. di
sc. matem. 1901, 116—118. (G. L.) [13

La genesi del calcolo nume-
verso l'evoluzione. [14
i matem. (Bologna) **1**, 1900, 19—23,
4—117, 168—171, 209—212, 320—333,
2, 1901, 115—117.

., Il concetto d'infinitesimo e
licazione alla matematica. [15
matem. 38, 1900, 265—314; **39**, 1901,
— Abdruck einer 1894 publicierten
Auch besonders herausgegeben (Na-
(3) + 103 + (1) S.)

Les extensions de la notion de
ans leur développement logique
que. [16
ement mathém. 4, 1902, 16—27. — [Be-
n:] L'enseignement mathém. 4, 1902,
(G. Eneström.)

und **Traumüller, F.,** Geschichte der
hen Experimentierkunst (1899). [Re-
Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, 436. [17

, L., Die Mathematik der
Berlin, Dümmler 1900. [18

chichte des Altertums.

K., Die astronomischen Kennt-
Babylonier und ihre kultur-
e Bedeutung. [19
zur alten Geschichte, herausg. von
mann **1**, 1902, 1—25, 189—211, 349
Karte.

X., Zur Erklärung der baby-
Mondtafeln. Astronomische
r Chaldäer. [20
für Assyriologie **15**, 1901, 178—209,
— [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient.,
s quest. scient. 1_2, 1902, 665—666.
ans.)

J., L'évolution de l'astronomie
Grecs. Paris, Gauthier-Villars
[21

M. C. P., Realistische Chresto-
aus der Litteratur des klassi-
ertums. III. Leipzig, Dürr 1901.
[22
285 S. — [4, 20 *M*] — [Recension:]
für mathem. Unterr. 32, 1901, 658
. Meyer.)

Le scienze esatte nell' antica
Libro V. L'aritmetica dei Greci.
[23
ccad. d. sc., Memorie 12_2, 1902, 217—411.
nsion der Teile III—IV:] *Bruxelles*,
t., Revue des quest. scient. 1_2, 1902,
(H. Bosmans.)

I., Sur les problèmes mécani-
ibués à Aristote. [24

Congrès de l'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 101—107. — Mit Bemerkungen von P. Tannery (S. 108—111).

Tucker, R., Allmann, G. J., Eumorfopoulos, St., Euclid I, 32 Corr. [25
Nature **63**, 1900, 58, 106—107, 157. — Über den Ursprung der in einigen Euklid-Ausgaben vorkommenden Zusätze zu Elem. I, 32.

Simon, M., Euclid und die sechs planimetrischen Bücher (1901). [Recension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 8_2, 1902, 216—218. (J. L. Coolidge.) — L'enseignement mathém. **4**, 1902, 149—150. (J. Boyer.) [26

Schmidt, W., Noch einmal Archimedes' Ephodikón. [27
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 143—144.

Hoppe, E., Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandrien. Hamburg 1902. [28
4°, 9 S. — Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Wilhelm-Gymnasiums in Hamburg 1902.

***Jaglarz, A.,** Heron z Aleksandryi i jego problemat powierzchni trójkąta. Krakow 1901. [29
4°, 14 S. — [Recension:] Wiadomości matem. **6**, 1902, 121. (T. Łopuszański.)

Heiberg, J. L., Anatolius sur les dix premiers nombres (1901). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_2, 1902, 668—669. (H. Bosmans.) [30

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. [31
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 7—62.

c) Geschichte des Mittelalters.

Mansion, P., Sur le commentaire d'Anaritius relatif aux éléments d'Euclide. [32
Bruxelles, Soc. scient., Annales **24**:1, 1900, 47—49.

Tannery, P. et Clerval, Une correspondance d'écolâtres du XI[e] siècle (1900). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_2, 1902, 669—673. (H. Bosmans.) [33

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. I. [34
Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. **12**, 1902. X + 336 S. — [16 *M*] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, 951—953. (M. Cantor.)

Vaux, C. de, Note sur les mécaniques de Bédi ez-Zaman el-Djazari et sur un appareil hydraulique attribué à Apollonius de Perge. [35
Congrès d'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 112—120.

Wertheim, G., Die „Numeri congrui" et „congruentes". [36
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 141—145. — Anfrage.

Björnbo, A. A., Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert. [37
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 63—75.

***Deichmüller, F.,** Die astronomische Bewegungslehre und Weltanschauung des Kardinals Nikolaus von Cusa. [38

Bonn, Niederrhein. Gesellsch., Sitzungsber. 1901. — [Recension:] Naturwiss. Rundschau **17**, 1902, 101—102. (S. Günther.)

d) Geschichte der neueren Zeit.

Saavedra, E., Note sur l'histoire de la résolution des équations cubiques [39
Congrès de l'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 58—60. — Mit Bemerkungen von P. Tannery (S. 61—63).

Günther, S., Die Kompromiss-Weltsysteme des XVI., XVII. und XVIII. Jahrhunderts. [40
Congrès de l'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 121—145.

Frizzo, G., De numeris libri duo authore J. Noviomago (1901). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 148. (G. Loria.) — Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, 1211. [41

Eneström, G., Über Gleichungen, die auf Null gebracht sind. [42
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 145. — Anfrage.

Macri, G., Francesco Maurolico nella vita e negli scritti (1901). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 148—150. (G. Vivanti.) [43

Grofse, H., Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts (1901). [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **33**, 1902, 69—70. (F. Unger.) [44

Gravelaar, N. L. W. A., Stevins Problemata geometrica (1901). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 673—678. (H. Bosmans.) [45

***Eckert, H.,** Tycho Brahe in Prag MDIC—MDCI. Zur Erinnerung an sein vor 300 Jahren erfolgtes Ableben zusammengestellt und mit erläuternder Einleitung versehen. Prag 1901. [46
25 Photographien mit Text. — [Recension:] Das Weltall **2**, 1902, 105—108. (L. Weinek.)

Bosmans, H., Le traité des sinus de Michiel Coignet (1901). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 31—32. (A. F.) [47

Gravelaar, N. L. W. A., John Napiers werken (1899). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 150—152. (M. Koppe.) [48

Bosmans, H., Le degré du méridien terrestre mesuré par W. Snellius (1900). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1901, 31. (A. F.) [49

Wertheim, G., Ein Beitrag zur Beurteilung des Pietro Antonio Cataldi. [50
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 76—83.

Goldbeck, E., Galileis Atomistik und ihre Quellen. [51
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 84—112.

Tannery, P., Lettres inédites adressées au père Mersenne. [52
Congrès d'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 311—343. — [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 678—679. (H. Bosmans.)

Amodeo, F., Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732. [53
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti **31**, 1902. 60 S.

Wertheim, G., Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die englische Übersetzung derselben. [54
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 113—126.

Favaro, A., Il metro proposto come unità di misura nel 1675 (1901). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 680—682. (H. Bosmans.) [55

Tannery, P., Notes sur les manuscrits français de Munich 247 et 252 et de Vienne 7049—7050 [contenant des traités de mathématiques et des lettres de mathématiciens du 17ᵉ siècle]. [56
Congrès d'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 297—310.

Loria, G., Pseudo-versiera e Quadratrice geometrica. [57
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 127—130.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 623—626. (Ch. J. de la Vallée Poussin.) — Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, 749. — Nouv. ann. de mathém. 2_4, 1902, 40—44. (H. B.) [58

Vacca, G., Sur le mathématicien anglais Braikenridge. [59
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 145. — Antwort auf eine Anfrage.

***Vogler, A.,** Johann Heinrich Lambert und die praktische Geometrie. Festrede. Berlin 1901. [6
8°. — [1 *M*]

***Streit, H.,** Die wissenschaftlichen Fo schungen und Entdeckungen des ält ren Seebeck auf dem Gebiete der Op und Wärmelehre. Schlawe 1901. [
4°, 15 S. + 1 Taf. — Programm des Prog nasiums in Schlawe. — [Recension:] Zeit für mathem. Unterr. **33**, 1902, 95. (Stegema

Fehr, H., Sur J. R. Argand. [
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 145. — Antw auf eine Anfrage.

***Fišer, R.,** Die Methoden der analy schen Geometrie in ihrer Entwickelu im 19. Jahrhundert. Braunau 1900. [
4°, 51 S. — Programm.

Günther, S., Geschichte der anorganischen Nat wissenschaften im neunzehnten Jahrhund (1901). [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unte **33**, 1902, 65—68. (Dannemann.) [

***Föppl, A.,** Die Mechanik im 19. Jah hundert. Vortrag. München 1902. [
8°, 25 S. — [0, 80 *M*]

Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal XIXᵉ siècle (1900). [Recension:] Arch. de Mathem. 3_3, 1902, 62. (M. Cantor.) — Deutsch Litteraturz. **23**, 1902, 876. [6

Gauss, K. F., General investigations o curved surfaces of 1827 and 1825. Translated with notes and a bibliography by J. C. Morehead and A. M. Hiltebeitel. Princeton 1902. [67
4°, V + (1) + 126 + (1) S. — [1, 75 doll.] — [Recension:] *New York*, Americ. mathem. soc. Bulletin. 8_2, 1902, 352. (E. O. Lovett.)

Vincent, J., Aperçu de l'histoire de l météorologie en Belgique. II. [68
Bruxelles, Observatoire, Annuaire météorologique 1902, 43—180.

Picard, E., Le premier chapitre d'u rapport sur quelques progrès récente dans les sciences. [69
Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 37—53.

Бобынинъ, В. В., Литература и дѣятел исторіи математики въ XIX вѣкѣ. Ольри Теркемъ. [7

Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 243—251. — Bobynin, V. V., Die Litteratur und die Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete im 19. Jahrhundert. Olry Terquem.

Valentin, G., Über einen anscheinenden Defekt im sechsten Bande von Boncompagnis „Bullettino". [71
Biblioth. Mathem 3_3, 1902, 131—132.

Wölffing, E., Abhandlungsregister [aus dem Gebiete der angewandten Mathematik] 1900—1901. [72
Zeitschr. für Mathem. 47, 1902, 287—320.

Schotten, H., J. C. V. Hoffmann. [73
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 4—9 + Porträt.

e) Nekrologe.

Eugenio Beltrami (1835—1900). [74
Wiadomości matem. 6, 1902, 1—55 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (Polnische Übersetzung des Nekrologes von E. Pascal in den „Rendiconti" des „Istituto Lombardo" 1901.)

Alfred Cornu (1841—1902). [75
Nature 66, 1902, 12—13. (S. P. Thompson.)

Charles Hermite (1822—1901). [76
Mathem. Ann. 55, 1901, 337—385. (M. Noether.)

Ernst Gustav **Kirch** (1841—1901). [77
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 188—189. (F. Lorenz.)

Henry Safford (1836—1901). [78
Das Weltall 2, 1901, 72.

Franz Schmidt (1827—1901). [79
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 141—146 [mit Porträt]. (P. Stäckel.)

Franz Xaver **Stoll** (1834—1902). [80
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 143—144. (Kiepfer.)

Georg Heinrich **von Wyss** (1862—1900). [81
Schweizerische naturf. Gesellsch., Nekrologe 1901. 3 S. [mit Schriftverzeichnis]. (F. Rudio.)

Karl Zelbr (1854—1900). [82
Das Weltall 2, 1901, 72.

f) Aktuelle Fragen.

Müller, Felix, Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. I, II (1900—1901). [Recension:] Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 242. (V. V. Bobynin.) — Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 11—12. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 80—81. (W. Ahrens.) [83

Ceretti, U., Per il dizionario di matematica. [84
Periodico di matem. 4_2, 1902, 269—274.

Padoa, A., Per la compilazione di un dizionario di matematica. [85
Periodico di matem. 4_2, 1902, 262—269.

Wölffing, E., Über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften. [86
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 133—136.

Fricke, R., Über den mathematischen Hochschulunterricht. [87
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 236—247.

Loria, G., Donne matematiche. Lettura. [88
Mantova, Accademia Virgiliana, Memorie 1902. 26 S. — Erörterung der Frage, ob die Frauen fähig sind, der mathematischen Forschung wirkliche Dienste zu leisten; der Verf. gelangt zu einem negativen Resultate.

Бобынинъ, В. В., Исторія, философія и библіографія физико-математическихъ наукъ на Парижскихъ международныхъ конгрессахъ 1900 года. [89
Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 193—204, 225—242. — Bobynin, V. V., Geschichte, Philosophie und Bibliographie der physisch-mathematischen Wissenschaften an den internationalen Kongressen in Paris 1900.

[Die deutsche Mathematiker-Versammlung in Hamburg 1901.] [90
L'enseignement mathém. 4, 1902, 44—51. (J. Schröder.) — Zeitschr. für mathem Unterr. 32, 1901, 661—663.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdocent H. Andoyer in Paris zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor D. A. Gravé in Charkoff zum Professor der Mathematik an der Universität in Kieff.

— Privatdocent E. Haentzschel in Berlin zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule daselbst.

— Privatdocent H. Hohenner in München zum Professor der Geodäsie an der technischen Hochschule in Stuttgart.

— R. J. Paranjpye zum Professor der Mathematik am „Fergusson college" in Poona (Indien).

— „Instructor" B. Porter in New Haven zum Professor der Mathematik an dem „Yale university" daselbst.

— F. Purser zum Professor der Physik am „Trinity college" in Dublin.

— Privatdocent K. Zsigmondy in Wien zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule daselbst.

Todesfälle.

— Alfred Cornu, Professor der Physik an der „Ecole polytechnique" in Paris, geboren den 6. März 1841, gestorben in Chaussonnière bei Romorantin den 12. April 1902.

— Immanuel Lazarus Fuchs, Professor der Mathematik an der Universität in Berlin, geboren zu Moschin bei Posen den 5. Mai 1833, gestorben in Berlin den 26. April 1902.

— Peter Sergejewitch Nasimoff, Professor der Mathematik an der Universität in Kasan, gestorben in Kasan den 18. Dezember 1901.

Demnächst erscheinende Werke.

— Herr A. von Braunmühl hat jetzt den 2. Teil seiner *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* beendet und der Druck desselben wird demnächst beginnen.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— Prof. A. Macfarlane has this year also delivered (March 14—25) at the „Leigh university" a course of six lectures on British mathematicians of the nineteenth century, the subjects having now been: J. C. Maxwell, H. J. S. Smith, W. J. M. Rankin, J. J. Sylvester, P. G. Tait, W. Thomson (Kelvin).

— Prof. A. Gutzmer in Jena hat im Sommersemester 1902 eine einstündige Vorlesung über die geschichtliche Entwickelung der Analysis gehalten.

— Prof. P. Stäckel in Kiel hat im Sommersemester 1902 eine Vorlesung über Abels Leben und Werke gehalten.

— At the „Cornell university" (Ithaca), Prof. J. I. Hutchinson will deliver in the summer session (July 7th—August 16th) 1902 a course of lectures (five hours) on the history of mathematics.

— At the „university of California" (Berkeley), Prof. I. Stringham has announced for the second semester of the academic year 1902—1903 a course of lectures (three hours each weak) on the history of mathematics.

Vermischtes.

— Le bureau français du catalogue international de la littérature scientifique a commencé à publier une ***Bibliographie scientifique française*** contenant les titres d'écrits scientifiques parus en France à partir du 1er janvier 1902.

— Le congrès international d'histoire des sciences mathématiques, physiques et naturelles, qui devrait se tenir en 1902 à Rome et dont nous avons parlé ailleurs (voir Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, p. 453), a été renvoyé à une autre année.



E. de Jonquières

Sur la sommation des

Par

Dans une petite remarque
Vorlesungen de M. Cant
Math. 3₃, 1902, p. 239 la
donnée par Epaphrodite
même temps il a exprimé
dans la note au bas de
sous mon nom de dernier
entendu, être corrigé en
soutenir mon interprétation
er, au XVII^{e} siècle, au
ns, Grecs ou Romains,
explique de deux façons
laquelle les anciens auraient
entiers à partir de l'unité.
proposition de Nicomaque d'après
à une suite de nombres impairs
carré (ib. II, 28); pour un
position donnait immédiatement
sera rapporté à l'opinion du
démonstration de cette sommation
avoir Bachet dans son édition de
numeris polygonis II, prop. 25 et 27
une démonstration antérieure
mais ne cite point Stifel, que
France; car, si Frenicle en parle
des carrés magiques, Fermat
Bachet, d'autre part, ne revendique
cette, comme sur la prop. IX de
excerptis nondum editis Apofrodit
que in Hygini gromaticon". Cett



Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ ben Schâkir.

Von Heinrich Suter in Zürich.

Die lateinische Übersetzung des „Buches der drei Brüder" durch Gerhard von Cremona wurde bekanntlich von M. Curtze im **49.** Bande der Nova Acta der k. Leopold.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher (Halle 1885) hauptsächlich nach dem Basler Codex F. II 33 mit Einleitung und Kommentar herausgegeben. Dieser Codex ist sehr inkorrekt, so dafs der lateinische Text manchmal recht unverständlich ist; leider war das viel bessere Ms. im Pariser Codex 9335 Herrn Curtze nicht zugänglich, er konnte nur die Anfangs- und Endworte, sowie einen Teil des 7. Satzes benutzen.[1]) Es wird daher nicht unnötig erscheinen, wenn auch nicht das ganze Buch, so doch einige Partien desselben nach dem arabischen Text in deutscher Übersetzung hier wiederzugeben; zu einigen Sätzen der Abhandlung fand ich mich veranlafst, kurze Bemerkungen hinzuzufügen, von diesen Sätzen habe ich jeweilen nur die Titel übersetzt.

Soviel mir bekannt, sind von dieser Schrift vier vollständige arabische Mss. vorhanden, in Berlin (Mf. 258, 16° und Mq. 559, 14°), in Paris (2467, 3°) und in Oxford (Uri, 960), und Bruchstücke daraus im India Office (1043, 2° und 3°). Von diesen Mss. standen mir zur Verfügung die beiden Berliner (vgl. Biblioth. Mathem. 12_2, 1898, p. 73—78), ferner hatte Herr Baron Carra de Vaux in Paris die Güte, mir über das Pariser Ms. die gewünschten Aufschlüsse zu geben; ich spreche ihm hier auch öffentlich für seine Gefälligkeit den besten Dank aus. Nach diesen Aufschlüssen ist das Pariser Ms. so gut wie identisch mit den beiden Berliner Mss., nur geringfügige Abweichungen kommen vor, die den Abschreibern zur Last gelegt werden müssen.

In welcher Beziehung steht nun der arabische Text dieser Mss. zu der lateinischen Übersetzung des Gerhard von Cremona? Eine nur oberflächliche Vergleichung beider zeigt schon, dafs der arabische Text ziem-

1) Vergl. über diese Mss. die Einleitung von M. Curtze in seiner Ausgabe, sowie A. A. Björnbo, *Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert*, in der Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 63—75, und P. Tannery, *Sur „le liber augmenti et diminutionis" compilé par Abraham*, ibid. 2_3, 1901, p. 45—47.

doute à l'édition de Scriverius (*V. Inl. Fl. Vegetii Comitis aliorumque aliquot veterum de re militari libri.* Ex officina Plantiniana Raphelengii, 1607, p. 69), où l'on trouve la construction des nombres polygones de côté donné et la solution du problème inverse. Dans ses extraits d'Epaphroditus et Vitruvius, Bachet a dû trouver également, avec la sommation des cubes, celle des polygones successifs, qu'il démontre aussi dans son *Appendix*; quoiqu'il ne le dise point expressément, il devait donc considérer ces problèmes comme ayant été résolus par les anciens, et son opinion, transmise oralement, a pu parvenir jusqu'à Pascal.

Sur le fond de la question soulevée par M. Eneström, à savoir si la sommation des cubes a été déduite, comme le pense M. Cantor, de la proposition de Nicomaque par un auteur postérieur à l'invention de cette proposition, ou sous d'autres circonstances, j'estime que la découverte, pour la somme des cubes et pour la proposition de Nicomaque, a été simultanée et appartient au même mathématicien. Je pense d'ailleurs qu'elle est très antérieure aux agrimenseurs et à Nicomaque; et peut-être trouverions-nous la sommation des cubes dans Archimède (à l'occasion, par exemple, du centre de gravité du cône ou de la pyramide), si nous avions toutes ses œuvres.

Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ ben Schâkir.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

Die lateinische Übersetzung des „Buches der drei Brüder“ durch GERHARD VON CREMONA wurde bekanntlich von M. CURTZE im **49.** Bande der Nova Acta der k. Leopold.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher (Halle 1885) hauptsächlich nach dem Basler Codex F. II 33 mit Einleitung und Kommentar herausgegeben. Dieser Codex ist sehr inkorrekt, so dafs der lateinische Text manchmal recht unverständlich ist; leider war das viel bessere Ms. im Pariser Codex 9335 Herrn CURTZE nicht zugänglich, er konnte nur die Anfangs- und Endworte, sowie einen Teil des 7. Satzes benutzen.[1]) Es wird daher nicht unnötig erscheinen, wenn auch nicht das ganze Buch, so doch einige Partien desselben nach dem arabischen Text in deutscher Übersetzung hier wiederzugeben; zu einigen Sätzen der Abhandlung fand ich mich veranlafst, kurze Bemerkungen hinzuzufügen, von diesen Sätzen habe ich jeweilen nur die Titel übersetzt.

Soviel mir bekannt, sind von dieser Schrift vier vollständige arabische Mss. vorhanden, in Berlin (Mf. 258, 16° und Mq. 559, 14°), in Paris (2467, 3°) und in Oxford (URI, 960), und Bruchstücke daraus im India Office (1043, 2° und 3°). Von diesen Mss. standen mir zur Verfügung die beiden Berliner (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{12}_2$, 1898, p. 73—78), ferner hatte Herr Baron CARRA DE VAUX in Paris die Güte, mir über das Pariser Ms. die gewünschten Aufschlüsse zu geben; ich spreche ihm hier auch öffentlich für seine Gefälligkeit den besten Dank aus. Nach diesen Aufschlüssen ist das Pariser Ms. so gut wie identisch mit den beiden Berliner Mss., nur geringfügige Abweichungen kommen vor, die den Abschreibern zur Last gelegt werden müssen.

In welcher Beziehung steht nun der arabische Text dieser Mss. zu der lateinischen Übersetzung des GERHARD VON CREMONA? Eine nur oberflächliche Vergleichung beider zeigt schon, dafs der arabische Text ziem-

1) Vergl. über diese Mss. die Einleitung von M. CURTZE in seiner Ausgabe, sowie A. A. BJÖRNBO, *Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert*, in der Biblioth. Mathem. $\mathbf{3}_3$, 1902, p. 63—75, und P. TANNERY, *Sur „le liber augmenti et diminutionis“ compilé par* ABRAHAM, ibid. $\mathbf{2}_3$, 1901, p. 45—47.

lich kürzer ist als die lateinische Übersetzung, wesentlich kürzer allerdings nur am Anfang und am Schlusse, im übrigen sich nur einer knapperen, weniger weitschweifigen Ausdrucksweise bedienend. Diese Kürzungen können keineswegs blofs den Abschreibern zugeschrieben werden, sondern müssen uns notwendig zu dem Schlusse führen, dafs der noch vorhandene arabische Text nicht mehr der ursprüngliche der Söhne MÛSÂS sein könne, sondern eine verbesserte und gekürzte Redaktion desselben darstelle. Wir vermuten nun und dies mit grofser Wahrscheinlichkeit, dafs diese Redaktion von NAṢÎR ED-DÎN EL-ṬÛSÎ herstamme, zumal sich diese Abhandlung in den Berliner Codices, sowie auch im Pariser, unter solchen NAṢÎRschen Redaktionen alter, allerdings hauptsächlich griechischer[1]) Werke befindet. Ich glaubte in dieser Ansicht noch bestärkt zu werden durch den Schluss der Berliner Mss., in welchem ich die Jahreszahl *ḫnḥ* (= 658) zu lesen glaubte; es ist dies die Zeit (1259/60), in der NAṢÎR ED-DÎN seine Redaktionen alter Werke vorgenommen hat; ich hielt mich hierzu um so mehr berechtigt, als das Berliner Ms. Mq. 559 hinter jenen Buchstaben, die allerdings dort *ḥnḥ* lauten, noch das Wort *el-hiğrî*[2]) (sic!) hat. Herr CARRA DE VAUX aber sieht in jenem Wort keine Jahreszahl, sondern liest es *ğunḥ* (= *asile, abri*), und übersetzt dann die Schlufsformel im Verein mit den andern, in allen Mss. undeutlichen Worten durch: *„dans mon seigneur (est) accès, asile“*.

Sei dem wie ihm wolle, der noch vorhandene arabische Text kann nicht derjenige sein, der dem GERHARD VON CREMONA vorgelegen hatte, sondern er ist eine bessere Redaktion desselben, die wir, wenn auch die obigen Buchstaben nicht als Jahreszahl zu lesen sind, doch mit grofser Wahrscheinlichkeit dem NAṢÎR ED-DÎN zuschreiben dürfen.

Was das Thorner Fragment einer lateinischen Übersetzung unserer Abhandlung anbetrifft, das auch von Herrn CURTZE bei seiner Ausgabe benutzt worden ist, so glaubte ich zuerst, dieses könnte die direkte Übersetzung der Redaktion des NAṢÎR ED-DÎN sein, allein nach den Stellen, die Herr CURTZE aus diesem Fragment zitiert[3]), zu schliefsen, ist dasselbe noch kürzer als der redigierte arabische Text, immerhin mag der letztere dem Verfasser des Thorner Fragmentes zu Grunde gelegen haben.

„Das Buch der Kenntnis der Ausmessung der ebenen und sphärischen Figuren von den Söhnen Mûsâs, Muḥammed, el-Ḥasan und Aḥmed.[4]) [Es enthält] 18 Sätze.“

1) Immerhin befindet sich unter diesen Abhandlungen auch die Redaktion der *Data* des ṮÂBIT B. QORRA durch NAṢÎR ED-DÎN.

2) *el-sane el- hiğrije* heifst *„das Jahr der Hiğra (Flucht)“*.

3) Vergl. die Noten auf p. 116 (12), 117 (13), 125 (21) etc. der CURTZEschen Ausgabe.

4) Was im Folgenden in eckige Klammern geschlossen ist, fehlt im arabischen

„*Anfang (Einleitung) des Buches*: Die **Länge** ist die erste der Dimensionen, welche die Figuren (Körper) begrenzen, und sie ist das, was sich geradlinig nach beiden Seiten zugleich erstreckt, also kann aus ihr nichts (d. h. kein Gebilde) aufser der Länge (besser wäre „Linie“) entstehen. Wenn sich aber die Linie[1]) seitlich, d. h. in anderer Richtung als ihrer eigenen ausdehnt, so heifst diese Ausdehnung die **Breite**; diese ist also nicht, wie Viele glauben, die Linie, welche die Fläche einschliefst nach der von der Länge abweichenden Richtung, denn wenn es so wäre, so hätte die Fläche nicht nur Länge und Breite[2]), und die Breite wäre auch Länge, weil die Breite nach der Ansicht jener Leute eine Linie ist und die Linie eine Länge; diese Dinge hat schon Euklides richtig gestellt, wenn er sagt: Die Linie hat (wörtl. „ist“) nur Länge und die Fläche nur Länge und Breite. Was die **Höhe** anbetrifft, so ist sie die Ausdehnung in anderer Richtung als nach Länge und Breite, und diejenigen, welche meinen, dafs die Breite eine Linie sei, fassen auch die Höhe als Linie auf, welcher Irrtum auf gleiche Weise widerlegt wird wie vorher. Diese drei Ausdehnungen bestimmen (wörtl. „begrenzen“) das Volumen jedes Körpers und den Inhalt jeder Fläche, und das Verfahren für die Bestimmung ihrer Quantitäten besteht nur in der Vergleichung [derselben] mit der Flächen- und Körpereinheit. Die Flächeneinheit, mit welcher die Fläche gemessen wird, ist eine rechtwinklige Fläche von der Länge eins und der Breite eins, und die Körpereinheit, mit welcher der Körper gemessen wird, ist ein rechtwinkliger Körper von der Länge eins, der Breite eins und der Höhe eins. Die Gröfsen, mit denen die Flächen und die Körper gemessen werden, müssen notwendig bei ihrer Aneinanderfügung (wörtl. „Verdoppelung“) gut zusammenpassen, sodafs nicht Zwischenräume übrig bleiben, die durch sie nicht mehr ausgefüllt werden können[3]); ferner ist nötig, dafs die Unterscheidung zwischen dem was der Ausmessung fähig ist, und dem was derselben nicht fähig ist, leicht sei, und nichts ist geeigneter zur Erleichterung dieser Unterscheidung, als dafs die Eigenschaft der Einheit, mit der gemessen wird, in ihrer Einzelheit und Zusammensetzung dieselbe sei, damit die Arbeit für die Unterscheidung dessen was möglich ist, von dem was nicht möglich ist (nämlich

---

Text; was in runde Klammern geschlossen ist, erläutert das Vorhergehende oder drückt es besser aus.

1) Der arabische Text hat hier *saṭḥ* = Fläche.

2) Wie dies der Abschreiber oder Redaktor der Abhandlung versteht, zeigt folgende Randbemerkung im Ms. Mq. 559: „d. h. die Fläche hätte Längen und Breiten“ (nicht nur eine Länge und eine Breite).

3) Wörtlich, wie auch Gerhard von Cremona übersetzt: „*in die sie nicht kommen können*“.

„auszumessen"), in allen Fällen dieselbe sei. Diese Eigenschaft wird aber nur gefunden beim Quadrat, denn dasselbe ändert, wenn es verdoppelt wird, nur seine Gröſse, es bleibt aber die Eigenschaft seiner Viereckigkeit[1]) bestehen; ebenso ist das Viereck mit rechten Winkeln (d. h. das Quadrat) auch die gröſste der viereckigen Figuren. Das ist der Grund, weshalb man diese Figur und keine andere als Maſseinheit gesetzt hat.

Vergleichen wir diese Einleitung mit derjenigen der Übersetzung des Gerhard von Cremona, so sehen wir, daſs die unsrige wesentlich kürzer ist; es fehlt in ihr alles was in der Curtzeschen Ausgabe von Anfang an bis p. 116 (12), Z. 10 steht, ebenso ist der Schluſs von p. 118 (1...), Z. 5 bis Z. 18 in die wenigen Worte zusammengefaſst: „ebenso ist das Viereck mit rechten Winkeln ...... als Maſseinheit gesetzt hat". Das übrige ist ziemlich übereinstimmend und zeigt nur in den Worten auf p. 117 (13), Z. 3—7 und Z. 17—21 einige Abweichungen. Das Thorner Ms. beginnt an derselben Stelle wie das arabische (vergl. oben p. 260).

I. *„In jedem einem Kreise umbeschriebenen Vieleck ist das Produkt aus dem Halbmesser des Kreises in den halben Umfang des Vielecks die Fläche desselben."*

Arabischer Text und lateinische Übersetzung des Beweises weichen nur sehr unwesentlich von einander ab; am Schlusse aber, nach den Worten: „Aus diesem erkennt man auch, daſs der Inhalt jedes Körpers, der eine Kugel umschlieſst, gleich ist dem Produkt aus dem Halbmesser der Kugel in den dritten Teil der Oberfläche des sie umschlieſsenden Körpers; dieser Inhalt ist gröſser als der Inhalt der Kugel", folgt in den arabischen Mss. der Zusatz: *„Ich sage: Dieses kann nur bewiesen werden durch die Voraussetzung der Teilung des Körpers in Pyramiden, deren Spitzen der Mittelpunkt der Kugel ist und deren Grundflächen die Oberfläche des Körpers bilden; es steht dann der Halbmesser der Kugel jeweilen senkrecht auf ihren Grundflächen, und es ist also der Inhalt des Körpers gleich dem Inhalt aller dieser Pyramiden [zusammen]."*

Dieser Zusatz ist jedenfalls von dem spätern Redaktor dieser Abhandlung; mit Recht macht derselbe auf die schwache Seite dieses Schlusses von dem Kreis mit umbeschriebenem Vieleck auf die Kugel mit umbeschriebenem Körper aufmerksam.

III. *„Wenn eine Gerade von bestimmter Länge und ein Kreis gegeben sind, und die Gerade kürzer ist als der Kreisumfang, so ist es möglich, in den Kreis hinein ein Vieleck zu zeichnen, dessen Umfang länger ist als die gegebene Gerade; ist aber die Gerade länger als der Kreisumfang, so ist es*

1) Das Wort *quadratura* in der lateinischen Übersetzung paſst wohl nicht recht für diesen Begriff.

möglich, um den Kreis herum ein Vieleck zu zeichnen, dessen Umfang kürzer ist als die gegebene Gerade."

Nach dem Beweise, der im allgemeinen, bisweilen etwas kürzere Fassung ausgenommen, mit demjenigen der lateinischen Übersetzung übereinstimmt, stehen noch folgende Worte: „*Ich sage: Dies stützt sich auf die Existenz eines Kreises, dessen Umfang einer Geraden von bestimmter, abgegrenzter Länge gleich sei, dies (d. h. die Möglichkeit dieser Annahme) ist aber nirgendwo bewiesen.*" NAṢÎR ED-DÎN will also wohl hiermit sagen, es gebe keine gerade Linie, die genau gleich dem Umfang eines gegebenen Kreises sei, was eben im Beweise vorausgesetzt wird. Diese Annahme kann immerhin unbeschadet der Richtigkeit des Beweises gemacht werden.

IV. „*In jedem Kreis ist das Produkt aus seinem halben Durchmesser in den halben Umfang die Fläche desselben.*"

Auch hier lasse ich die Übersetzung des Beweises weg und bemerke nur, daſs in einer Randglosse des Ms. Mq. 559 der Beweis gegeben ist, daſs der Kreis von allen Figuren von gleichem Umfang die gröſste Fläche hat; auch der analoge Satz über die Kugel ist angeführt.

VI. „*Wir wollen nun das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang [des Kreises] nach dem Verfahren des* ARCHIMEDES *nachweisen, denn bis jetzt ist kein anderer Weg der Auffindung desselben zu uns gelangt als jener, und wenn derselbe auch nicht zu einer solchen Kenntnis des Maſses des einen durch das andere führt, daſs mit demselben vollständig genau gerechnet werden kann, so läſst er uns doch bis zu jeder nur wünschbaren Annäherung an dieses Maſs gelangen.*"

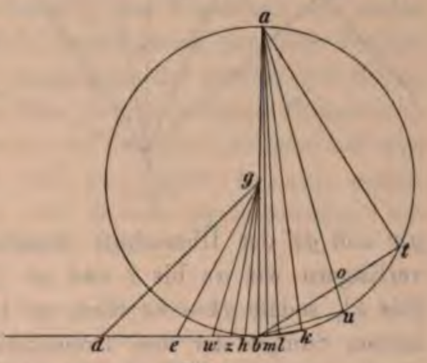


Fig. 1.

Der lateinische Text stimmt mit dem arabischen fast wörtlich überein, ich lasse daher auch hier die deutsche Übersetzung weg; ich habe nur einen Fehler zu verbessern, der sich in den Zeilen 26—28 von p. 128 (24) der lateinischen Übersetzung vorfindet, es heiſst dort (vgl. Fig. 1): *sed proporcio duarum linearum ta, ab coniunctarum ad tb est sicut proporcio ab ad bg et proporcio ab ad bg est sicut proporcio au ad bu.* Das „*ab* ad *bg*" ist natürlich unrichtig, es scheint aber, daſs Herr CURTZE diesen Fehler noch schlimmer gemacht hat, als er im Original steht, denn nach der Fuſsnote hat dieses „*at* ad *tg*" statt „*ab* ad *bg*", und dies ist bis auf den letzten Buchstaben *g* richtig, es sollte nämlich heiſsen: „*at* ad *to*", und der Buchstabe *o* muſs im

Schnittpunkt von *bt* und *au* stehen, wie es das arabische Ms. in der That zeigt.[1])

VII. „*Multipliziert man die halbe Summe der drei Seiten eines jeden Dreiecks mit ihrem Überschuſs über jede der drei Seiten, d. h. zuerst mit ihrem Überschuſs über die eine Seite, dann mit demjenigen über die zweite, und hierauf mit demjenigen über die dritte, so ist das Ergebnis gleich dem Quadrat seiner Fläche* (wörtl. „*gleich dem Produkt seiner Fläche in sich selbst*").

Da beide Beweise (VII^a und VII^b), die von diesem Satze gegeben werden, bisweilen etwas abweichen von denen der lateinischen Übersetzung, so gebe ich hier beide in deutscher Übersetzung wieder, indem ich der Kürze halber die hier etwas häufig vorkommenden Proportionen und Produkte in die moderne Form übertrage.

„Es sei (Fig. 2) das Dreieck *abg*, wir zeichnen in dasselbe den einbeschriebenen Kreis, er sei *dzw* und sein Mittelpunkt *e*; wir ziehen *ed*, *ez*, *ew* nach den Berührungspunkten, ebenso *ae*, so ist klar, daſs *ad* und *aw* einander gleich sind, ebenso daſs $bd = bz$ und $gw = gz$[2]); ferner ist ersichtlich, daſs jede der beiden Linien *ad* und *aw* der Überschuſs der halben Summe der drei Seiten über die Seite *bg* ist, jede der beiden Linien *bd* und *bz* der Überschuſs der halben Summe der drei Seiten über *ag*, und jede der beiden Linien

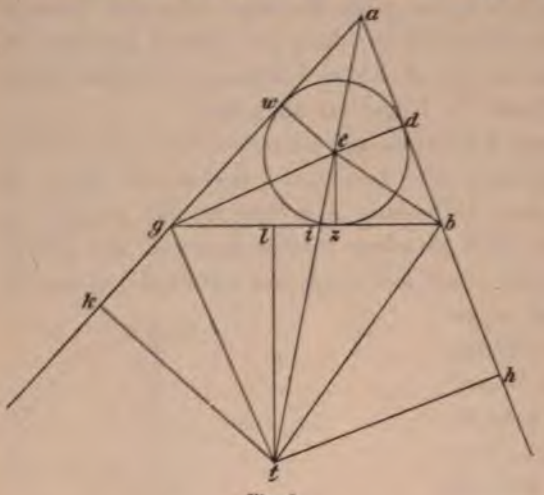


Fig. 2.

gw und *gz* der Überschuſs derselben halben Summe über *ab*. Hierauf verlängern wir *ae* bis *t* und *ab* [bis *h*], sodaſs $bh = gz$ wird, und *ag* [bis *k*], sodaſs $gk = bz$ wird, so ist sowohl *ah* als auch *ak* gleich der halben Summe der drei Dreieckseiten; in den beiden Punkten *h* und *k* errichten wir zwei Senkrechte *ht* und *hk* [auf *ah* und *ak*], so werden sich dieselben notwendig in demselben Punkte von *at*, nämlich in *t*

1) Da nämlich *ao* den Winkel *bat* halbiert, hat man die Proportion: $ab : at = bo : to$ und hieraus $ab + at : bo + to = at : to$, oder $ab + at : tb = at : to = au : bu$, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke *aot* und *abu*. Für *u* haben die Berliner Mss. das arabische *j*.

2) Dies ist in der lateinischen Übersetzung bewiesen: p. 131 (27), Z. 22—30.

schneiden, und es wird $ht = kt$ sein; oder anders: wir errichten nur die Senkrechte ht, verbinden dann t mit k, und zeigen, dafs kt auch senkrecht [auf ak] stehe: es ist nämlich $ak = ah$, at gemeinschaftlich, und W. hat = W. kat.[1]) Wir ziehen noch bt und gt, schneiden $bl = bh$ von bg ab, und ziehen tl, so ist dieses senkrecht auf bg, denn $bt^2 - gt^2 = bh^2 - gk^2$, aber $bh = bl$ und $gk = gl$, also auch $bt^2 - gt^2 = bl^2 - gl^2$, hieraus folgt, dafs tl senkrecht auf bg steht, es ist aber auch $= ht$, weil $bh = bl$, und bt gemeinschaftlich, und die W. h und l Rechte sind; also sind auch die W. lbt und hbt unter sich gleich. Wir ziehen eb, so sind auch die W. zbe und dbe unter sich gleich, und weil die W. lbh und lth zusammen 2 Rechte sind, ist W. zbd = W. lth, also auch ihre Hälften, d. h. W. ebd = W. bth; ferner sind die W. bde und bht Rechte, also die beiden Dreiecke bde und bht ähnlich, also hat man: $ed:db = bh:ht$; es ist aber $db = bz$ und $bh = gz$, also ist auch $ed:bz = gz:ht$, mithin $ed \cdot ht = bz \cdot gz$. Es ist aber auch $ed^2 : ed \cdot ht$ [2]) $= ed:ht$, d. h. $= ad:ah$, also hat man auch: $ed^2 : bz \cdot gz = ad:ah$, folglich ist $ed^2 \cdot ah = bz \cdot gz \cdot ad$; multiplizieren wir beide [Seiten] mit ah, so erhalten wir: $ed^2 \cdot ah^2 = bz \cdot gz \cdot ad \cdot ah$. Nun ist aber $ed \cdot ah$ die Fläche des Dreiecks, also ist $ed^2 \cdot ah^2$ das Quadrat der Dreiecksfläche, mithin ist das Quadrat der Dreiecksfläche gleich dem Produkt $bz \cdot gz \cdot ad \cdot ah$, d. h. gleich dem Produkt der drei Überschüsse in die halbe Summe der drei Seiten, und das ist, was wir beweisen wollten."[3])

„Noch eine andere Art [des Beweises]: Nachdem feststeht, dafs $ed:db = bh:ht$, so ist, wenn wir die zweite Gröfse als vermittelnde zwischen der ersten und vierten annehmen[4]), das Verhältnis der ersten zur vierten Gröfse zusammengesetzt (d. h. das Produkt) aus dem Verhältnis der ersten zur zweiten Gröfse und demjenigen der zweiten zur vierten Gröfse, oder auch der ersten zur dritten; also [folgt aus obiger Proportion]: $ed:ht = (ed:db) \cdot (ed:bh)$; es ist aber $db = bz$ und $bh = gz$, also hat man auch: $ed : ht$ oder $ad : ah = (ed : bz) \cdot (ed : gz) = [ed^2 : bz \cdot gz]$; mithin ist $ad \cdot bz \cdot gz = ed^2 \cdot ah$; nun wird der Beweis vervollständigt wie oben."[5])

1) Die Darstellung, wie sie hier mit den Worten *„Hierauf verlängern wir ae bis t, etc."* gegeben wird, weicht etwas von derjenigen des lateinischen Textes ab.

2) Im arabischen Text steht hier unrichtig oder vielmehr anticipando $bz \cdot gz$.

3) Was hier in die wenigen Worte: *„multiplizieren wir beide . . ."* bis zum Schlufs zusammengefafst ist, umfafst im lateinischen Text Zeile 1—17 von p. 133 (29); man bemerkt hierin wohl deutlich die kürzende Hand eines verständigen Redaktors.

4) Man könnte nämlich auch die dritte Gröfse als vermittelnde zwischen der ersten und vierten annehmen, d. h. das Verhältnis der ersten Gröfse zur vierten ist auch gleich dem Produkt aus dem Verhältnis der ersten zur dritten Gröfse und demjenigen der dritten zur vierten Gröfse, oder auch der ersten zur zweiten.

5) Auch hier sehen wir wieder eine starke Abkürzung des lateinischen Textes.

XV. *„In jeder Kugel ist das Produkt aus dem Halbmesser in den dritten Teil ihrer Oberfläche gleich ihrem Inhalt."*

Da der Beweis in der lateinischen Übersetzung nicht ganz korrekt ist (in den Zeilen 28—30, p. 149 (45) fehlt ein Zwischenglied), gebe ich denselben vollständig nach dem arabischen Text.

„Es sei (Fig. 3[1])) *abgd* die Kugel und ihr Halbmesser *sb*; wäre nun das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche der Kugel *abgd* nicht ihr Inhalt, [so müfste es entweder kleiner oder gröfser als derselbe sein]; es sei zuerst kleiner als ihr Inhalt, sodafs also das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche einer Kugel, die gröfser ist als die Kugel *abgd*, gleich ihrem Inhalt sei, diese Kugel sei z. B. *wzlm* und sie sei konzentrisch mit *abgd*; wir beschreiben nun um die Kugel *abgd* einen Körper, wie wir ihn [oben] geschildert haben, welcher die Kugel *wzlm* nicht berühre, so mufs notwendig nach dem was vorangegangen ist, das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche dieses Körpers gleich dem Inhalt des Körpers sein, dieser ist aber gröfser als der Inhalt der Kugel *abgd*, hieraus folgt, dafs der dritte Teil der Oberfläche jenes Körpers gröfser sein müfste als der dritte Teil der Oberfläche der ihn umgebenden Kugel *wzlm*, dies ist ein Widerspruch. — Es sei zweitens das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche der Kugel *abgd* gröfser als ihr Inhalt, sodafs also das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche einer Kugel, die kleiner ist als die Kugel *abgd*, z. B. der Kugel *ehtk*, gleich dem Inhalt der Kugel *abgd* sei. Wir beschreiben nun in die Kugel *abgd* einen Körper, wie wir ihn geschildert haben, der die Kugel *ehtk* nicht berühre, so mufs notwendig nach dem was vorangegangen ist, das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche dieses Körpers kleiner sein als der Inhalt der Kugel *abgd*[2]), also der dritte Teil

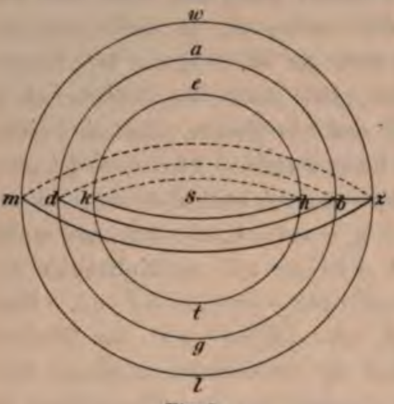


Fig. 3.

1) Ich gebe die Figur, die im arabischen Text schlecht gezeichnet ist, wie sie M. CURTZE in seiner Ausgabe gezeichnet hat, nur in den Buchstaben bin ich dem arabischen Text gefolgt, die Reihenfolge derselben ist übrigens nur wenig von derjenigen der Übersetzung verschieden; statt des arabischen *w* setzt GERHARD meistens *n*.

2) Hier ist ebenfalls ein Zwischenglied weggelassen, es sollte nun folgen: nun ist aber das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche der Kugel *ehtk* nach Voraussetzung gleich dem Inhalt der Kugel *abgd*.

der Oberfläche der Kugel *ehtk* gröfser als der dritte Teil der Oberfläche des sie umgebenden Körpers, dies ist ein Widerspruch, also steht die Behauptung fest, und das ist was wir [beweisen] wollten."

XVI. „*Wir wollen zwei Gröfsen zwischen zwei gegebenen Gröfsen liegend aufsuchen, sodafs die vier nach einem und demselben Verhältnis auf einander folgen. Das Verständnis dieser Aufgabe ist für den die Geometrie Studierenden nützlich*[1]; *durch sie wird auch die Seite eines Würfels (d. h. die Kubikwurzel aus einer Zahl) gefunden, indem, wenn wir zwei mittlere Proportionalen zwischen 1 und dem Würfel (der Kubikzahl) gefunden haben, die auf 1 folgende Zahl die Seite des Würfels ist. Dieses (d. h. das folgende) Verfahren stammt von einem Manne der alten Zeit* (wörtl. „*von einem Manne der Alten*"), *mit Namen* MENELAUS, *er veröffentlichte* (wörtl. „*brachte*") *dasselbe in einem Buche von ihm über die Geometrie.*"

Ich lasse die Übersetzung der ersten Lösung, die wir nach EUTOKIUS dem ARCHYTAS zuschreiben, weg, und gebe nur diejenige, die nach demselben Autor dem PLATO zugeschrieben wird.[2])

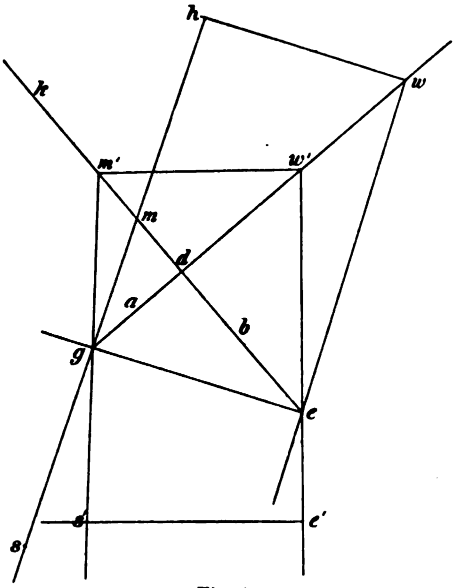


Fig. 4.

„Da nun das von MENELAUS angewandte Verfahren (wörtl. „die Dinge"), wenn es auch richtig ist, doch soviel als unmöglich, oder doch sehr schwer auszuführen ist, so haben wir dafür einen leichteren Weg gesucht. Es seien (Fig. 4) die beiden [gegebenen] Gröfsen a und b[3]); wir ziehen $gd = a$, und auf sie die Senkrechte $de = b$, verbinden e mit g, verlängern gd und ed unbestimmt, ziehen von e aus eine Senkrechte[4]) auf eg, welche gd (d. h. ihre Verlängerung) im Punkte w trifft; ferner von g aus eine Parallele zu ew, die ed (d. h. ihre Verlängerung) im Punkte m trifft, sie sei gm, und verlängern sie [nach rückwärts], bis $ms = ew$ wird. Wir

1) Siehe die Note auf p. 150 (46) von CURTZES Ausgabe.

2) Diese zweite Lösung ist nicht nummeriert im Ms. Mq. 559, das Ms. Mf. 258 unterscheidet die einzelnen Sätze gar nicht durch Nummern.

3) In der ersten Lösung sind diese beiden Gröfsen mit m und n bezeichnet.

4) Dafs diese Linie senkrecht auf eg stehen müsse, ist nicht nötig.

nehmen nun an, dafs die Linie ew aus ihrer jetzigen Lage sich gegen d hin bewege, sodafs der Punkt w stets auf wd bleibe, und die Linie stets durch den Punkt e gehe, damit, wenn die Linie ew sich so bewegt, wie wir beschrieben haben, dann dieselbe in jener Lage sich geradlinig erstrecke von ihrem Endpunkt [w] bis zum Punkt e hin(?). Hierauf verlängern wir die gegebene Strecke ed gegen k hin[1]), und nehmen an, die Linie ms bewege sich aus ihrer jetzigen Lage gegen k hin, sodafs der Punkt m immer auf mk bleibe und die Linie stets durch den Punkt g gehe, wie wir es bei der Bewegung der Linie ew angenommen haben; ferner nehmen wir an, dafs die beiden Linien ew und ms bei ihrer Bewegung parallel bleiben, und dafs im Endpunkt e der Linie ew eine Senkrechte auf dieselbe errichtet sei, die jener in ihrer Bewegung folge, aber keine bestimmte Länge habe, also bei ihrer Bewegung beständig die Linie ms schneide. Wenn nun also die beiden Linien ew und ms so bewegt werden, dafs sie sich stets parallel bleiben, und ihre Endpunkte immer auf den Linien wd und mk bleiben, wie wir es beschrieben haben, so mufs notwendig die auf ew errichtete Senkrechte, die sich mit ihr bewegt und beständig die Linie ms schneidet, [einmal] durch ihren Endpunkt $s(s')$ gehen[2]); wenn nun aber diese Senkrechte zum Punkte s' gelangt ist, so hören wir mit der Bewegung der Linien ew und ms auf und ziehen die Linien $e's'$ und $w'm'$; dann ist klar, dafs die Linie $e's'$ auf den beiden Linien $e'w'$ und $m's'$ senkrecht steht, denn sie wurde senkrecht auf ew und sich mit ihr bewegend vorausgesetzt, bis sie durch den Punkt s' gehen würde; ich sage nun, dafs die beiden Linien dm' und dw' zwischen den beiden Gröfsen gd und de so liegen, dafs $gd:dm' = dm':dw' = dw':de$. Beweis: Da die beiden Linien $e'w'$ und $m's'$ parallel und gleich lang sind und die W. $w'e's'$ und $m's'e'$ Rechte sind, so ist auch $w'm' = e's'$ und jeder der W. $e'w'm'$ und $s'm'w'$ ein Rechter; es ist aber auch md senkrecht auf wg und wd senkrecht auf me, also hat man: $gd : dm' = dm' : dw' = dw' : de$; gd ist aber gleich der Gröfse a und de gleich der Gröfse b, also sind dm' und dw' in der That zwei mittlere Proportionale zwischen a und b, was wir [finden] wollten."[3])

---

1) Dies ist oben schon gesagt worden, allerdings ohne Nennung des Punktes k, der übrigens unbestimmt ist.

2) Die Figur ist in den arabischen Mss. schlecht gezeichnet, ich habe sie dem Texte entsprechend ausgeführt, mit Ausnahme der Bezeichnungen $m's'$ und $w'e'$ für die zweite Stellung der Geraden ms und we, die in den arabischen Mss. nicht von der ersten unterschieden ist.

3) Man vergleiche mit dieser Lösung diejenige in dem Artikel von J. L. Heiberg, betitelt: *Kleine Anecdota zur byzantinischen Mathematik* (Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abt. 161—163).

Es folgt nun im arabischen Text die Beschreibung einer mechanischen Ausführung dieser Konstruktion, welche in der lateinischen Übersetzung fehlt; ob diese in der Originalabhandlung der Benî Mûsâ schon gestanden habe und vom Übersetzer weggelassen worden sei, oder von einem spätern Redaktor der Abhandlung (Naṣîr ed-dîn) hinzugefügt worden sei, ist schwer zu entscheiden. Solche Zusätze beginnen übrigens gewöhnlich mit den Worten: *„Es sagt N. N"*, oder *„ich sage"*, wie wir es oben am Schlusse von Nr. III gesehen haben; hier steht nichts derartiges, die Beschreibung schliefst unmittelbar an das vorhergehende an mit den Worten: *„Damit nun aber die thatsächliche Ausführung der Lösung erleichtert werde"*, etc.

Die Beschreibung dieser mechanischen Konstruktion war nicht gerade leicht zu übersetzen, zumal auch die Abschreiber (besonders derjenige des Ms. Mf. 258) dieser Stelle keine genügende Sorgfalt gewidmet zu haben scheinen, sie weist mehr Fehler und unlesbare Wörter auf als der übrige Teil der Abhandlung; ich will aber doch versuchen, indem ich mir hier und da eine etwas freiere Übersetzung erlaube, dem Leser das mechanische Verfahren einigermafsen verständlich zu machen.

„Damit nun aber die thatsächliche Ausführung der Lösung erleichtert werde (wörtl. „leicht sei"), setzen wir an Stelle der Linie ew, die auf eg senkrecht steht, ein Lineal, ebenso an Stelle von eg ein solches, das wir mit dem Lineal ew durch eine Axe (Gelenk, Pol) verbinden, welche im Punkte e fest bleibt, um die sich aber das Lineal ew drehen kann; verlängern wir nun die Linie gm, die senkrecht zu eg steht, bis h, und machen $gh = ew$, und setzen an die Stelle von gh ein Lineal, das wir mit dem Lineal eg so verbinden, dafs der feste Drehpunkt (Axe) im Punkt g sei, um den sich also das Lineal gh drehen kann, während das Lineal eg fest bleibt; so können also die beiden Lineale ew und gh sich um die Axen e und g drehen. Legen wir ferner zwischen die beiden Punkte w und h hinein ebenfalls ein Lineal, und verbinden es mit den beiden Linealen ew und gh durch Axen (Gelenke) in den Punkten w und h, welche beide (Axen) aber nicht fest auf ihren Linealen sind, sondern verschiebbar, sodafs sich also die drei Lineale ew, gh und wh um das feste Lineal eg in den Punkten e und g drehen können. Nun setzen wir in der Oberfläche des Lineals ew ein dünnes Holzstäbchen ein, das in einer in jener Oberfläche sich befindenden Rinne läuft (verschiebbar ist), und machen seine Länge gleich derjenigen des Lineals ew, und machen am Ende w dieses Holzstäbchens einen Drehpunkt (Axe), dessen Zentrum der Punkt w sei. Dann errichten wir auf beiden Seiten von wd zwei zu wd parallele Ebenen, und bringen sie so nahe zusammen, dafs die Axe (das Gelenk), die sich an diesem Holzstäbchen befindet, beide Ebenen berührt,

so wird, wenn die drei [beweglichen] Seiten des Vierecks *eh* um die feste Seite *eg* gedreht werden, diese Axe zwischen den beiden Ebenen bleiben, und das Zentrum derselben wird auf der Linie *wd* bleiben, und das [andere] Ende des Holzstäbchens wird sich vom Punkte *e* ausgehend immer weiter von diesem [nach rückwärts] entfernen auf der Verlängerung der Linie *we*. Ferner setzen wir in der Oberfläche des Lineals *gh* ein anderes Holzstäbchen ein, das sich in einer daselbst angebrachten Rinne verschieben kann, und das seinen Anfang im Punkte *m* und sein Ende im Punkte *s* habe, damit die Länge dieses Holzstäbchens gleich der Länge des auf dem Lineal *ew* eingefügten sei; am Ende *m* dieses Holzstäbchens bringen wir eine Axe an, und verfahren weiter, wie wir oben geschildert haben, so wird, wenn die drei [beweglichen] Seiten des Vierecks *eh* um die feste Seite *eg* gedreht werden, sich der Mittelpunkt dieser Axe auf der Linie *mk* bewegen und sich dem Punkte *k* nähern. Hierauf befestigen wir auf dem Holzstäbchen, welches auf dem Lineal *ew* eingefügt ist, an seinem Ende *e* ein weiteres Holzstäbchen unter rechtem Winkel zu ihm, welches sich mit ihm bewege, und bis zum Holzstäbchen auf dem Lineal *ms* reiche, ja dasselbe kreuze, damit, wenn die drei Seiten des Vierecks *eh* um die feste Seite *eg* gedreht werden, dieses transversale Holzstäbchen notwendig das Holzstäbchen, das auf dem Lineal *ms* eingefügt ist, in seinem Ende [*s'*] treffen mufs. Aus dem Beweise[1]), den wir oben von dieser Konstruktion gegeben haben, ist nun klar, dafs, wenn die Lineale und die Holzstäbchen, die auf ihnen laufen, an derjenigen Stelle angehalten werden in ihrer Bewegung, zu welcher das transversale Holzstäbchen gelangt ist, nämlich ans Ende [*s'*] des Holzstäbchens auf dem Lineal *ms* (oder *m's'*), dann erreicht ist, was wir auszuführen beabsichtigt haben."

Aus dieser nicht ganz klaren Darstellung kann man immerhin soviel erkennen, dafs das mechanische Verfahren von demjenigen, das dem PLATO zugeschrieben wird, doch wesentlich verschieden ist.

XVIII. „*Es sei durch ein ähnliches Verfahren*[2]) *ein beliebiger Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.*"

Die lateinische Übersetzung stimmt fast wörtlich mit dem arabischen Text überein, weshalb wir von einer deutschen Übersetzung absehen; auch die Buchstaben der Figur der Übersetzung entsprechen den arabischen, nur ist das arabische '*ain* durch *q* wiedergegeben, statt wie gewöhnlich durch *o*; die in der Übersetzung gezeichnete Kurve fehlt in der Figur des arabischen Textes.

---

1) Besser wäre: „aus der Darstellung".

2) Wörtlich: „*durch diesen Kunstgriff*", d. h. die bewegliche oder instrumentale Geometrie.

Nun folgt der Schluſs der Abhandlung, der im arabischen Text der Berliner Mss. keine Nummer trägt, er lautet:

„Es bleibt uns noch übrig, die angenäherte Bestimmung der Seite des Würfels (d. i. der Kubikwurzel) darzulegen, damit nach Bedürfnis mit derselben gerechnet werden kann. Wir verfahren dabei auf diejenige Art, die uns die vollkommenste Annäherung erreichen läſst; soll z. B. der Fehler kleiner als eine Minute oder eine Sekunde sein, so verfahren wir so, daſs wir die Kubikzahl in Bruchteile verwandeln, nämlich in Tertien, oder Sexten oder Nonen[1]), etc.; hierauf suchen wir die Kubikzahl, die dieser gleich ist, wenn es eine solche giebt; wenn nicht, so nehmen wir die nächstgelegene Kubikzahl und merken uns ihre Seite (Wurzel); waren nun die Bruchteile Tertien, so stellt die Wurzel Minuten dar, waren die Bruchteile Sexten, so stellt die Wurzel Sekunden dar, u. s. w. Auf diese Art wird bei solchen Aufgaben verfahren.“[2])

„Was wir in unserm Buche auseinandergesetzt haben, ist alles unsere Arbeit, auſser der Berechnung des Kreisumfanges aus dem Durchmesser, welche von ARCHIMEDES herrührt, und der Konstruktion zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebenen Gröſsen, die von MENELAUS stammt, wie wir schon erwähnt haben. Beendigt ist das Buch.“

Die Vergleichung mit der lateinischen Übersetzung zeigt, daſs dieser Schluſs die stärkste Kürzung erfahren hat; wir ersehen aus demselben auch, daſs Herr CURTZE unrichtig konjiziert hat, wenn er (p. 158 (54), Z. 20) *iuuamentum in aliis* durch *innitamentum · Milei* ersetzt hat, denn der kürzende Redaktor hätte gewiſs eine Stelle nicht weggelassen, welche einem MENELAUS einen wichtigen mathematischen Satz zugeschrieben hätte.[3])

Die arabischen Mss. haben nun sämtlich noch einen Zusatz, der jedenfalls nicht von den Söhnen MÛSÂS ist, sondern sehr wahrscheinlich von NAṢÎR ED-DÎN hinzugefügt worden ist; er enthält die HERONsche Ableitung der Dreiecksfläche aus den drei Seiten, mit genau derselben Figur und den entsprechenden Buchstaben, wie sie in der *Dioptra* des genannten Mathematikers sich vorfindet. Nach der Anrufung Gottes[4]) folgen die Worte:

„Ein anderer Beweis des 7. Satzes des Buches der Söhne MÛSÂS, es ist dies der gewöhnliche (allgemeine)[5]) Weg für die Berechnung der Dreiecke, und stammt, wie ich vermute, von EL-CHÂZIN her.“

1) D. h. die Kubikzahl wird mit 60^3, 60^6, 60^9, etc. multipliziert.

2) CARRA DE VAUX hat diese Stelle über die Kubikwurzelausziehung in französischer Übersetzung veröffentlicht in der Biblioth. Mathem. 12_2, 1898, p. 1—2.

3) Vgl. auch A. A. BJÖRNBO: *Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert*; Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 64.

4) Diese hat nur das Ms. Mf. 258 (Berlin).

5) Das Berliner Ms. Mq. 559 hat hier *el-ʿâlim* = der gelehrte, theoretische, anstatt *el-ʿâmm*.

Der letztere Name findet sich nicht genau so vor in den Mss., sondern in Mf. 258 steht EL-ḤÂRN, in Mq. 559 EL-ḤÂZN; da EL-CHÂZIN diesen Formen am nächsten kommt, so habe ich diesen Namen gewählt, der also auf ABÛ ǴA'FAR EL-CHÂZIN (den Bibliothekar) hindeuten würde. Es ist aber keineswegs unwahrscheinlich, dafs diese Schreibweise durch die Schuld kenntnisloser Abschreiber aus der ursprünglichen Form HERON entstanden ist. — Am Rande von Ms. Mq. 559 steht, wahrscheinlich von der Hand des Abschreibers: „Meiner Ansicht nach (?) rührt diese Form des Beweises von dem sehr gelehrten ŠIRÂZÎ her.“ Welcher ŠIRÂZÎ hier gemeint sei, können wir nicht sagen.[1])

Zum Schlusse noch eine Bemerkung zu einer Stelle der CURTZEschen Ausgabe. In der Einleitung spricht Herr CURTZE die Vermutung aus, die Berechnung des Verhältnisses des Kreisumfanges zum Durchmesser, wie sie die Söhne MÛSÂS geben, möchte wohl die ursprüngliche Form der ARCHIMEDischen Kreisrechnung sei. Dies ist nun aber, wie man wohl mit Sicherheit behaupten kann, nicht der Fall; die ARCHIMEDische Kreisrechnung wurde ins Arabische übersetzt (wahrscheinlich von ṮÂBIT B. QORRA, oder dann von ISḤÂQ B. ḤONEIN), dann von NAṢÎR ED-DÎN neu redigiert; diese Übersetzung[2]) stimmt mit Ausnahme der Anordnung der Sätze und einer etwas breitern Darstellung mit dem griechischen Original so ziemlich überein, unterscheidet sich aber doch erheblich von der Darstellung der Söhne MÛSÂS. Allerdings schliefst sich diese, wenigstens in demjenigen Teile, der das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser giebt, eng an die ARCHIMEDische Darstellung an, vielleicht mit Benutzung des Kommentars des EUTOKIUS, obgleich hierzu zu bemerken ist, dafs keine arabische Quelle uns verrät, dafs dieser Kommentar den Arabern bekannt gewesen sei; allein eine blofse Wiedergabe der ursprünglichen Form der ARCHIMEDischen Kreisrechnung ist sie nicht, haben sich doch die Söhne MÛSÂS, wie ja Herr CURTZE selbst anerkennt, in allen Sätzen ihrer Abhandlung eifrig bestrebt, durch abweichende Beweisführung und Wahl anderer Buchstaben von ihren griechischen Mustern sich soweit als möglich zu entfernen; allerdings ist ihnen dies bei der Kreisrechnung am wenigsten gelungen.

1) Vergl. H. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*; Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **10**, 1900, p. 125, 158, 189.

2) Vergl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{12}_2$, 1898, p. 75.

The values of π used by the Japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries.

By T. HAYASHI in Tōkyō.

Japan had her own mathematics in ancient times, but lost it, because the Chinese mathematics was imported frequently during the long interval from the sixth century till the beginning of the seventeenth century. But since that time, the Chinese mathematics became the source of many original investigations, and the so called „Wa-san“ or Japanese mathematics was founded firmly. So in a very early period, the Japanese used $\pi = 3$ like the Chinese according to *Chow-pai-swan-king* and *Kiu-chang-swan-shu* written by CHOW-KUNG in the Chow dynasty (792—250 B. C.).

In 1627, MITSUYOSHI YOSHIDA, a celebrated Japanese mathematician, published a book called *Jinkōki*. This is the second of the mathematical books in Japan (the first being *Kijoransho*, 2 vol., written by SHIGEYOSHI MŌRI in about 1600, which was not handed down to us), and is so famous that the Japanese call the book to mind when they tell about the „Wa-san“. In this book, the value of π is 3,16.

In the third mathematical book called *Jugairoku* written by CHISHŌ IMAMURA in 1639, it is 3,162.

Although these two values are very inexact, they have been adopted in several works published until about 1660.

In 1664, the value 3,14 is adopted in *Dōkaishō* by MOTONAGA NOZAWA. SHIGEKIYO MATSUMURA also used this value 3,14 for π in his *Sanso*, 1663. But he obtained a more exact value of π by calculating the length of one side of a regular polygon inscribed in a circle, the number of whose sides is 32768 or 2^{15}. He found the value 3,1415926487776988069248, which is correct to the 7th place of decimals. However he did not use this exact value, but used always 3,14. Compared with the results of VIÈTE, VAN ROOMEN and VAN CEULEN, who found the values to the 10th, 15th and 35th places in 1579, 1593, and 1596 respectively, MATSUMURA's result is inferior in exactness, but his work must be regarded as very excellent to obtain so exact a value in so early a period in Japan.

In *Kongenki*, 1666, by M. SATŌ, we find 3,142. In *Ketsugishō*, wi
head notes written by YOSHINORI ISOMURA in 1684, a more exact val
3,1416 is used.

KŌWA SEKI (lived from 1642 till 1708), who was so distinguish
in his original inventive power that he is regarded as the founder of t
„Wa-san" or Japanese mathematics (though there were many mathema
cians previously), shows a very exact value of π in his manuscript *Tai-*
sankyo, which is correct to the 24th place of decimals.

YOSHIMASA OHTA, a pupil of MURAHIDE ARAKI, who was the b
disciple and first successor of SEKI, wrote *Kwatsuyosanpō* in 1709, a
used the value of π correct to the eleventh place of decimals.

In 1722, KATAHIRO TAKEBE (his two elder brothers were also em
nent mathematicians) gives the value correct to the 41st place of dec
mals in his manuscript *Fukyutetsujutsu*.

Lastly YOSHIHIDE MATSUNAGA finds out the value correct to th
50th place in his *Hōensankyō* written in 1739. This is the most exa
value found by the old Japanese mathematicians, and it seems as if the
was no mathematician thereafter who obtained a more exact value.

Methods by which such exact values were calculated will be seen
Prof. D. KIKUCHI's papers, published in the Tokyo Sugaku-Butsurig
kukwai Kiji, 7, 1896, p. 24—26, 47—53, 105—110, 114—117 a
8, 1900, p. 179—198. There we shall also find various series for π a
π^2 obtained by the old Japanese mathematicians.

Next I will describe the fractional values of π used by the old Jap
nese mathematicians. Before the SEKI school prospered, $\frac{79}{25}$ which is equ
to 3,16 was used. In *Kwatsuyosanpo* written by Y. OHTA in 1709,
find the value $\frac{355}{113}$. As already said, OHTA was a pupil of M. ARA
who was the best disciple of SEKI. So it will be fair to say that SE
adopted this value for the first time. The Japanese used a curious m
thod to find this value. The following series was constructed:

$$\frac{3^*}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{25}{8}, \frac{28^*}{9}, \frac{32}{10}, \frac{35}{11}, \frac{38}{12}, \frac{41}{13}, \ldots$$

$$\frac{47^*}{15}, \frac{51}{16}, \frac{54}{17}, \frac{57}{18}, \frac{60}{19}, \frac{63}{20}, \frac{66}{21}, \frac{69^*}{22}, \frac{73}{23}, \frac{76}{24}, \frac{79}{25}, \ldots\ldots\ldots$$

This series consists of fractions obtained by adding 4 and 1 to t
numerator and denominator of the preceding, when this is less than
or by adding 3 and 1 to the numerator and denominator of the pre
ding when this is greater than π. In the above, those which are le
than π are marked with asterisks. The value $\frac{355}{113}$ was then found as t
113th term of this series.

It is strange that several values of π, which were used by the Chinese, occur in this series. The 7th term $\frac{22}{7}$ which is the ARCHIMEDian value, is the „inaccurate value“ of TSU-CHUNG-CHI of the Sung dynasty. The 8th term $\frac{25}{8}$ which agrees with the value attributed ordinarily to VITRUVIUS (see Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 299), was used by another Chinese mathematician (I do not know his name and when he lived). The 20th term $\frac{63}{20}$ is the value of TUNG-LENG and the 25th term $\frac{79}{25}$ is that used by the Japanese before SEKI, as I have already mentioned. The 45th term $\frac{142}{45}$ is due to LUH-TSIH, and the 50th term $\frac{157}{50}$ to LEW-HWEI, of the Tsin dynasty. But it is curious that there was none who noticed the 36th term $\frac{113}{36} = 3{,}14166\ldots\ldots$ which is more exact. The value $\frac{355}{113}$ is also said to be the „accurate value“ of TSU-CHUNG-CHI.

In 1766, Y. ARIMA, a feudal chief, wrote a book called *Hōenkikō* which is the first publication of the „Ten-zan“ method invented by SEKI. In this book, he makes π equal to

$$\frac{5419351}{1725033},$$

which is accurate to the 12th place of decimals. Again in his book *Shūkisanpō*, published in the same year, he uses

$$\frac{428224593349304}{136308121570117},$$

which is accurate to the 30th place of decimals.

G. KURUSHIMA (died in 1760) shows us that the square of π is equal to

$$\frac{98548}{9985}.$$

Besides the above mentioned values, the Indian value $\sqrt{10}$ was once used. In fact Y. ANDŌ uses this value instead of 3,16 in his *Jugairoku-kanasho*, published in 1660.

lui fournit l'occasion d'organiser à Saïgon la première exposition agricole et industrielle. Il entra ensuite au Conseil des travaux de la marine; il fut promu contre-amiral le 17 décembre 1874 et vice-amiral le 1er octobre 1879; il fut tour à tour directeur de l'école des torpilles à Boyardville, préfet maritime à Rochefort, directeur de la Commission permanente de défense maritime, chef du service hydrographique de la France, etc. En 1885 il prit sa retraite. La brillante et utile carrière qu'il fit comme marin et ses travaux mathématiques — auxquels il ne manquait de revenir, dès que le lui permettaient ses occupations professionnelles, car la géométrie a pour coutume de ne pas laisser en paix ceux dont elle a pris possession une fois — lui valurent la place d'*académicien libre*[1]), que l'Institut de France lui décerna le 24 mars 1884[2]); cette élection bien méritée est liée à deux publications de notre savant, c'est-à-dire, à une exposition détaillée de toute sa carrière[3]) et à l'éloge de son prédécesseur.[4])

De Jonquières, auquel de bonnes traductions des *Epîtres d'Horace*[5]) assurent une place dans l'histoire littéraire de la France, s'est éteint paisiblement le 12 Août 1901. Son activité scientifique embrasse à peu près quarante ans et a donné comme résultat un brillant recueil d'environ 150 mémoires mathématiques[6]); elle présente un *maximum* d'intensité pendant

---

1) Comptes rendus Paris **98**, 1884, p. 703, 713.

2) Depuis plus de vingt ans il avait été plusieurs fois proposé comme *correspondant*; en 1863, à la suite du décès de Steiner, mais on lui préféra Sylvester (Comptes rendus Paris **57**, 1863, p. 918 et 945); en 1866 comme successeur de Hamilton, mais l'Académie choisit Riemann (id. **64**, 1866, p. 652 et 674); en 1867, à la suite de la promotion de Kummer comme associé étranger, mais Weierstrass eut la place (id. **67**, 1867, p. 1201 et 1213); enfin dans la même année il fut candidat à la succession de Plücker, mais Kronecker l'emporta (id. ib. p. 1267 et 1285). Remarquons encore qu'en 1884 il fut en compétition comme successeur de La Gournerie dans la place d'académicien libre, mais on donnait la préférence à M. Haton de la Goupillière (id. **98**, 1884, p. 119 et 131).

3) *Notice sur la carrière maritime, administrative et scientifique du Vice-Amiral de Jonquières, Grand officier de la Légion d'honneur, Directeur général du Dépôt des cartes et plans de la Marine, Vice-Président de la Commission des phares, Membre de la Commission de l'Observatoire.* Paris 1883, 28 pages in-4°.

4) *Notice sur la vie et les travaux de Louis François-Clément Bréguet* (Comptes rendus Paris **103**, 1886, p. 5—14; voir aussi Revue maritime et coloniale, Septembre 1886).

5) De cette traduction (publiée à Orléans, chez Herluison en 1879) quelques-uns de nos lecteurs auront connaissance parce que M. Brocard en a tiré les vers qui servent d'épigraphe à ses *Remarques sur l'analyse indéterminée du premier degré* (Mém. de l'académie de Montpellier **9**, 1879, p. 139—234).

6) Comp. l'*Elenco delle pubblicazioni matematiche di Ernesto de Jonquières* que nous venons de publier dans le Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche **5**, 1902, p. 72—82.

les années 1856—1866 et un *minimum* pendant les dix-années suivantes; elle se manifeste à son début par des travaux de géométrie pure et finit par des recherches d'arithmétique, en donnant plusieurs fois des résultats qu'intéressent la mécanique appliquée et que nous sommes forçés d'exclure de notre examen.

En raison des sujets qu'ils traitent, les travaux que nous allons analyser se subdivisent naturellement en plusieurs groupes. Un certain nombre se rapportent à la géométrie supérieure, au sens de CHASLES (voir ci-après, §§ I et II); il y en a d'autres (§§ III et IV) qui représentent des contributions à la théorie des courbes planes algébriques et des systèmes qu'elles forment; ils sont liés très étroitement à ceux, non moins importants, relatifs aux courbes gauches algébriques et aux surfaces (§ V). Une section plus courte (voir § VI) de l'œuvre mathématique de DE JONQUIÈRES est formée par des investigations, partiellement critiques et historiques, sur les transformations géométriques et les polyèdres eulériens. Enfin la dernière (§ VII) est remplie par ses études sur la théorie des équations et la théorie des nombres. Tel est, en quelques lignes, le catalogue des richesses que nous allons exposer en détail.

I.

Applications de la «Géométrie supérieure» à des question élémentaires.

1. La jeunesse de DE JONQUIÈRES tombe dans la période dans laquelle CHASLES avait ramassé et saisi le sceptre de la géométrie pure que PONCELET avait abandonné dans un moment de suprême et regrettable découragement. C'est l'époque où le célèbre auteur de l'*Aperçu historique* prenait possession de la chaire de géométrie supérieure fondée en 1846 exprès pour lui; où il publiait sur cette matière son *Traité*, qui devait être en France, pendant plusieurs dizaines d'années, l'EUCLIDE des nouveaux temps; où il élaborait lentement son *Traité des sections coniques*; où enfin, dans ses cours à la Sorbonne, il montrait, par une infinité d'exemples brillants, l'inépuisable fécondité des idées dont il était en partie le créateur, en partie l'apôtre le plus convaincu. DE JONQUIÈRES, qui eut l'occassion de vivre à plusieurs reprises à Paris pendant cette période de renaissance de la géométrie, subit l'influence du milieu; impressionné vivement et profondément par les théories, dont les échos retentissants arrivaient jusqu'à lui, son imagination géométrique se développa d'une manière étonnante et il ne tarda pas à devenir l'admirateur le plus chaud[1]), l'élève le plus éminent et le commentateur le plus original

1) Comme pièces justificatives de cette admiration on peut citer les articles bibliographiques que DE JONQUIÈRES écrivit sur *Les trois livres des porismes d'EUCLIDE*

de CHASLES: *élève*, non dans le sens scolastique de ce mot, car il ne put jamais suivre régulièrement les cours de la Sorbonne[1]), mais élève dans le même sens auquel on dit que les grands esprits ont des élèves en tous les temps et dans tous les pays; *commentateur*, non dans l'acception la plus étroite de ce mot, mais en homme qui marche sur la route que son auteur a frayée, en la rendant plus facile et aisée, plus droite, plus longue et plus large.

C'est particulièrement dans ses plus anciens mémoires mathématiques que cette liaison entre DE JONQUIÈRES et CHASLES est plus évidente et plus étroite; car en grande partie ils ont pour but la démonstration de théorèmes ou la solution de problèmes, que ce dernier avait énoncés, ou bien l'application des principes de la *Géométrie supérieure* à des questions élémentaires sur les courbes du 2^e ou du 3^e ordre ou sur l'homographie. Il est nécessaire d'entrer à ce sujet en quelques détails, en examinant séparément les mémoires dont il s'agit.

2. Un de ces mémoires[2]) se rapporte à la construction, que CHASLES avait demandée, de la conique qui coupe harmoniquement cinq segments donnés. DE JONQUIÈRES y parvient par un procédé particulier de déduction, qui permet de décrire la conique qui passe par n (< 5) points et coupe harmoniquement $5 - n$ segments lorsqu'on sait résoudre le même problème pour $n + 1$ points et $4 - n$ segments. Le problème dont il s'agit est assez important et la solution proposée par notre auteur est assez simple pour obtenir une place dans toute exposition élémentaire de la théorie des sections coniques.

Une question analogue a pour objet la construction d'une courbe du 2^e degré déterminée par un foyer et trois points. Un mathématicien désormais oublié, NICOLLIC[3]), donna vers la moitié du XVIII^e siècle un théorème (assez compliqué) qui permet de trouver la direction de l'axe de la courbe cherchée[4]); ce théorème, dont HOUSEL un siècle après découvrit une dé-

(Bulletin d'histoire etc. qui fait suite au T. 20, 1861, des Nouv. ann. de mathém. p. 1—11) et sur le *Traité des Sections coniques de M. Chasles* (Nouv. ann. de mathém. 4_2, 1865, p. 373—381; article daté de Saïgon [Cochinchine], 14 Mai 1865).

1) Voir *Lettre à M. Chasles sur une question en litige* (Paris 1867), page 11, note (**).

2) *Solution de la Question 303 (voir p. 117)* (Nouv. ann. de mathém. 14, 1855, p. 435—440). La question dont il s'agit porte en effet le n° 298.

3) Voyez une note de M. BROCARD dans L'intermédiaire des mathématiciens 9, 1902, p. 127.

4) *Mémoire sur la détermination des orbites planétaires, où l'on démontre quelques nouvelles propriétés des sections coniques.* Mém. de l'académie des sciences de Paris 1746, p. 291—318). Comparez une lettre de PROUHET *Sur le problème de Halley* (Nouv. ann. de mathém. 14, 1855, p. 263—264).

monstration analytique[1]), peut aussi se tirer des principes de la géométrie moderne; c'est ce que prouva DE JONQUIÈRES[2]), sans manquer d'ajouter la remarque très-juste que pour construire la conique satisfaisant à la question, il n'y a rien de mieux que de se servir de l'homologie qui, d'après PONCELET, existe entre une courbe du 2e ordre et un cercle ayant comme centre un des foyers de la courbe.

Dans le même ordre d'idées est écrite une note ultérieure[3]), ayant pour but l'application des théorèmes de PASCAL, de BRIANCHON et de DESARGUES à la construction de la conique qui passe par n points et qui est tangente à $5 - n$ droites. Les solutions proposées par DE JONQUIÈRES sont au fond celles que tous nos élèves connaissent; mais il ne faut pas oublier qu'elles ont précédé le *Traité des sections coniques* de CHASLES et il est bon de remarquer que ce savant y est parvenu de son côté et les a accueillies dans cet ouvrage, sans même citer le premier qui les avait découvertes.

3. Le même silence fut tenu par CHASLES à propos des remarques[4]) que fit notre géomètre sur certaines propriétés de l'hyperbole et de la parabole et qu'on rencontre, sans aucune citation, dans le même *Traité* (p. 35 et 53).

En appliquant toujours les théories fondamentales de la *Géométrie supérieure*, DE JONQUIÈRES réussit aussi à prouver que «la tangente menée du centre d'une ellipse au cercle circonscrit à un triangle quelconque conjugué à cette ellipse, est égale à la corde du quadrant de l'ellipse»[5]), et, en se servant en outre du «principe de correspondance anharmonique», que venait d'énoncer CHASLES, il donna à la géométrie une contribution bien plus importante[6]), en démontrant les beaux théorèmes sur les coniques inscrites dans un quadrilatère que STEINER avait énoncés dans le

---

1) *Sur le problème de HALLEY* (Nouv. ann. de mathém. **14**, 1855, p. 425—433).

2) *Démonstration des théorèmes de NICOLLIC (voir pages 263 et 425)* (id. ib. p. 440—443).

3) *Applications diverses des théories de la géométrie supérieure. Construction des sections coniques déterminées par cinq conditions* (Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, p. 116—125). Voir aussi *Discussion d'un problème relatif à la construction des coniques* (id. **18**, 1859, p. 404—406).

4) *Sur les Nos 170 et 652 de la Géométrie supérieure* (id. **15**, 1856, p. 160—161).

5) *Solution de la Question 524* (*FAURE*) *(voir t. XIX, p. 234)* (Nouv. ann. de mathém **20**, 1861, p. 25—26).

6) *Démonstration de quelques théorèmes de M. STEINER (voir t. XIV, p. 141)* (id. ib. p. 94—98). *Démonstration géométrique des théorèmes de M. STEINER énoncés sous les nos 5, 6 et 7 (voir t. XIV, p. 141 et 142)* (id. ib. p. 190—196).

T. 44 du Journal für Mathematik.[1]) Ce travail de notre géomètre ne sera certainement pas oublié par celui qui comblera à l'avenir la regrettable lacune qui, dans la littérature mathématique, provient du manque d'une histoire des recherches faites pour prouver les nombreuses assertions répandues dans les oeuvres de STEINER.

Le mémoire que nous venons de signaler n'est pas le seul par lequel DE JONQUIÈRES ait pris place parmi les commentateurs du grand géomètre allemand, car, trois ans après avoir donné celui-là, il en composa un autre[2]), dont nous allons nous occuper. Son but est d'établir les propositions — qu'on lit dans la dernière section de la dernière publication de STEINER[3]) — qui expriment les valeurs des nombres $N(p, t, n)$ des sections coniques qui passent par p points et sont tangentes à t droites données et normales à n autres droites également données, où naturellement $p + t + n = 5$. En supposant déjà connues les valeurs de $N(p, t, n)$ lorsque $n = 0$, notre géomètre établit celles qui correspondent à l'hypothèse $n > 0$, par un tour de raisonnement que nous allons résumer: Soit a une des droites auxquelles une des coniques cherchées doit être normale et A le point à l'infini par lequel passent toutes les droites perpendiculaires à a. Toutes les coniques qui passent par p points et sont tangentes à t droites et normales à $n-1$ autres droites forment un système dont les caractéristiques μ, ν — au sens de CHASLES — sont évidemment

$$\mu = N(p+1,\ t, n-1) \quad \text{et} \quad \nu = N(p, t+1,\ n-1).$$

Or le lieu des points de contact des tangentes menées du point A aux courbes de ce système est une courbe de l'ordre $\mu + \nu$, dont A est un point μ-tiple; il coupe la droite en $\mu + \nu$ points, dont chacun donne une conique du dit système qui est en outre normale à la droite a; on a donc la relation récurrente suivante:

$$N(p, t, n) = N(p+1,\ t, n-1) + N(p, t+1,\ n-1).$$

Comme on connaît par hypothèse tous les nombres $N(p, t, 0)$, on pourra trouver par cette équation les nombres $N(p, t, 1)$, ensuite les nombres $N(p, t, 2)$, etc., c'est-à-dire tous les nombres indiqués par STEINER. Cette méthode de démonstration est, suivant notre sentiment, la méthode d'in-

1) *Lehrsätze*, p. 275—276 du vol. cité; voir aussi *Gesammelte Werke* **2** (Berlin 1882), p. 425—428.

2) *Sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données. Construction de ces coniques. Théorèmes relatifs à un contact d'une série de coniques et d'un faisceau de droites* (Journ. de mathém. $\mathbf{4}_2$, 1859, p. 49—56).

3) *Vermischte Sätze und Aufgaben* (Journal für Mathem. **55**, 1858, p. 365—328; *Gesammelte Werke*, **2**, p. 682—683).

vention employée par STEINER lui même; elle est sans donte simple et élégante, mais elle a le grave défaut de ne pas révéler les solutions étrangères; plusieurs des nombres indiqués par STEINER et DE JONQUIÈRES sont en conséquence *faux*, comme l'a récemment prouvé M. WIMAN.[1])

4. Citons encore, avant d'abandonner les coniques, les méthodes imaginées par DE JONQUIÈRES pour déterminer l'espèce de la courbe du 2[e] ordre dont on connaît cinq points ou cinq tangentes[2]), sa solution très-simple d'un problème de CAYLEY[3]), la généralisation qu'il a notée pour un théorème de CHASLES[4]), enfin ses démonstrations des propriétés de certains systèmes de coniques.[5])

En passant à d'autres sujets, nous signalerons avant tout la recherche, due à DE JONQUIÈRES[6]), des points, des droites et des plans doubles d'une homographie dans l'espace; c'est une recherche semblable à celle que CHASLES avait déjà faite dans le plan, mais qui, à cause de son importance, méritait bien un travail spécial; c'était l'opinion de STAUDT qui, deux ans après, y consacra un paragraphe du dernier cahier de ses célèbres *Beiträge zur Geometrie der Lage.*[7])

A DE JONQUIÈRES on doit encore[8]) la première solution géométrique de la question suivante, que CHASLES avait proposée: «On donne dans le même plan deux systèmes de sept points qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques.» C'est le *problème de la projectivité* dans le plan que ABADIE[9]) et POUDRA[10]) résolurent par l'analyse, qui a donné lieu à de savants développements de la part de M. CREMONA[11]) et de HESSE[12]), qui enfin a été le point de départ de toute

1) *Über die Anzahl der Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangente und Normale bestimmt sind* (Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895, p. 296—301).

2) *Coniques données par des points ou des tangentes* (Nouv. ann. de mathém. **18**, 1859, p. 215—217).

3) *Solutions géométriques de la Question 369 (voir p. 126)* (id. **16**, 1857, p. 189—197).

4) *Théorème concernant quatre coniques inscrites dans le même quadrilatère* (id. **15**, 1856, p. 312—314).

5) *Questions 677, 678 et 679 (SCHRÖTER) (voir 2e Série, t. II, p. 522)* (id. $\mathbf{3}_2$, 1864, p. 33—36).

6) *Note relative à quelques propriétés des figures homographiques dans l'espace* (id. **17**, 1858, p. 51—55).

7) § 35 p. 328.

8) *Solution géométrique de la Question 296 (voir t. XIV, p. 142)* (Nouv. ann. de mathém. **17**, 1858, p. 399—403). *Rectification* (id. **18**, 1859, p. 64).

9) Nouv. ann. de mathém. **14**, 1855, p. 145.

10) Id. **20**, 1861, p. 452. 11) Id. **15**, 1856, p. 58.

12) *Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung eines Problems der Homo-*

une longue série d'importantes investigations de M. R. STURM[1]): n'est-ce pas suffisant pour prouver que le travail que nous venons de citer de DE JONQUIÈRES a sa place marquée dans l'histoire de la géométrie?

A ce groupe de notes — différentes dans leurs sujets, mais qui, en considération des méthodes qui y sont appliquées, offrent une ressemblance intime — se rattachent enfin deux autres travaux sur les surfaces du 2e ordre, dont l'un[2]) a pour but la recherche d'une méthode pour reconnaître si un point donné est intérieur ou extérieur à une telle surface, supposée déterminée par neuf de ses points, dont l'autre[3]) donne la solution de cet autre problème: «déterminer l'espèce de la surface du 2e ordre qui passe par neuf points ou qui touche neuf plans donnés».[4]) Les solutions de DE JONQUIÈRES ont été perfectionnées depuis, mais on doit les signaler comme les premiers essais dans un champ nouveau et intéressant.

II.

Les «Mélanges de géométrie pure».

5. A l'époque où DE JONQUIÈRES marchait sur les traces de CHASLES, appartient la collection de travaux qu'il fit paraître sous le titre un peu vague de *Mélanges de géométrie pure*[5]); c'est par ce beau volume que notre auteur prit position parmi les géomètres français; les chapitres qui le composent sont si différents les uns des autres par les sujets qu'il traitent, que c'est une nécessité pour nous de les envisager séparément.

Le premier peut être considéré comme un commentaire du mémoire: *Propriétés géométriques du mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace*, présenté par CHASLES à l'Institut de France le 26 juin

graphie von M. Chasles abhängt (Journ. für Mathem. 62, 1862, p. 188—192; *Gesammelte Werke*, München 1897, p. 507—512).

1) *Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* (Mathem. Ann. 1, 1869, p. 533—574).

2) *Note sur un problème de géométrie à trois dimensions* (Journ. de mathém. 3, 1858, p. 53—56).

3) *Solution de deux problèmes de géométrie à trois dimensions* (id. 4, 1859, p. 81—92).

4) Un résumé de ces deux mémoires a été publié dans le Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématique annéxé au t. 17, 1858 (p. 45—50) des Nouv. ann. de mathém.

5) *Melanges de géometrie pure, comprenant diverses applications des théories exposées dans le Traité de géométrie supérieure de M. Chasles, au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes du troi-*

1843.[1]) La question est tellement importante pour la cinématique et la géométrie, qu'on doit être reconnaissant à DE JONQUIÈRES du soin et du talent qu'il a déployés à expliquer et développer le texte trop concis du grand géomètre français.

La démonstration des élégants théorèmes sur les arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable et sur les arcs de lemniscate, que le même savant énonça dans les séances de l'Institut de France du 23 octobre 1843 et du 21 juin 1845, remplissent le II[e] Chapitre des *Mélanges*. Les questions traitées ont une apparence élémentaire; toutefois ces recherches, à un moment où une nouvelle vie commençait pour la géométrie pure, eurent une incontestable opportunité et une grande importance, car elles servirent à prouver qu'on pouvait traiter, sans avoir recours à l'analyse, des questions qui semblent appartenir aux applications géométriques du calcul intégral. Cette signification des recherches citées de DE JONQUIÈRES fut tout de suite saisie par E. PROUHET, qui l'apprécia en ces termes: «on peut considérer la théorie actuelle comme une conquête de la géométrie sur l'analyse, heureuse conquête qui n'appauvrit pas l'analyse et enrichit la science.»[2])

La généralisation des propriétés des foyers et des diamètres conjugués dans la théorie des sections coniques, que CHASLES esquissa en 1846[3]) et qui a pour base la considération de l'involution des droites conjuguées par rapport à une de ces courbes ayant son centre en un point quelconque de son plan, est exposée tout au long dans le III[e] chapitre des *Mélanges*. Cette considération mène directement aux foyers de la courbe; «c'est peut-être», remarque notre auteur (p. 116), «la manière la plus naturelle de les introduire dans la théorie générale des sections coniques»; les géomètres qui après lui ont exposé la théorie de ces courbes eurent précisément la même idée et contribuèrent à répandre dans toutes les écoles ces féconds points de vue.

6. Le IV[e] chapitre de l'ouvrage que nous analysons se présente avec plus d'originalité, d'élévation et d'importance. C'est le principe de correspondance anharmonique qui en forme le canevas; DE JONQUIÈRES fait connaître d'abord la définition, proposée par CHASLES dans ses leçons[4]), de correspon-

---

sième ordre, etc. et la traduction du *Traité de MACLAURIN sur les courbes du troisième ordre* (Paris 1856; VIII + 261 p., in-8°).

1) Comptes rendus Paris **16**, 1843, p. 1420—1432. Comparez aussi la Note XXXIII de l'*Aperçu historique* et le *Mémoire de géométrie* qui fait suite à cet ouvrage.

2) Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, p. 45.

3) *Généralisation de la théorie des foyers des sections coniques* (Comptes rendus Paris **22**, 1846, p. 874—900).

4) *Mélanges*, p. 153

dance homographique dans les formes de I^e^ espèce, comme correspondance biunivoque; c'est la définition que CHASLES lui même publia dans les Comptes rendus du 24 décembre 1855, mais les développements ajoutés par DE JONQUIÈRES remontent à une date plus ancienne; d'ailleurs ils se rapportent presque tous à des questions inspirées par la lecture de mémoires antérieurs du géomètre qu'on a appelé avec raison l'*ARCHIMÈDE du XIX^e^ Siècle*. Le passage vraiment original et le plus important est celui où notre géomètre, pour prouver que «deux faisceaux projectifs de courbes des ordres m et n engendrent par les intersections de leurs éléments correspondants une courbe de l'ordre $m+n$», emploie la démonstration ordinaire du principe de correspondance qu'on attribue à CHASLES.[1]) C'est une circonstance qui nous semble très remarquable, mais sur laquelle les historiens du principe de correspondance n'ont pas suffisamment insisté[2]); DE JONQUIÈRES lui-même l'a oubliée ou en a méconnu la valeur, car, au cours d'une célèbre querelle littéraire, il déclarait que «tout le mérite du procédé de démonstration dont il s'agit» appartenait à CHASLES.[3]) On peut ajouter que la détermination, due à DE JONQUIÈRES[4]), de l'ordre du lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe n[5]), prouve que dès l'année 1860 il était en mesure de se servir très-bien du principe cité.

Dans la II^e^ Section du même chapitre notre auteur complète un mémoire de CHASLES, qu'on lit dans les Comptes rendus[6]), car il expose

1) Nous croyons bon de rapporter ici le raisonnement dont il se sert: «En effet, une transversale quelconque coupera le premier faisceau en une série de points groupés m par m, et le second faisceau en une série de points groupés n par n, correspondant aux premiers groupe à groupe. Si l'on rapporte tous ces points à une origine fixe, ou pourra évidemment les lier entre eux par une équation à deux variables x et z du degré $(m+n)$, qui deviendra du degré $(m+n)$ en x seul pour tous les points communs aux deux séries de groupes, c'est-à-dire pour tous les points d'intersection de la droite et de la courbe, laquelle sera par conséquent du degré $m+n$.» (*Mélanges*, p. 174).

2) Voir l'intéressante note de M. C. SEGRE *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve* (Biblioth. Mathem. $\mathbf{5}_2$, 1892, p. 33—47); ce consciencieux travail nous dispense d'entrer en beaucoup de détails relatifs aux questions qui y sont traitées.

3) *Lettre à M. CHASLES sur une question en litige* (Paris 1867), p. 10.

4) *Lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe n* (Nouv. ann. de mathém. **20**, 1861, p. 206—210. Date: Au Pirée, 20 décembre 1860).

5) Cet ordre avait été déterminé auparavant analytiquement par M. SALMON: voir le note *Rectification à un théorème de MM. STEINER et DEWULF* (Nouv. ann. de mathém. **20**, 1859, p. 314—319).

6) *Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points* (Comptes rendus Paris **36**, 1853, p. 943—952).

différentes constructions de la courbe du 3e ordre et des méthodes po trouver les $5-k$ points communs à deux cubiques planes passant par l mêmes $4+k$ points ($k=0, 1, .., 4$); ce sont de nouvelles applicatio des théories de la *Géométrie supérieure*, «dont les ressources sont i épuisables».[1])

7. La dernière partie du volume que nous analysons est occup par une traduction libre, accompagnée de nombreux commentaires, d *Traité* de Maclaurin *sur les courbes du troisième degré*. Le but que s'e proposé de Jonquières dans ce travail, est de répandre en France le goû pour la géométrie pure; et il est beau de voir ses efforts, couronnés d'u franc succès, pour rattacher les théories et les méthodes du géomètr anglais aux idées qui portent la marque d'origine de Poncelet et d Chasles.

Considérée comme ouvrage de propagande, cette partie des *Mélang* est conforme à une note de notre mathématicien[2]), où plusieurs propos tions de la *Géométrie organique* de Maclaurin (relatives aux courbes d 3e et du 4e ordre et aux polaires) sont éclaircies à l'aide de la *Géométr supérieure*; cette note se termine par une élégante traduction françai de l'éloquent avant-propos de cet ouvrage de Maclaurin.

Considérée au contraire comme se rapportant aux courbes du 3e ordr elle est liée à plusieurs de ses notes qu'il ne nous est pas permis d passer sous silence. Deux d'entre elles[3]) servent à établir des génération des cubiques planes; une troisième[4]) à démontrer ou à généraliser des pr positions relatives à ces lignes et une quatrième[5]) à prouver géométr quement que le lieu des points de rencontre des normales à une coniqu en deux points alignés avec un point fixe est une cubique. Dans l même groupe nous trouvons enfin un mémoire[6]) dont le titre pourra faire croire qu'il se rapportait aux sections coniques; au contraire so but principal est la solution de l'importante question qui suit: «co struire, en n'employant que la règle et le compas, la conique osculatri

1) *Mélanges*, p. 182.

2) *Note sur la Géométrie organique de Maclaurin, contenant diverses applicatio des théories de la géométrie moderne* (Journ. de mathém. **2**₁, 1857, p. 153—165).

3) *Solution de la Question 306 (voir pag. 211)* (Nouv. ann. de mathém. 1 1855, p. 318—320; voir aussi *Mélanges de géométrie pure* p. 166). *Solution géom trique des Questions 494 et 499 (voir t. XVIII, p. 4.4, et t. XIX, p. 43)* (id. **20**, 186 p. 26—30).

4) *Solution géométrique de la Question 280 (Chasles)* (id. **15**, 1856, p. —102).

5) *Solution de la Question 443 (voir p. 77)* (id. **18**, 1859, p. 261—264). *Additi* (id. ib., p. 406—407).

6) *Exercises sur les sections coniques* (id. **24**, 1865, p. 304—308).

du quatrième ordre en un point donné d'une courbe du 3ᵉ degré dont on connait neuf points»; il se termine par l'énoncé de deux élégantes propositions sur les courbes du dit degré, mais l'une d'elles n'est exacte que lorsqu'on se borne à la considération d'éléments réels.[1])

III.

Théorie générale des courbes planes.

8. Presque tous les articles de DE JONQUIÈRES que nous venons d'examiner out pour but la démonstration de théorèmes ou la solution de questions qui avaient été énoncées par CHASLES ou par d'autres géomètres[2]); l'originalité des résultats établis étant limitée, la valeur de ces travaux est forcément restreinte. Mais pour notre auteur la période de noviciat — et telle est celle caractérisée par les productions dont il s'agit — ne devait pas être longue. En effet, au cours de l'année (1856) dans laquelle il publiait ses *Melanges de géométrie pure,* il présentait (15 septembre et 17 novembre) à l'Institut de France un long

---

1) L'énoncé donné par DE JONQUIÈRES pour la première de ces propositions est le suivant: «Parmi les coniques qui ont, avec une courbe du troisième ordre, un contact du second ordre en un point donné de cette courbe, il y en a en général *trois* qui ont encore avec la courbe un contact du second ordre en un autre point. Les points de contact de ces coniques sont trois points situés sur une même conique, ayant avec la courbe un contact du second ordre au point donné. Si la courbe a un point de rebroussement, il n'y a plus qu'une seule de ces coniques.»

Or, en ayant recours par ex. aux représentations paramétriques des courbes du 3ᵉ ordre (elliptiques ou rationnelles), on voit que cet énoncé peut être remplacé par le suivant:

«Parmi les coniques qui ont, avec une courbe du troisième ordre, un contact du second ordre en un point donné de cette courbe, il y en a en général *neuf* qui ont encore avec la courbe un contact du second ordre en un autre point. Les points de contact de ces coniques sont trois à trois situés sur trois coniques, ayant avec la courbe un contact du second ordre au point donné. Si la courbe a un point double, il n'y a plus que trois de ces coniques; si elle a un point de rebroussement, il n'y en a plus qu'une seule.»

L'autre des propositions de DE JONQUIÈRES est complètemont exacte; en voici l'énoncé:

«En chaque point d'une courbe du troisième ordre il y a en général trois coniques qui ont avec elle un contact du troisième ordre en ce point, et qui la touchent encore en un autre point. Ce nombre se réduit à un, si la courbe a un point double; il devient nul si elle a un point de rebroussement.»

2) Nous n'avons pas mentionné sa *Solution géométrique de la Question 377 (HARRISON)* (Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, p. 407—409) car elle laisse intacte la partie la plus difficile et intéressante du problème proposé.

travail[1]), étroitement lié au IV[e] chap. de ce livre, sur une question fondamentale de la théorie générale des courbes planes; et, en attendant le jugement de cette illustre corporation, il en publiait un court extrait, dans le principal journal mathématique de la France.[2])

Pour faire comprendre la nature et l'importance de la question traitée par DE JONQUIÈRES, il faut se souvenir que NEWTON, à la fin de son *Enumeratio linearum tertii ordinis*, exposa une construction de la cubique (rationnelle) déterminée par son point double et sept points simples, en ajoutant qu'on pourrait construire d'une manière analogue d'autres courbes algébriques douées de points singuliers; c'est ce que prouvèrent MACLAURIN et BRAIKENRIDGE, sans toutefois aborder le problème — que NEWTON disait «inter difficiliora numerandum» et que G. CRAMER considérait comme nécessaire pour la connaissance des courbes — de décrire la courbe générale de son ordre, déterminée par un nombre suffisant de ses points.

Les moyens de vaincre la difficulté ont été fournis principalement par STEINER, lorsqu'il découvrit (1848) que «deux faisceaux projectifs de courbes des ordres n et n' engendrent, par les intersections de leurs éléments correspondants, une courbe de l'ordre $n + n'$».[3]) Presque en même temps CHASLES apprenait à construire, à l'aide de faisceaux projectifs, les courbes du 3[e] et du 4[e] ordre.[4]) Ces résultats faisaient surgir naturellement la question de trouver des constructions analogues pour les courbes des ordres supérieurs à quatre, question d'autant plus essentielle qu'on voyait que, dès qu'elle serait résolue, ou pourrait intervertir le théorème de STEINER, c'est-à-dire affirmer la possibilité d'engendrer toute courbe algébrique plane à l'aide de faisceaux projectifs de courbes d'ordres inférieurs.[5])

---

1) *Essai sur la génération des courbes géométriques, et en particulier sur celle de la courbe du quatrième ordre* (Mém. prés. par divers savants à l'académie des sciences **16**, Paris 1858).

2) *Mode de construction et de description de la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points (Extrait d'un mémoire sur la génération des courbes géométriques, présenté par l'auteur à l'Académie des sciences)* (Journ. de mathém. $\mathbf{1}_2$, 1856, p. 411—420).

3) *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* (Journ. für Mathem. **47**, 1854, p. 1—6; *Gesammelte Werke* **2**, p. 493—500); comparez aussi p. 124 des *Melanges de géométrie pure*.

4) *Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points* (Comptes rendus Paris **36**, 1853, p. 943—952). *Sur les courbes du quatrième et du troisième ordre* (id. **37**, 1853, p. 222—277, 372—380, 437—443).

5) Cette possibilité a été prouvée, la première fois, par GRASSMANN (*Die höhere Projectivität in der Ebene, dargestellt durch Functionenverknüpfungen*; Journ. für Mathem. **42**, 1851, p. 208); mais qui lisait ou connaissait, vers l'année 1860, les travaux de l'inventeur de l'*Ausdehnungslehre?*

Dans son *Essai sur la génération des courbes géométriques*, DE JONQUIÈRES résolut complètement cette question, et la méthode qu'il employa à cet effet le mena incidemment à une vérité inattendue qu'il nous faut signaler.

On aurait pu croire que les $n^2 + n'^2$ points bases des deux faisceaux générateurs d'une courbe de l'ordre $m = n + n'$ pouvaient être choisis entre les $\frac{m(m+3)}{2}$ points déterminateurs de la courbe; DE JONQUIÈRES prouva que, au contraire, $nn' - 1$ d'entre eux doivent être pris en dehors des points donnés; ces autres $nn' - 1$ points et la correspondance entre les deux faisceaux sont cependant complètement déterminés par les données de la question. En conséquent, pour construire une courbe de l'ordre m passant par $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés, on peut avant tout décomposer le nombre m en deux parties n et n' et, ensuite, répartir les $nn' - 1$ points fondamentaux inconnus entre les bases des deux faisceaux; en général on pourra faire cela de différentes manières; mais, dès qu'on en a choisi une, tout le reste est déterminé. Ces conclusions sont si belles qu'elles entrèrent bientôt — sous le nom de *théorème de* DE JONQUIÈRES — parmi les propositions fondamentales de la théorie des courbes planes[1]); je crois bon d'ajouter que ce sont précisément ces recherches de notre géomètre qui ont inspiré à CHASLES (délégué par l'Institut à leur examen) un autre théorème analogue[2]), qui devint aussi bientôt classique.[3])

Une fois arrivé aux conséquences que nous venons de rapporter, la construction effective d'une courbe algébrique n'exige que l'emploi de théorèmes de la géométrie supérieure; DE JONQUIÈRES, exceptionnellement familiarisé avec cette doctrine, n'eut pas de la peine à en tirer les élégantes constructions des courbes du 3^e, 4^e, 5^e et 6^e ordre, qui occupent la dernière section de son *Essai* et sur lesquelles CHASLES attira, dans son rapport à l'Institut de France, l'attention du monde mathématique.[4])

Il est bon de citer ici trois petites notes de notre auteur qui contiennent des applications des principes établis dans l'*Essai*. Une d'elles[5])

---

1) CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Bologna 1862), §§ 56 et 57.

2) Comptes rendus Paris **45**, 1857, p. 321, note, et *Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres* (id. ib. p. 1061—1068).

3) CREMONA, *Introduzione* §§ 54 et 55.

4) L'étude de ce savant et profond Rapport (signé par PONCELET, LIOUVILLE et CHASLES rapporteur et publié dans le t. **45**, p. 318—331, des Comptes rendus Paris) doit être recommandé à quiconque désire des renseignements sur l'*Essai* plus étendus que ceux fournis par notre analye, forcément incomplète.

5) *Problème sur cinq coniques et cinq droites anharmoniquement correspondantes* (Nouv. ann. de mathém. **15**, 1856, p. 369—370).

se rapporte à la construction d'une courbe du 3e ordre à l'aide de faisceaux projectifs; une autre[1]) à la description analogue d'une courbe du 4e ordre passant par quatorze points, dont huit sont situés sur une conique. La dernière enfin[2]) a pour sujet la courbe dont l'équation polaire est la suivante:

$$\varrho = a \cos \varphi - b \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi;$$

c'est une courbe qui se présenta à l'auteur en traitant une question de cosmographie[3]) et dont il établit les principales propriétés et une construction à l'aide de faisceaux projectifs. Ou peut ajouter que plusieurs passages d'autres travaux de DE JONQUIÈRES renferment des applications de la même méthode générale de description des courbes algébriques.

9. Sur ces mêmes idées il est revenu bien plus tard, non seulement pour exposer en détail la manière d'engendrer par faisceaux projectifs les courbes unicursales d'ordre quelconque[4]) et en particulier celles du 5e degré[5]), mais encore pour essayer[6]) d'appliquer la génération dont il s'agit à la recherche du nombre maximum de points multiples dont peut être douée une courbe algébrique d'un ordre donné; ce sont certainement des questions du plus haut intérêt; mais il semble que, pour prononcer le dernier mot sur elles, il serait indispensable d'employer des moyens plus puissants que les simples notions arithmétiques, dont fit usage notre savant.

Ce retour de DE JONQUIÈRES à ses anciennes amours est marqué par un autre groupe de travaux dans lequel il se proposa de résoudre le séduisant problème de construire, au moyen de deux faisceaux projectifs de surfaces d'ordres inférieurs, une surface d'ordre m déterminée par

1) *Problème sur les courbes du quatrième ordre* (Nouv. ann. de mathém. p. 370—372).

2) *Note relative à une courbe du sixième ordre qui se présente en astronomie* (Annali di matem. **1**, 1858, p. 112—116; date: *Arcole* (nom d'un navire) 3 août 1857; cf. G. LORIA, *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven* (Leipzig 1902), p. 241).

3) *Cosmographie. Solution de la Question 331* (Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, p. 354—357).

4) *Génération des courbes unicursales* (Comptes rendus Paris **105**, 1887, p. 1148—1154).

5) *Construction géométrique des courbes unicursales, notamment de celle du cinquième ordre douée de six points doubles* (Rendic. del circolo matematico di Palermo **2**, 1888, p. 118—123; date: Paris, Mai 1888).

6) *Recherche du nombre* maximum *de points doubles* (proprement dits et distincts) *qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique d'orde m, cette courbe devant d'ailleurs passer par d'autres points simples qui complètent la détermination de la courbe* (Comptes rendus Paris **105**, 1887, p. 917—923). *Détermination du nombre maximum absolu de points multiples d'un même ordre quelconque* r, *qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique* C_m, *de degré* m, *conjointement avec d'autres points simples donnés en nombre suffisant pour compléter la détermination de la courbe* (id. ib. p. 971—977).

$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3}-1$ de ces points.[1]) Par des considérations très-simples et purement arithmétiques, il crut[2]) avoir établi la possibilité générale de cette construction; même il se figura pouvoir[3]) en tirer des propositions répondant à la question du nombre maximum de points multiples, proprement dits, qu'il est permis d'attribuer à une surface algébrique de degré m. Mais bientôt il s'aperçut (ou il fut averti?) que ses raisonnements ne pouvaient d'aucune manière être considérés comme concluants, et il s'empressa de le déclarer comme il suit: « Les propositions, essentiellement *arithmétiques*, présentées dans ma Note précitée[4]), doivent dans chaque cas, être complétées et assujetties à des restrictions nécessaires, de telle sorte que les données de la question, d'ailleurs équivalentes au nombre des points qui déterminent la surface, satisfassent aux exigences *géométriques* que celle-ci comporte. Sans cela on se heurterait à des impossibilités que la résolution (lorsqu'elle est possible) des équations à mettre en oeuvre ne manquerait sans doute de révéler (soit par des incompatibilités, soit par des valeurs imaginaires qui en résulteraient pour les inconnues cherchées), mais qu'il vaut mieux éviter *à priori* par des considérations géométriques appropriées au sujet, lorsqu'il est possible de le faire. D'ailleurs ces restrictions tiennent toujours à ce qu'une courbe gauche, d'ordre n^2, intersection complète de deux surfaces d'ordre n, ne se trouve toute entière sur une surface de degré $m\,(m > n)$ que si elle satisfait à certaines conditions. »[5])

---

1) Chasles (voir la note *Deux théorèmes* etc. citée plus haut) avait déjà remarqué que deux faisceaux projectifs de surfaces des ordres n et n' engendrent une surface de l'ordre $n+n'$, en laissant comprendre qu'il ne croyait pas à la possibilité d'engendrer par cette méthode toute surface algébrique; en effet, pour qu'une surface de degré m puisse se construire de cette manière il est nécessaire et suffisant qu'elle contienne une courbe de l'ordre n^2, n étant $< m$.

2) *Génération des surfaces algébriques d'ordre quelconque* (Comptes rendus Paris **105**, 1887, p. 1203—1209); *Sur quelques notions, principes et formules qui interviennent dans plusieurs questions concernant les courbes et les surfaces algébriques* (id. **106**, 1888, p. 234—241).

3) Voir les deux notes *Détermination du nombre maximum de points doubles, proprement dits, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une surface algébrique de degré m, dont la détermination est complétée par d'autres points simples donnés* (Comptes rendus Paris **106**, 1888, p. 19—26); *Sur un trait caractéristique de dissemblance entre les surfaces et les courbes algébriques, d'où dépendent les limites respectives des nombres de points doubles (ou plus généralement, de points multiples d'ordre r) qu'il est permis de leur attribuer arbitrairement* (id. ib. p. 152—162).

4) Il s'agit de la première entre celles que nous avons citées dans l'avant-dernière note.

5) *Construction géométrique de la surface du troisième ordre. Réflexions sur la*

Ces recherches de DE JONQUIÈRES peuvent donc être supprimées de la liste de celles par lesquelles il fit faire à notre science de réels progrès. Mais elles furent le point de départ d'autres investigations de détail, dont la valeur ne saurait être méconnue, car elles eurent pour résultat, d'abord, une nouvelle construction de la surface du 2^e ordre déterminée par neuf points[1]); en second lieu des constructions par faisceaux projectifs de la surface du 3^e ordre déterminée par un quadrilatère gauche et sept points[2]), ou par trois points doubles et sept points simples, ou par trois de ses droites et sept de ses points[2]), ou par cinq points et quatre droites dont l'une coupe les trois autres, ou bien par une de ses droites, sept points situés sur une même courbe gauche du 4^e ordre et de la I^e espèce de la surface et enfin cinq autres points indépendants entre eux[3]); enfin, elles menèrent à la génération par faisceaux projectifs de la surface du 4^e ordre déterminée par sept points doubles et six points simples.[4])

Je remarque encore que, dans une note qu'on lit au début d'un des travaux que nous venons d'analyser[1]), DE JONQUIÈRES a observé que la considération du cône circonscrit à une surface algébrique que G. SALMON utilisa pour prouver qu'une surface du 3^e ordre a tout au plus quatre points doubles isolés[5]) peut servir à déterminer une valeur maximum du nombre D des points doubles d'une surface simple de l'ordre n dénuée de lignes singulières. En effet ce cône est de l'ordre $n(n-1)$; il a $n(n-1)(n-2)$ génératrices de rebroussement et $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)+D$ génératrices doubles; donc, afin qu'il ne dégénère pas en cônes d'ordres inférieurs, on doit avoir

$$n(n-1)(n-2)+\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)+D \leqq \tfrac{1}{2}(n^2-n-1)(n^2-n-2);$$

on en tire

$$D \leqq \tfrac{1}{2}n(n-1)(2n-5)+1,$$

comme dit notre auteur. C'est une formule qui semble mériter d'être introduite dans la théorie des surfaces algébriques; on pourra probable-

---

génération des surfaces algébriques à l'aide de deux faisceaux projectifs (Comptes rendus Paris **106**, 1888, p. 526—529; voir particulièrement p. 528).

1) *Construction géometrique, par deux faisceaux projectifs, de la surface du troisième degré déterminée par diverses conditions* (id. **106**, 1888, p. 907—912).

2) Voir l'article cité dans l'avant-dernière note.

3) *Nouvelles recherches sur la construction, par deux faisceaux projectifs, de la surface générale du troisième ordre* (id. **107**, 1888, p. 209—215).

4) *Construction géométrique d'une surface, à points doubles, du quatrième ordre* (id. ib. p. 430—432).

5) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*. II. Teil (3. Aufl., Leipzig 1880), p. 370.

ment en trouver d'analogues en supposant que le sommet du cône considéré soit un point multiple de la surface donnée.

10. L'enchaînement des sujets nous a fait abandonner presque à contre-cœur la théorie des courbes planes algébriques, à laquelle nous nous empressons de revenir, après cette digression dans la géométrie de l'espace, pour remarquer que si l'*Essai sur la génération des courbes géométriques* est la plus ancienne des contributions importantes données par notre auteur à la théorie des lignes algébriques considérées isolément, il ne représente pas la seule. En effet, dans la collection de ses travaux, nous trouvons une exposition de la théorie des pôles et des polaires par rapport aux courbes algébriques[1]), plus élémentaire que les expositions plus anciennes; c'est un travail qui contient des applications et des détails ayant une certaine importance et de la nouveauté, mais dont le mérite principal se trouve dans la méthode; pour prouver la vérité de cette assertion, il suffit de signaler les nombreux points de contact qu'il offre avec le chapître correspondant de l'*Introduzione* de M. CREMONA[2]), parue plus tard.

Dans ce livre classique a encore été reproduit le fond d'un autre travail de DE JONQUIÈRES, celui[3]) où il généralisa l'ancienne théorie de l'involution quadratique. Quoique la priorité de PONCELET à ce sujet ne puisse être mise en doute[4]), il est bien sûr que les idées à ce sujet de l'auteur du *Traité des propriétés projectives des figures* avaient grand besoin d'être développées pour pouvoir donner tous les fruits dont elles renfermaient les germes.[5]) Il est vrai que la découverte de la liaison entre les involutions et les faisceaux de courbes lui appartient, mais c'est à DE JONQUIÈRES que revient l'honneur d'avoir introduit les concepts de

---

1) *Mémoire sur la théorie des pôles et des polaires dans les courbes d'ordre quelconque, particulièrement dans les courbes du troisième et du quatrième ordre, comprenant diverses applications de cette théorie* (Journ. de mathém. $\mathbf{2}_2$, 1857, p. 249—266). *Note relative au § XX du Mémoire qui précède. Deuxième mode de description de la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points* (id. ib. p. 267—272).

2) A ces recherches de DE JONQUIÈRES est liée la démonstration qu'il donna [*Solution de la Question 388 (FAURE) (voir p. 183)*; Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, p. 347—354] d'une proposition relative à la courbe polaire d'un point par rapport à un système de droites.

3) *Généralisation de la théorie de l'involution. Applications géométriques* (Annali di matem. **2**, 1859, p. 86—94).

4) C'est ce que DE JONQUIÈRES reconnut lui même plus tard; voir ses *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque, suivies d'une réponse à quelques critiques de M. CHASLES* (Paris 1866), p. 22, note (***).

5) On sait qu'il n'en fit qu'une rapide mention, le 8 mai 1843, à la fin de sa *Note relative à la réclamation de M. AMYOT* (Comptes rendus Paris **16**, 1843, — 953).

«rapport anharmonique de quatre groupes d'une involution» et d'«involutions projectives», d'avoir déterminé le nombre des points doubles d'une involution d'ordre quelconque et d'avoir signalé l'application qu'on peut faire des involutions à la résolution des équations algébriques. Il s'est encore occupé des constructions graphiques concernant les involutions; quoique les méthodes qu'il imagina aient le défaut d'exiger l'emploi des courbes d'ordre supérieur, quoique, par conséquent, les problèmes en question ne soient pas en général réductibles à d'autres plus faciles, DE JONQUIÈRES, en les faisant connaître, réussit à prouver le lien étroit qui existe entre la théorie nouvelle et des questions anciennes, et par suite rendit plus aisé l'accueil de la première.

C'est donc une valeur temporelle, transitoire, que posséda la partie constructive du mémoire de DE JONQUIÈRES que nous analysons; c'est une valeur comme œuvre de propagande qu'il ne faut pas méconnaître en considérant qu'elle appartient à une époque où la géométrie luttait encore avec acharnement pour conquérir sa place au soleil.

11. Il nous reste dans ce chapître à analyser un dernier travail de DE JONQUIÈRES relatif aux courbes planes algébriques.[1]) C'est une étude inspirée par le désir de répondre à des questions proposées par STEINER dans son grand mémoire *Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben*[2]), très-répandu en France à la suite de la traduction faite par WOEPCKE et publiée par LIOUVILLE dans son Journal. Son but principal est de résoudre le problème général suivant: «Déterminer la classe de la courbe enveloppe d'une transversale qui coupe une courbe algébrique C du degré m de telle sorte qu'une fonction déterminée (F) des distances mutuelles des m points d'intersection de la transversale et de la courbe ait une valeur donnée λ; (F) étant une fonction algébrique entière et rationnelle». Ce problème peut être traité aujourd'hui en général par le «principe de transport» (*Übertragungsprinzip*) de CLEBSCH et, au moins dans certains cas, en substituant à la courbe donnée un système de m droites. DE JONQUIÈRES, sans employer ces artifices, expose au début de son mémoire des considérations délicates par lesquelles on peut le résoudre pour chaque fonction (F); il explique ensuite sa méthode, en l'appliquant à plusieurs exemples, pour un bon nombre puisés dans le travail cité de STEINER. Malgré le talent et la finesse que notre géomètre

1) *Solution de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes* (Journ. für Mathem. 59, 1861, p. 313—334. Date: 10 juillet 1861).

2) Voyez en particulier l'Abschnitt intitulé *Einiges über geradlinige Transversalen bei algebraischen Curven*, où est annoncée ou promise une théorie complète du sujet.

y a déployés, le mémoire dont il s'agit est aujourd'hui un des moins lus et étudiés parmi ses travaux; probablement parce que la question qui y est traitée semble avoir un intérêt borné. C'est peut-être qu'on n'a pas assez remarqué que les enveloppes étudiées par DE JONQUIÈRES ont presque toutes des relations très-intimes avec les points singuliers et les tangentes singulières de la courbe fondamentale; que, par suite, leur considération projette quelque lumière sur les configurations auxquelles ces points et ces tangentes donnent naissance: cette remarque ne prouve-t-elle pas que la mine exploitée par notre savant n'est probablement pas encore épuisée?

IV.

Les séries de courbes.

12. Nous allons maintenant entreprendre l'analyse d'un groupe d'écrits DE JONQUIÈRES qui ont une grande importance, quoiqu'ils soient entachés d'erreurs, que l'historien de la géométrie ne peut, ni ne doit laisser passer inaperçues, même en ayant égard au nom illustre d'un savant récemment décédé; ce sont des travaux qui causèrent à leur auteur un grand nombre de tracas et bien des chagrins, car il furent le sujet de critiques très-vives et la cause d'une malheureuse polémique, qui trancha définitivement l'ancienne liaison entre CHASLES et son élève le plus distingué.

Le premier des travaux dont il s'agit[1]) a pour origine la définition suivante: «des courbes géométriques du degré n forment une *série* quand elles satisfont toutes en commun $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ conditions quelconques; et si N désigne le nombre des courbes de cette série qui passent en outre par un même point quelconque donné, la série se dira de l'indice N». En considérant comme sous-entendu que les conditions dont il s'agit soient toutes algébriques, cette définition ne laisse rien à désirer. Malheureusement DE JONQUIÈRES crut la préciser en ajoutant le Lemme suivant: «Toutes les courbes C_n d'une série d'indice N peuvent être représentées analytiquement par une équation $F(y, x) = 0$ du degré n dont tous les coefficients sont des fonctions algébriques, entières et rationnelles d'une indéterminée λ, qui s'élève, dans l'un d'entre eux au moins, au degré N, mais jamais à un degré supérieur». Or ce lemme est évidemment faux ou, si l'on veut être plus indulgent, il restreint énormément la portée des raisonnements de l'auteur, en les rendant applicables seulement aux séries rationnelles. C'est ce que G. ASCOLI remarqua le

1) *Théorème généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journ. de mathém. 6_2, 1861, p. 113—134).

premier[1]), en citant l'exemple de la série formée par les droites tangentes à une courbe générale dans son ordre, qui ne peut pas se représenter analytiquement de la manière indiquée par ce lemme; c'est ce que A. CAYLEY confirma peu après[2]) en appliquant des méthodes à lui personnelles; mais c'est ce dont DE JONQUIÈRES ne semble avoir été jamais convaincu.[3]) Pour l'excuser, au moins en partie, d'avoir eu cette opinion erronée, on peut remarquer qu'elle était très-répandue, non seulement en 1861, mais encore plusieurs années après.[4])

Cela n'empêche toutefois que les *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques* exposés par DE JONQUIÈRES ne puissent se considérer comme démontrés que pour les séries rationnelles; une recherche particulière est nécessaire pour reconnaître s'ils sont valables en général; si on la fait, on arrive à établir que dans cette condition il y en a effectivement plusieurs, p. ex.[5]) tous ceux qu'on peut prouver en se servant de la méthode qu'on appelle «principe de correspondance de CHASLES», quoique DE JONQUIÈRES l'employât couramment bien avant 1864. Les *Théorèmes* cités se rapportent à l'enveloppe des axes harmoniques d'un point par rapport aux courbes d'une série, aux courbes d'une série qui sont tangentes à une droite ou à une courbe donnée, aux polaires d'un même ordre d'un point par rapport aux courbes d'une série, au lieu des points de contact des courbes d'une série avec leurs tangentes passant par un même point, à la courbe engendrée par deux séries projectives, etc. En appliquant quelques-uns de ces résultats, DE JONQUIÈRES réussit à établir de nouvelles propositions ayant trait à d'autres systèmes de courbes; citons comme exemple la proposition suivante, qui a été le point de départ d'investigations

1) *Sopra un teorema di Jonquières* (Giorn. di matem. **5**, 1867, p. 377).

2) Voir l'*Annex N. 1* du mémoire *On the curves which satisfy given conditions* (Philos. trans. **158**, 1868; *Mathematical Papers* T. VI, p. 242—243).

3) Voyez les efforts qu'il fit de Saïgon le 15 décembre 1865 (*Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque*, Giorn. di matem. **6**, 1866, p. 45—53) pour le prouver, et cette étrange déclaration qu'il fit (*Note pour le Giornale di Matematiche*, id. ib. p. 212—213): « Quand je dis qu'une série d'ordre m et d'indice μ peut toujours être représentée par une seule équation algébrique du degré m en x et y et du degré μ en λ (λ étant une indéterminée), je n'entends parler que d'une possibilité idéale; car il arrivera souvent que l'analyse sera impuissante à effectuer les éliminations nécessaires pour obtenir cette équation ».

4) C'est ce qui est prouvé par la phrase suivante, que j'emprunte à une comunication faite par M. CHASLES le 19 novembre 1866: « M. DE JONQUIÈRES a exprimé et défini les systèmes de courbes d'ordre m, comme tout le monde, par l'équation $F(x, y, \lambda) = 0$, qui ne renferme qu'un paramètre variable » (Comptes rendus Paris **63**, p. 874).

5) E. DE JONQUIÈRES, *Réponse à une observation présentée dans le Giornale di Matematiche* (Nouv. ann. de mathém. **7**$_2$, 1868, p. 111—116 et 192).

dont nous aurons à nous occuper bientôt (n. 14): «Si des courbes du degré n doivent passer par $\frac{1}{2}n(n+3)-\mu$ points et toucher μ courbes des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$, le nombre des C_n qui satisfont à la question est $m_1 m_2 \ldots m_\mu (m_1+2n-3)(m_2+2n-3)\ldots(m_\mu+2n-3)$», c'est une proposition que BISCHOFF avait établie auparavant[1]) et d'où DE JONQUIÈRES tira ailleurs[2]) la conséquence qu'il y a $2(2n-1)^\mu$ courbes du degré n qui passent par $\frac{1}{2}n(n+3)-\mu$ points donnés et sont tangentes à μ coniques.

En se servant des mêmes considérations, DE JONQUIÈRES arriva encore à des propositions relatives au système formé par un point et une courbe[3]); elles sont toutes des cas particulies d'un théorème, qu'il énonça aussi sous forme de *Question (n° 583)* dans les Nouvelles annales de mathématiques[4]), et qui est assez élégant pour mériter une place dans notre compte rendu: «Étant données deux courbes fixes planes, l'une du degré m et l'autre de la classe m'; si une tangente roule sur celle-ci, et que, par les points où elle rencontre C_m, on mène à cette courbe ses normales en ces points d'intersection, les tangentes se couperont, deux à deux, sur une courbe du degré

$$\tfrac{1}{2}mm'(m-1)(2m-3)$$

et les normales se couperont, deux à deux, sur une courbe du degré

$$\tfrac{1}{2}mm'(m-1)(2m-1).»$$

13. Des remarques ayant été faites sur l'excessive généralité qu'ont les énoncés des *Théorèmes généraux*, DE JONQUIÈRES, le 8 février 1863, pendant une station au Golfe de Mexique, s'empressa[5]) de déclarer que les nombres qu'il avait donnés n'étaient vrais qu'en général et au plus. La raison pour laquelle ces théorèmes (particulièrement ceux où il y a des conditions de contact) conduisent en plusieurs cas à des conclusions évidemment fausses, se trouve moins dans la rationnalité des séries, impli-

---

1) *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven* (Journ. für Mathem. **56**, 1859, p. 166—177).

2) *Théorèmes concernant les courbes géométriques planes* (Nouv. ann. de mathém. **20**, 1861, p. 83—85).

3) Voir les XII et XIV des *Théorèmes généraux* et la fin du mémoire cité dans la note précédente.

4) T. **20**, 1861, p. 140.

5) *Note au sujet d'un article publié dans le Journal de Mathématiques T. VI, 2e Série* (Journ. de mathém. 7_2, 1863, p. 71—72). Voir aussi: *Corrispondenza* (Giorn. di matem. **1**, 1863, p. 128; date: Vera-Cruz, 6 février 1863) et *Correspondance* (Nouv. ann. de mathém. 2_2, 1863, p. 203—205).

citement supposée, que dans la présence de courbes singulières, qu'il est indispensable de séparer des courbes générales, lorsqu'on veut arriver à des résultats qui ne soient pas purement algébriques. C'est une des plus grandes gloires de CHASLES d'avoir appris à obtenir seulement les solutions justes par l'introduction d'un second nombre, analogue à l'indice d'une série; cette introduction paraît assez naturelle lorsqu'on considère chaque courbe plane simultanément comme lieu de ses points et comme enveloppe de ses tangentes; mais son immense utilité dans les questions de géométrie énumérative ne pouvait être prévue que par un mathématicien de premier ordre. Dans la théorie des séries ou systèmes de ∞^1 courbes il est donc nécessaire de considérer deux périodes; l'une, qui doit porter le nom de DE JONQUIÈRES, l'autre qui doit porter celui de CHASLES; la première prépare la seconde, mais celle-ci a un caractère de perfection, dont celle-là était dépourvue. C'est ce qu'aujourd'hui tout le monde accorde sans peine, mais que ni CHASLES ni JONQUIÈRES ne voulurent jamais[1]) reconnaître. Le maître méconnaissait à tort que l'introduction de l'indice d'une série a marqué dans la science un progrès important; mais l'élève, irrité d'attaques trop vives, arriva à nier la fécondité de l'idée de définir par deux caractéristiques tout système de coniques, fécondité dont il ne doutait pas lorsque, avant la polémique, il l'appliquait[2]) et l'étendait aux courbes d'ordre supérieur à deux[3]), fécondité dont on ne peut plus douter, non seulement après les applications sans nombre qu'on en fit, mais aussi dès qu'on vit que la notion de carac-

---

1) Cette assertion de M. LORIA peut sans doute être justifiée, si l'on n'a égard qu'aux écrits publiés par CHASLES et DE JONQUIÈRES. D'autre part, celui-ci semble avoir reconnu plus tard l'importance de la seconde caractéristique de CHASLES, et pour le prouver, je me permets de reproduire ici quelques lignes d'une lettre assez longue que DE JONQUIÈRES m'adressait sur ce sujet le 4 mai 1890: „J'ai toujours fait „grand cas du perfectionnement apporté par l'introduction de la deuxième caracté- „ristique (qui est la corrélative de la première), qui a fait éviter, dans un grand „nombre de cas (sinon dans tous) les solutions impropres, provenant des couples „dégénérées, dont CHASLES avait révélé l'existence dans les coniques, et je m'en étais „servi moi-même, après lui, avec éloges." G. ENESTRÖM.

2) *Solution de la Question 548 (voir t. XIX, p. 405 et t. XX, p. 56)* (Nouv. ann. de mathém. **20**, 1861, p. 85—87). Il s'agit de déterminer le lieu des foyers des coniques d'un système définis par ses caractéristiques.

3) *Formules exprimant le nombre des courbes d'un même système d'ordre quelconque, qui coupent des courbes données d'ordre également quelconque, sous des angles donnés ou sous des angles indéterminés, mais dont les bissectrices ont des directions données* (Comptes rendus Paris **58**, 1864, p. 535—537). Il est juste de remarquer qu'à cette généralisation des méthodes caractéristiques, CHASLES lui-même avait fait allusion dans sa célèbre communication de 15 février 1864 (comp. Comptes rendus Paris **58**, 1864, p. 300—301, note (*)).

téristiques pouvait s'étendre à une classe très-étendue de courbes transcendantes (les courbes panalgébriques).

Je ne suivrai pas les détails de cette douloureuse querelle littéraire[1]), dans laquelle, il faut le reconnaître, le rôle le plus beau a été joué par DE JONQUIÈRES; je dois seulement remarquer qu'elle n'a pas été stérile pour la science, car elle a poussé le géomètre dont nous nous occupons à approfondir et éclaircir les méthodes dont il avait fait usage antérieurement.[2]) Comme fruits de ces nouvelles recherches citons avant tout les considérations par lesquelles il a déterminé des limites de validité de certaines de ses formules concernant les systèmes de courbes (et de surfaces); ensuite un théorème fondamental qu'on trouve exposé tout au long dans ses *Recherches sur les séries de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque*, mais qu'on rencontre déjà, sous une forme moins explicite et précise, parmi ses *Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque*; de ce théorème nous allons rapporter l'énoncé afin que le lecteur y reconnaisse une des formes les plus intéressantes du principe de la conservation du nombre de M. SCHUBERT: « dans toute question, relative aux propriétés projectives d'une série de courbes (ou de surfaces), le nombre des solutions est, en général et au plus égal à μ fois ce qu'il est, dans la même question pour un simple faisceau, μ étant l'indice de la série. » De ce principe, que DE JONQUIÈRES appela loi de multiplication, M. ZEUTHEN a donné une démonstration analytique que DE JONQUIÈRES publia dans sa *Note pour le « Giornale di Matematiche »*.

14. La proposition de BISCHOFF que nous avons citée plus haut (n. 12) comme ayant été trouvée et appliquée par DE JONQUIÈRES, a été pour ce géomètre le point de départ de recherches particulières[3]) —

---

1) Je renvoie le lecteur désireux d'informations plus étendues à la note de M. SEGRE, citée plus haut; je veux seulement signaler quelques pièces qui s'y rapportent, les seules que je n'aurai pas occasion de citer ailleurs: *Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes* (Comptes rendus Paris **63**, 1866, p. 870—874, 909, 954); *Lettre à M. CHASLES sur une question en litige* (Paris 1867); *Documents relatifs à une revendication de priorité* (lithogr., Paris 4 février 1867); *Lettre de M. l'Amiral DE JONQUIÈRES à M. SALTEL sur une question en litige* (La Rochelle; une page datée du 23 avril 1877).

2) Voir, outre les travaux que nous avons eu ou que nous aurons occasion de signaler en d'autres occasions, la *Note sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certaines formules qui s'y rattachent* (Journ. de mathém. **10**$_2$, 1865, p. 412—416) et l'article *Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces* (Comptes rendus Paris **63**, 1866, p. 793—797).

3) *Détermination du nombre des courbes d'ordre r qui ont un contact d'ordre*

qui attirèrent tout de suite l'attention de A. CAYLEY[1]) — et des efforts par lesquels il arriva[2]) à déterminer le nombre des courbes algébriques d'un ordre déterminé qui, sous de certaines limitations, passent par des points donnés, ont avec une courbe donnée U_m des contacts assignés et satisfont à d'autres conditions étrangères à cette courbe. La formule qui résout cette belle question est trop compliquée pour être rapportée ici; c'est une complication à laquelle on devait s'attendre, vu la grande généralité de la question qu'elle résout; mais sa symétrie et son élégance parfaites font croire qu'il soit impossible de la remplacer par une autre meilleure. DE JONQUIÈRES l'établit de deux manières différentes; dans la première il supposa que U_m fût une courbe unicursale, dans la deuxième qu'elle fût un système de m droites; dans l'un et dans l'autre de ces cas il détermina avec soin quelles sont les modifications que ces hypothèses particulières introduisent dans la formule générale cherchée. Ce procédé de démonstration[3]), avait été imaginé sous la première forme par DE JONQUIÈRES depuis longtemps; CHASLES, auquel il l'avait fait connaître par une lettre du 17 février 1859, n'hésita pas à déclarer qu'il n'avait rien de mathématique[4]), quoique il l'eût reconnue sous sa seconde forme

---

$n(< mr)$ avec une courbe donnée d'ordre m, et qui satisfont, en outre, à $\frac{r(r+3)}{2} - n$ conditions quelconque (Comptes rendus Paris **63**, 1866, p. 423—425); *Détermination des nombres de courbes du degré r qui ont deux contacts, l'un d'ordre n, l'autre d'ordre n' $(n + n' < mr - 1)$, avec une courbe donnée du degré m, et qui satisfont, en outre, à $\frac{r(r+3)}{2} - n - n'$ autres conditions* (id. ib. p. 485—488); *Détermination du nombre des courbes de degré r qui ont, avec une courbe fixe U_m du degré m, autant de contacts d'ordre quelconque qu'on le voudra, et qui satisfont, en outre, à d'autres conditions données* (id. ib. p. 522—526).

1) *Note sur quelques formules de M. E. DE JONQUIÈRES, relatives aux courbes qui satisfont à des conditions données* (id. ib. p. 666—670; ou bien *Mathem. Papers* T. VII, p. 41—43).

2) Voir le *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré m; suivi de quelques réflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques* (Journ. für Mathem. **66**, 1866, p. 289—321). Une généralisation du résultat principal obtenu par DE JONQUIÈRES a été indiquée par CAYLEY dans les Art. 74—93 de son grand mémoire *On the curves which satisfy given conditions* (Phil. Trans. **158**, 1868; ou *Mathem. Papers* **6**, p. 226 et suiv.). Des démonstrations algébriques rigoureuses du même résultat ont été données par M. BRILL; voir les travaux *Ueber zwei Berührungsprobleme* (Mathem. Ann. **4**, 1871, p. 527—549), *Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve* (id. **6**, 1873, p. 32—65) et *Ueber die Correspondenzformel* (id. **7**, 1874, p. 607—622).

3) Pour l'historique de ses origines je renvoie à ma note *Desargues e la geometria numerativa* (Biblioth. mathem. $\mathbf{9}_2$, 1895, p. 51—53).

4) *Lettre à M. CHASLES sur une question en litige* (Paris 1867), p. 8.

comme une méthode «naturelle et très-usitée»[1]); toutefois, dans une communication faite à l'Académie des sciences le 12 mars 1866, il eut recours aux courbes rationnelles, dans un but analogue à celui de DE JONQUIÈRES, en légitimant de la sorte toute une catégorie de raisonnements géométriques.

Le tour de démonstration dont il s'agit s'est imposé par sa puissance, car, même dans le monde des idées, bien souvent, la force prime le droit; il constitue aujourd'hui une des ressources les plus précieuses dont dispose la géométrie énumérative, car c'est un des aspects sous lequel se présente le principe de la conservation du nombre. A ce propos nous remarquerons que notre auteur, non content d'avoir exposé clairement ce principe dans le mémoire que nous avons cité dernièrement[2]), l'étudia à fond au point de vue philosophique, dans un travail plus récent[3]), provoqué par des doutes soulevés par M. DEWULF; les nombreuses et élégantes applications qu'il a développées du même principe à des questions de la géométrie plane et de celle de l'espace[4]) servirent à persuader tout le monde de son immense utilité et à vaincre cette opposition qui attend toute idée vraiment originale et qui semble rompre avec des habitudes intellectuelles surannées.

Par ces remarques nous sommes sortis du sujet de ce chapitre; nous y reviendrons bientôt (n. 16) pour signaler une belle proposition, relative aux réseaux de courbes, que notre auteur établit par les recherches dont nous allons maintenant nous occuper.

---

1) *Aperçu historique*, p. 76 de la 2e éd.

2) Il n'est pas inutile d'en extraire le passage suivant (p. 315—316 du *Mémoire sur les contacts multiples* etc.): « Au fond ce principe découle directement de la *loi de continuité*, à laquelle sont soumises les fonctions algébriques, et il revient à dire que, dans toutes questions concernant ces fonctions, le *nombre* des solutions reste invariable, quelles que soient les conditions particulières qu'on y introduise, pourvu qu'on ait égard aux solutions nulles, infinies, imaginaires, et à l'ordre de multiplicité de chacune d'elles; car ceci n'est, en dernière analyse, qu'une autre manière d'exprimer le théorème fondamental de la théorie des équations, savoir qu'une équation algébrique entière et rationnelle du degré n, possède toujours n racines réelles, ou imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$ ».

3) *Note sur quelques théorèmes fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques, et sur une loi générale d'où l'on peut les faire dériver* (Annali di matem. 8_2, 1877, p. 312—328).

4) En suivant l'exemple d'un juge très-compétent, M. H. SCHUBERT (voir Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 9 [1877], p. 440; *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879, p. 334), je cite, comme particulièrement ingénieuse la détermination, faite par notre auteur, du nombre des constantes desquelles dépend une surface algébrique générale dans son ordre.

V.

Surfaces et courbes gauches algébriques.

15. L'intérêt de DE JONQUIÈRES pour la géométrie des surfaces et des courbes gauches algébriques remonte au moins à l'année 1859; cela ressort d'une petite note[1]) destinée à faire connaître en France les raisonnements par lesquels CAYLEY et SALMON arrivèrent à établir l'existence de vingt-sept droites dans toute surface générale du 3ᵉ ordre; mais c'est seulement trois ans plus tard qu'il commença à s'occuper méthodiquement de ces intéressantes figures.

Le *Treatise on the geometry of three dimensions* de SALMON venait alors de paraître; l'*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* de CREMONA ne comptait que peu de mois; à un mathématicien tel que DE JONQUIÈRES devait en conséquence paraître séduisante l'idée de combler les lacunes que (d'après l'exposé de M. SALMON) présentait la géométrie de l'espace, en lui faisant atteindre le haut niveau de perfection que M. CREMONA avait su donner à la théorie des courbes planes. Les nombreux points de contact entre le premier des travaux de DE JONQUIÈRES sur les singularités des surfaces[2]) et les *Preliminari a una teoria geometrica delle superficie* sont suffisants à prouver que ses nobles efforts ont été couronnés d'un éclatant succès.

Le point de départ, je dois même dire la base, de tout ce travail est la théorie des pôles et des polaires par rapport à une surface d'ordre déterminé. Les propositions établies par DE JONQUIÈRES se rapportent au nombre ou à la situation des points doubles des surfaces d'un faisceau, d'un réseau ou d'un système linéaire ∞^3, et aux contacts qui peuvent avoir lieu entre les surfaces de systèmes différents. Ces théorèmes sont aujourd'hui si connus que nous n'apprendrions rien de nouveau à nos lecteurs en reproduisant ici leurs énoncés. Faisons seulement une exception en faveur du suivant: «Le lieu des points dont chacun a le même plan polaire par rapport à une surface fixe S_m et à l'une des surfaces d'un faisceau (S_n) est une courbe gauche du degré

$$(m+2n-3)^2-(n-1)(n+2m-3)\text{»;}$$

nous le citons car il mène immédiatement au suivant: «Parmi les surfaces de degré n qui forment un faisceau donné, il y en a, en général

1) *Solution de la Question 376 (voir t. XVI, p. 179)* (Nouv. ann. de mathém. 18, 1859, p. 129—138).

2) *Etude sur les singularités des surfaces algébriques. Noeuds ou points coniques* (Journ. de mathém. 7_2, 1862, p. 409—413; datée: Golfe du Mexique, 29 septembre 1862).

$$m\{(m+2n-3)^2-(n-1)(n+2m-3)\}$$

qui touchent une surface donnée du degré m»; c'est un résultat que DE JONQUIÈRES proposa dans les Nouvelles annales de mathématiques comme *Question* sous le *n° 643.*[1])

16. D'un titre très-analogue, mais d'une physionomie très différente est un autre mémoire[2]) de notre savant, dont le but principal est de prouver qu'une surface algébrique de l'ordre n tout à fait générale a

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^7-4n^6+7n^5-45n^4+114n^3-111n^2+58n-960)$$

plans tangents triples.[3]) La détermination de ce nombre est une question que G. SALMON avait traitée un peu confusément dans son mémoire *On the degre of the surface reciprocal to a given one* (Trans. of the r. Irish academy **23**, 1857), puis dans sa *Geometry of three dimensions*; la méthode employée par DE JONQUIÈRES a été jugée digne de prendre place dans la traduction allemande de cet ouvrage.[4]) Elle se fonde sur l'idée assez naturelle, mais sur laquelle notre auteur a d'indiscutables droits de priorité, de considérer un plan bitangent d'une surface S_n comme la position limite d'un plan tangent commun à S_n et à une autre surface analogue S_n', qui tend à coïncider avec S_n, et un plan tritangent comme position limite d'un plan bitangent à S_n et tangent à S_n'.

Ce tour de raisonnement mérite d'autant plus notre attention qu'il est applicable, *mutatis mutandis,* à un grand nombre de questions; DE JONQUIÈRES lui même s'en est servi plus tard[5]) pour déterminer, par des considérations de géométrie à trois dimensions, le nombre des courbes d'ordre n d'un réseau[6]) douées chacune de deux points doubles.[7]) Comme

---

1) Nouv. ann. de mathém. 2_2, 1863, p. 94.

2) *Études sur les singularités des surfaces algébriques. Plans tangents doubles et triples.* (Nouv. ann. de mathém. 3_2, 1864, p. 5—21).

3) Pour $n=3$ ce nombre devient égal à 45, comme on devait s'y attendre, et non à 135, comme dit par inadvertance notre géomètre.

4) SALMON-FIEDLER, l. c. p. 654.

5) *Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques* (Mathem. Ann. **1**, 1869, p. 424—431).

6) Il est bon de remarquer que DE JONQUIÈRES part d'une définition de «réseau de courbes d'ordre» évidemment trop étroite, car elle ne comprend que les réseaux ayant chacun $\frac{n(n+3)}{2}-2$ points de base; mais il raisonne effectivement sur les réseaux généraux dont $C+\lambda C'+\mu C''=0$ est l'équation.

7) Cette question avait été résolue auparavant par M. CREMONA *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (Annali di matem. **6**, 1864) et inductivement par CAYLEY (voir l'art. 35 du mémoire *On the theory of involution*, Transact. of the Cambridge philos. society **11**: 1, 1866; *Mathem. Papers*, T. V, p. 306); DE JONQUIÈRES ne connaissait que ce dernier travail.

tout réseau de courbes de l'ordre n peut se considérer comme la section par son plan des surfaces d'un réseau du même ordre, la question énoncée revient à la détermination du nombre des surfaces d'un réseau qui sont bitangentes à un plan donné; et pour le trouver le savant marin considère avant tout les surfaces du réseau qui touchent en même temps deux plans donnés, en se réservant de faire coïncider le second avec le premier. Par cet artifice logique et en se servant: 1° du nombre — trouvé par CAYLEY[1]) — des courbes d'un réseau douées chacune d'un point de rebroussement, 2° de l'expression — suivant STEINER[2]) — du nombre cherché dans le cas où le réseau est formé par les courbes polaires des points du plan par rapport à une courbe algébrique, il conclut que ce nombre est exprimé par la fonction suivante de n:

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11).^{3)}$$

Cette manière d'arriver à ce résultat est remarquable au moins pour deux raisons; car avant tout elle offre peut-être le premier exemple de l'utilité d'employer des considérations de géométrie de l'espace pour résoudre des problèmes de géométrie énumérative relatifs aux systèmes de courbes planes, utilité qui, une fois établie, transforma ce procédé en un des plus puissants de la géométrie moderne; en deuxième lieu elle prouve quels sont les fruits que l'on peut tirer, dans la recherche de nombres relatifs à des systèmes de ∞^k courbes, de la connaissance des nombres correspondants pour des systèmes ∞^k spéciaux.

17. Tandis que le second des travaux de DE JONQUIÈRES sur les singularités des surfaces a avec le premier une liaison assez superficielle, il y en a un autre[4]) qui — quoique, d'après une déclaration de l'auteur, destiné a développer un programme de recherches sur les courbes gauches, que CHASLES avait esquissé[5]) — représente une véritable conti-

1) Voir le mémoire cité tout-à-l'heure.

2) Voir la célèbre communication faite en 1848 à l'Académie de Berlin: *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* et publiée dans le t. **47** du Journ. für Mathem.

3) Dans une note préliminaire (*Propriétés des réseaux de courbes et de surfaces algébriques*; Comptes rendus Paris **67**, 1868, p. 1338—1340) pour ce nombre est donnée l'expression

$$\tfrac{3}{2}(n-1)\{3(n-1)^3-14(n-1)+11\};$$

en écrivant

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-3)$$

ou voit qu'elle est inexacte.

4) *Etudes sur les courbes à double courbure tracées sur une surface algébrique d'ordre quelconque* (Annali di matem. **5**, 1863, p. 24—38; date: Golfe du Mexique, 21 octobre 1862).

5) *Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe* (Comptes rendus Paris **53**, 1861, p. 985—996).

nuation du mémoire que nous avons analysé au début du n. 15. DE JONQUIÈRES y étudie exclusivement les courbes qui sont des intersections complètes de surfaces algébriques, les systèmes linéaires qu'elles forment et les questions de contact auxquelles elles donnent lieu; pour les résoudre il faut avoir recours à la théorie des surfaces, même un grand nombre des propositions auxquelles on parvient ne sont au fond qu'une façon particulière d'énoncer des théorèmes sur ces figures. Les vérités établies par notre auteur appartiennent en général à la géométrie énumérative et se rapportent, pour la plus grande partie, mais non exclusivement, à la géométrie projective[1]; il ne nous est pas possible d'en transcrire ici les énoncés, même en nous bornant aux principaux; mais il nous semble nécessaire de faire une exception en faveur de deux d'entre eux.

Le premier affirme que par une droite quelconque r de l'espace on peut mener $mn(m+n-2)$ plans tangents à la courbe d'intersection de deux surfaces des ordres m, n; leurs points de contact sont les points où la courbe donnée est coupée par une certaine surface de l'ordre $m+n-2$; ils se trouvent donc sur deux courbes gauches, l'une de l'ordre $m(m+n-2)$ et l'autre de l'ordre $n(m+n-2)$. Notre géomètre propose d'appeler la première *courbe gauche polaire de r*; on aurait tout aussi bien pu donner ce nom à la seconde; c'est certainement à cause de l'ambiguité de cette dénomination qu'elle n'a pas été adoptée et elle est aujourd'hui oubliée.[2])

Le second théorème se rapporte aux faisceaux de courbes déterminés sur une surface de l'ordre n par deux faisceaux de surfaces des ordres m et p; il affirme qu'entre les courbes de ces faisceaux il y en a

$$n\,\{n^2+3(m^2+p^2)+6n(m+p)+12mp-12n-24(m+p)+26\}$$

couples ayant entre elles un contact du 2e ordre. C'est un résultat d'une généralité considérable et d'une grande importance dont, malheureusement, DE JONQUIÈRES n'a pas fait connaître la démonstration. Pour le cas

1) A la géométrie métrique appartient p. ex. le théorème suivant: «Par un point donné on peut mener en général $mn(m+n-1)$ plans normaux à la courbe d'intersection de deux surfaces des ordres m et n».

2) Il semble bien plus avantageux d'introduire la considération de la surface d'ordre $m+n-2$ que l'on pourrait appeler *surface polaire* de la droite par rapport à la courbe. Si $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ et $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ sont les équations homogènes de la courbe considérée et p_{ik} les coordonnées de la droite r, l'équation de la surface polaire est

$$\sum_{ik} p_{ik} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_i} & \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0.$$

$n = 1$ il coïncide avec un théorème que STEINER a énoncé[1]) et que M. BERZOLARI a récemment démontré[2]); en général on peut le considérer comme corollaire d'une formule que M. SEGRE a donnée[3]) pour exprimer le nombre τ des courbes de deux faisceaux situés sur une même surface qui sont osculatrices entre elles[4]): toujours est-il étrange que notre auteur, qui n'avait pas l'habitude de se faire croire sur parole, ait prétendu cela dans un cas où la chose peut paraître assez difficile.

18. Par ces longues et profondes études sur les surfaces algébriques et sur quelques systèmes qu'elles forment, études qui avaient suivi ses travaux sur les séries de courbes planes algébriques, DE JONQUIÈRES était admirablement préparé pour aborder la théorie générale des systèmes de ∞^1 surfaces. On ne doit donc pas s'étonner si, dès le 28 mars 1864, il put présenter à l'Académie des sciences un mémoire[5]) dans lequel se trouvent généralisées pour les surfaces algébriques d'ordre quelconque les célèbres considérations par lesquelles CHASLES, le 15 février de la même année, avait jeté les bases de la théorie des caractéristiques des systèmes de sections coniques. C'est dans l'écrit dont il s'agit que notre mathématicien introduisit les notions de «système de surfaces» et de «caractéristiques» μ, ν, ϱ d'un tel système. Si nous ne croyons pas nécessaire de donner une notice détaillée des théorèmes qu'il y a exposés, c'est que plusieurs sont fidèlement modelés sur ceux que le créateur de la théorie des caractéristiques pour les coniques avait fait connaître dans la communication que nous avons rappelée plus haut. Citons seulement la formule

$$N = \mu r + \nu n + \varrho m,$$

donnant le nombre des surfaces d'un système (μ, ν, ϱ) qui sont tangentes à une surface dont m est le degré, r la classe et n la classe d'une de ses sections planes. DE JONQUIÈRES la démontra avant tout pour une sur-

1) Voyez la communication citée plus haut.

2) *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano* (Atti della r. accad. di Torino **31**, 1896, p. 426—484).

3) Voir la note *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (id. ib. p. 485—501).

4) La formule dont il s'agit est la suivante

$$\tau - 2\pi = 4m - (\sigma + \sigma') - P;$$

en supposant que $\pi, m, \sigma, \sigma', P$ aient les valeurs suivantes

$$n(n + m + p - 4)(n + 2m + 2p - 4),\ mnp,\ nm^2,\ np^2,\ (n-2)(n^2 - 2n + 2)$$

elle donne pour τ l'expression donnée par M. DE JONQUIÈRES. Cette remarque est due à M. SEGRE lui-même.

5) *Propriétés diverses des systèmes de surfaces d'ordre quelconque* (Comptes rendus Paris **58**, 1864, p. 567—571).

face générale, il établit plus tard[1]) qu'elle est vraie également si la surface est formée par un groupe de plans, ou si elle a seulement une ligne double; « on est conduit (dit-il aussi) à admettre qu'elle convient à tous les cas »; des recherches postérieures[2]) ont prouvé que DE JONQUIÈRES avait parfaitement raison de nourrir cette conviction. Analogue à la précédente est la formule

$$N = \mu r + \nu p,$$

qui donne le nombre de surfaces d'un système (μ, ν, ϱ) tangentes à une courbe d'ordre p, ayant une développable osculatrice de degré r. Il est facile de l'établir, si la courbe considérée est l'intersection complète de deux surfaces; DE JONQUIÈRES prouva, dans le mémoire dernièrement cité, qu'elle est encore vraie lorsqu'elle forme, avec $k - 1$ intersections complètes, une nouvelle intersection complète de deux surfaces; il fut en conséquence conduit à admettre qu'elle est toujours vraie; c'est ce que des géomètres sont arrivés, depuis, à établir rigoureusement.[3])

19. En développant cet ordre de considérations, notre auteur a été amené à étudier[4]) les « séries de courbes à double courbure ». Un tel système est engendré par les intersections mutuelles de deux séries projectives de surfaces, l'une de degré m et d'indice μ, l'autre de degré m' et d'indice μ'. Sur ces systèmes DE JONQUIÈRES énonça trois théorèmes, que nous allons examiner, pour en déterminer les fondements et les limites d'applicabilité, et pour essayer de découvrir la voie par laquelle il y est arrivé.

I. « Une droite quelconque de l'espace est rencontrée par $m\mu' + m'\mu$ courbes du système »; on le prouve par une application du principe de correspondance, donc il est vrai pour toute série de courbes gauches.

II. « Un plan quelconque est en général touché par

$$\mu' \cdot m\,(m + 2m' - 3) + \mu \cdot m'\,(m' + 2m - 3)$$

courbes du système » Pour le prouver remarquons que les deux systèmes de surfaces sont coupés par un plan quelconque π de l'espace en deux analogues systèmes projectifs de courbes; chaque courbe gauche de la série tangente au plan π est liée à deux courbes correspon-

1) *Propriétés des systèmes de surfaces d'ordre quelconque* (Comptes rendus Paris 61, 1865, p. 440—443).

2) BRILL, *Ueber Systeme von Curven und Flächen* (Mathem. Ann. 8, 1875, p. 534—538); SCHUBERT, *Ueber geometrische Erweiterungen des Bézout'schen Fundamentalsatzes* (Göttinger Nachrichten 1879, p. 401—426) et *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig 1879), p. 54.

3) SCHUBERT, *Kalkül* etc., p. 296.

4) *Note sur les séries de courbes à double courbure* (Giorn. di matem. 4, 1866, p. 210—211).

dantes des deux systèmes, tangentes entre elles. Or le **Tactinvariant** de deux courbes planes des ordres m et m' est du degré $m'(m'+2m-3)$ dans les coefficients de la première et du degré $m(m+2m'-3)$ dans ceux de la seconde; si, donc, les deux systèmes de surfaces sont représentés par les équations $\varphi(x, y, z, \lambda)=0$, $\psi(x, y, z, \lambda)=0$, des degrés μ et μ' en λ, en écrivant que deux de leurs surfaces correspondantes sont coupées par π en deux courbes tangentes entre elles, on arrive à une équation en λ du degré $\mu m'(m'+2m-3)+\mu' m(m+2m'-3)$. D'où suit le théorème énoncé; par ce raisonnement (qui est probablement celui qu'employa DE JONQUIÈRES) il est en même temps prouvé que ce théorème est vrai certainement pour les séries rationnelles; par des exemples on verra qu'il subsiste seulement pour elles. — Les deux nombres dont parlent les théorèmes I et II s'appellent les «caractéristiques de la série de courbes gauches».

III. «Le nombre des points doubles de la série est exprimé comme il suit:

$$\mu' m\,[(m+2m'-3)^2-(m'-1)(m'+2m-3)]$$
$$+\mu m'\,[(m'+2m-3)^2-(m-1)(m+2m'-3)].»$$

Le nombre dont il s'agit est, en effet, égal à celui des surfaces correspondantes des deux systèmes donnés, qui sont tangentes entre elles. Or, du théorème que nous avons cité à la fin du n. 15, on tire tout de suite que le **Tactinvariant** de deux surfaces des ordres m, m' est, dans les coefficients de la première de l'ordre

$$m'\{(m'+2m-3)^2-(m-1)(m+2m'-3)\}$$

et dans les coefficients de la seconde de l'ordre

$$m\{(m+2m'-3)^2-(m'-1)(m'+2m-3)\}.$$

Si donc on suppose que les deux systèmes de surfaces soient encore représentés par les équations $\varphi(x, y, z, \lambda)=0$, $\psi(x, y, z, \lambda)=0$ et que l'on cherche de déterminer λ de manière qu'un contact ait lieu entre deux surfaces correspondantes, on arrive à une équation d'un degré égal à la somme de ces deux nombres. Cela prouve que pour la validité du théorème III de DE JONQUIÈRES il est **suffisant** (et par des exemples on prouve qu'il est **nécessaire**) qu'il s'agisse de séries rationnelles. — De ces théorèmes notre géomètre fit des applications remarquables aux systèmes de ∞^1 coniques de l'espace.[1])

Je finirai ce Chapitre en citant de nouveau les belles investigations

1) Il trouva ainsi, d'accord avec M. SCHUBERT (*Kalkül* etc., p. 95) $\mu\nu^7=34$, $\varrho\nu^7=92$, $\nu^8=116$, $\delta\nu^7=140$.

(comp. n. 13) sur les limites de validité de théorèmes relatifs aux systèmes de (courbes et de) surfaces qu'il fit dans un travail que nous avons déjà cité[1]) plus d'une fois.

VI.

Transformations géométriques. Polyèdres.

20. Notre analyse des travaux géométriques du savant marin, dont nous nous occupons, approche de sa fin; nous allons la terminer par une courte analyse des fruits qu'il recueillit dans un champ dont M. CREMONA est le maître incontesté.

Presque dès le début de sa carrière mathématique, DE JONQUIÈRES a été attiré par la théorie des transformations géométriques, en s'occupant[2]) de déduire de nouvelles conséquences de cette loi de transmutation des figures que MAGNUS avait fait connaître en 1832.[3])

Mais il a été amené à apporter à cette théorie une contribution vraiment importante par le désir de perfectionner la théorie des courbes gauches algébriques, pour étudier lesquels des bons moyens faisaient défaut, dès qu'on supposait qu'il ne s'agissait pas d'intersections complètes de surfaces. DE JONQUIÈRES, avec raison, crut reconnaître qu'on pouvait arriver à un procédé de recherche assez étendu en généralisant la méthode par laquelle SEYDEWITZ avait engendré et étudié les cubiques gauches.[4])

Mais pour atteindre cette généralisation il est indispensable qu'on ait à sa disposition au moins une correspondance biunivoque entre les points de deux plans différente de l'homographie. Une telle correspondance se trouve établie dans un mémoire que DE JONQUIÈRES présenta à l'Institut

---

1) *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et des surfaces algébriques d'ordre quelconque* (Paris 1866). La partie doctrinale (non polémique) de ce mémoire est la reproduction de celui (daté de Saïgon, 24 décembre 1865) qui a été soumis au jugement de l'Académie des sciences le 5 fév. de l'année suivante (Comptes rendus Paris **62**, 1866, p. 293—294 et 349) sous le titre: *Essai d'une théorie des séries et des réseaux de courbes (sur le plan et dans l'espace) et des surfaces.* Une nouvelle rédaction du même mémoire a été présentée plus tard à la même corporation (Comptes rendus Paris **63**, 1866, p. 214 et 387); on peut lui joindre les *Nouvelles observations sur les séries ou systèmes de courbes* annoncées dans la suite (id. p. 909).

2) *Note relative à la construction de diverses courbes à trois points multiples des degrés supérieurs, et théorèmes relatifs à ces courbes* (Annali di matem. **1**, 1858, p. 110—112; daté: *Arcole*, 3 août 1857).

3) *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie* (Journ. für Mathem. **8**, 1832, p. 51—63).

4) *Linear-Construction einer Curve doppelter Krümmung* (Archiv der Mathem. und Physik **10**, 1847, p. 211).

de France dans les séances du 10 octobre 1859 et du 23 janvier 1860; les Comptes rendus[1]) en contiennent un court résumé, mais un rapport n'en a jamais été fait; la première partie de ce mémoire parut en 1864[2]), et le travail complet seulement vingt-un ans après, par les soins de M. GUCCIA[3]): toutefois, depuis longtemps, le nom de *transformation DE JONQUIÈRES* a été donné à la correspondance qui y est étudiée.

Ce mémoire de DE JONQUIÈRES débute par la remarque que toutes les courbes de l'ordre n, situées dans un plan, et qui ont un point $(n-1)$-tiple et $2(n-1)$ points simples communs forment un de ces systèmes qu'on appelle à présent réseaux omaloïdiques; car ces courbes sont telles qu'il en passe une par deux points quelconques du plan et que deux quelconques d'entre elles se coupent en un seul point variable. En établissant une correspondance biunivoque entre ces courbes et les droites d'un autre plan π_1, et en ajoutant la condition que le point où se coupent deux droites quelconques de π_1 corresponde au point variable commun aux deux courbes correspondantes de π, on arrive à une correspondance birationelle entre π et π_1. Deux figures correspondantes de π et π_1 s'appellent *isographiques*; et DE JONQUIÈRES fait la remarque très-importante que la relation entre ces plans est symétrique, de manière que en π_1 on a un autre système de ∞^2 courbes du degré n ayant un point $(n-1)$-tiple et $2(n-1)$ points simples communs. Il ajoute que, si π_1 coïncide avec π, il y a $n+2$ points doubles; et pour le prouver il considère le lieu (*courbe isologique*) des points P dont les correspondants P_1 se trouvent sur une droite passant par un point fixe.

En projetant deux plans isographiques de deux points quelconques de l'espace on arrive à deux *faisceaux isographiques*; par les intersections de leurs droites correspondantes ils engendrent une courbe de l'ordre $n+2$, dont DE JONQUIÈRES établit quelques propriétés et indique la construction de la tangente.

Pour prononcer un jugement équitable sur ces recherches de notre auteur, il faut bien se souvenir qu'elles sont antérieures à la théorie générale des transformations birationnelles; car c'est seulement de la sorte

1) T. 49, 1859, p. 542.

2) *De la transformation géométrique des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres* (Nouv. ann. de mathém. 3_2, 1864, p. 97—111).

3) *Mémoire sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque au moyen de deux faisceaux correspondants de droites* (Giorn. di matem. 23, 1885, p. 48—75; date: A bord la frégate le d'Assas, 25 novembre 1859). Voir ce que dit DE JONQUIÈRES en présentant à l'Académie des sciences un tirage à part de cette publication (Comptes rendus Paris 101, 1885, p. 499—500).

qu'on peut apprécier la valeur d'un grand nombre de raisonnements qu'il emploie et qui sont applicables *ad litteram* à ces transformations. Ajoutons que la méthode de génération des courbes gauches utilisée par lui peut se généraliser pour des transformations CREMONA quelconques; toutefois on ne peut nier que son importance ne pourra être établie au juste qu'après avoir résolu la question suivante: « quelles sont les courbes gauches algébriques qu'on peut engendrer de cette manière? »

DE JONQUIÈRES fit plus tard une application de sa transformation en cherchant[1]) combien de courbes d'un « réseau DE JONQUIÈRES » de l'ordre n sont tangentes à deux courbes données, ou sont bitangentes ou osculatrices à une courbe donnée; il est évident que ces nombres sont égaux à ceux qui expriment combien de droites sont tangentes en même temps à deux courbes données, ou combien de tangentes doubles ou d'inflexion possède une courbe algébrique déterminée. Dans le cas $n = 2$, on obtient comme cas particuliers les nombres de coniques passant par trois points et tangentes à deux courbes données, ou bitangentes ou osculatrices à une; DE JONQUIÈRES énonce, sans démonstration, les nombres analogues de coniques qui passent par $k\,(=2, 1, 0)$ points et sont $(4-k)$-tangentes à une courbe donnée; mais ces nombres, que CAYLEY avait cru un moment exacts[2]), furent bientôt reconnus pour faux[3]), à l'aide des résultats auxquels était arrivé M. ZEUTHEN.

21. DE JONQUIÈRES, dans la dernière période de sa vie, lorsque le marin eut cédé définitivement la place au géomètre, s'occupa aussi de transformations birationnelles en général.

Avant tout il en signala une classe remarquable correspondant à l'hypothèse que l'ordre n soit un nombre composé kl[4]); si α_r est le nombre des points fondamentaux r-tiples du premier plan et α_r' le nombre analogue pour le second plan, il a trouvé qu'on peut prendre:

$$\alpha_1 = 2(l-1),\quad \alpha_{l-1} = 1,\quad \alpha_l = 2(k-1),\quad \alpha_{l(k-1)} = 1$$
$$\alpha_1' = 2(k-1),\quad \alpha_{k-1}' = 1,\quad \alpha_k' = 2(l-1),\quad \alpha_{k(l-1)}' = 1.$$

Ensuite il remarqua que la théorie dont il s'agit a un côté arithmétique, qui consiste dans la résolution, en nombres entiers non négatifs,

1) *Du contact des courbes planes, et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque* (Nouv. ann. de mathém. 3_2, 1864, p. 218—222).

2) *Mathem. papers* T. VII, p. 550.

3) Id. p. 553.

4) *Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre n* (Comptes rendus Paris **101**, 1885, p. 720—724); comp. GUCCIA, *Sur les transformations géométriques planes birationnelles* (id. ib. p. 808—809).

des deux équations

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} i\alpha_i = 3\,(n-1), \qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} i^2\alpha_i = n^2 - 1;$$

et il signala une méthode pour déduire, des solutions de l'ordre $n+1$ [1]), ou, plus généralement, de l'ordre $n+k$ [2]) des solutions relatives à l'ordre n. Les règles qu'il a imaginées sont certainement ingénieuses et pratiques; mais comme elles mènent, dans le même temps à des solutions *géométriques* (c'est-à-dire à de vrais réseaux omaloïdiques) et à des solutions purement arithmétiques, leur valeur a été généralement jugée comme assez bornée. D'ailleurs, pour être juste, il faut remarquer que la possibilité de lier la théorie des transformations CREMONA à la théorie des nombres, avait été remarquée bien avant par M. F. P. RUFFINI[3]), sans toutefois arriver à des conclusions dont l'importance fût capable de prouver qu'on avait trouvé la vraie voie pour approfondir ultérieurement le sujet.

22. DE JONQUIÈRES s'est encore occupé dans sa vieillesse d'une autre théorie géométrique, d'une théorie qui n'a aucun point de contact avec celles que nous avons rencontrées jusqu'ici; mais il l'a traitée plutôt comme historien que comme mathématicien: je veux parler de la théorie des polyèdres.

Nous ignorons par quel chemin il a été amené à examiner, au point de vue historique et critique, la célèbre relation d'EULER $F+S=A+2$, entre les nombres des faces, des sommets et des arrêtes d'un polyèdre: nous ne pouvons que citer les plus anciens travaux sur ce sujet; dans l'un d'eux[4]) il passe en revue les démonstrations que donnèrent de cette relation LEGENDRE, CAUCHY et POINSOT, dans l'autre[5]) il fait un examen critique des considérations sur sa validité dues à LHUILIER et GERGONNE. Mais, en poursuivant ses recherches sur la même formule, il remarqua qu'elle se trouve aussi dans un mémoire posthume de DESCAR-

---

1) *Solution d'une question d'Analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations* CREMONA (Comptes rendus Paris **101**, 1885, p. 857—861).

2) *Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations* CREMONA (id. ib. p. 921—922). Voir aussi l'*Étude sur une question d'analyse indéterminée* (Giorn. di matem. **24**, 1886, p. 1—11).

3) *Sulla risoluzione delle due equazioni di condizione delle trasformazioni cremoniane delle figure piane* (Mem. dell' acc. di Bologna 8_3, 1877); *Di un problema di analisi indeterminata che s' incontra nella teoria geometrica delle trasformazioni delle figure piane* (id. 9_3, 1878); *Di alcune singolarità nei fasci e nelle reti di linee piane algebriche* (id. 1_4, 1880).

4) *Sur un point fondamental de la théorie des polyèdres* (Comptes rendus Paris **110**, 1890, p. 110—115).

5) *Note sur le théorème d'*EULER *dans la théorie des polyèdres* (id. ib. p. 169—173).

TES, que M. FOUCHER DE CAREIL découvrit parmi les papiers de LEIBNIZ et qu'il publia en 1860; se proposant de prouver la priorité, de *fait* sinon de *droit*, de DESCARTES, il écrivit deux notes remarquables [1]), en plusieurs passages desquelles l'historien cède la place au géomètre, et où le mathématicien perce sous le manteau de l'érudit. La thèse historique avancée et démontrée par DE JONQUIÈRES, avait été proposée longtemps avant par R. BALTZER [2]); c'est ce que je me permis de faire remarquer au savant amiral (qu'on me pardonne ce souvenir personnel relatif à une circonstance qui fut le point de départ de mes rapports cordiaux avec l'illustre défunt!) et que DE JONQUIÈRES s'empressa de reconnaître. [3]) — Non encore satisfait de cette revendication en faveur de son compatriote, il crut bon de consacrer un travail *ad hoc* à rééditer, corriger, traduire et commenter le texte de DESCARTES, qui n'existait plus que dans un volume qui était désormais une vraie rareté bibliographique; de ce travail que l'Institut de France a accueilli parmi ses publications [4]), un résumé a été publié dans l'organe officiel de l'histoire des mathématiques [5]); de telle sorte qu'il n'y ait plus aucun danger que ce nouveau laurier de DESCARTES soit à l'avenir oublié.

VII.

Algèbre et théorie des nombres.

23. Ces efforts de DE JONQUIÈRES pour attirer l'attention des mathématiciens sur une découverte, dont on avait méconnu le plus ancien auteur, nous font souvenir de ceux qu'il avait faits six ans plus tôt [6])

1) *Note sur un mémoire de DESCARTES longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres* (Comptes rendus Paris **110**, 1890, p. 261—266); *Écrit posthume de DESCARTES sur les polyèdres* (id. ib. p. 315—317).

2) Monatsberichte der Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1861, p. 1043—1046.

3) Comptes rendus Paris **110**, 1890, p. 687 note; voir aussi la note à la p. 36 du mémoire cité dans la note qui suit.

4) *Écrit posthume de DESCARTES. De solidorum elementis, texte latin (original et revu) suivi d'une traduction française avec notes.* Mém. Paris **45**, 1899, p. 325—379; les tirages à part portent sur le feuillet de titre l'année d'impression 1890. — Comparez *Note sur un mémoire présenté, qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de DESCARTES: De solidorum elementis, la traduction et le commentaire de cet ouvrage* (Comptes rendus Paris **110**, 1890, p. 677—680).

5) *Écrit posthume de DESCARTES intitulé « de solidorum elementis ». Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives* (Biblioth. Mathem. 4_2, 1890, p. 43—56).

6) *Sur la règle de NEWTON pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations algébriques numériques* (Comptes rendus Paris **99**, 1884, p. 62—67); *Sur deux théorèmes de M. SYLVESTER et sur la règle de NEWTON* (id. ib. p. 111—115).

pour faire admirer cette célèbre règle concernant les équations numériques que NEWTON avait énoncée dans son *Arithmétique universelle*[1]) et qui, après avoir opposé une résistance opiniâtre à de nombreux efforts, avait fini (1865) par être solidement établie par SYLVESTER. Mais sur cette règle notre auteur fit encore des remarques qui ne sont pas indignes d'un homme de sa renommée[2]); en particulier il établit une comparaison entre les conclusions auxquelles elle mène et les résultats qu'on obtient en appliquant la règle des signes de DESCARTES, il parvint de la sorte à prouver (ce que d'ailleurs il était facile de prévoir) que les indications données par celle-ci ne sont jamais supérieures en exactitude à celles fournies par le théorème newtonien.

Amené par ces recherches historiques et critiques à réfléchir sur la théorie des équations numériques, le géomètre dont nous nous occupons ne tarda pas à y recueillir une riche moisson de vérités nouvelles[3]), qui suivant notre sentiment, n'attirèrent encore pas assez l'attention des mathématiciens, quoique elles soient capables de donner une confirmation éclatante de l'utilité d'introduire méthodiquement dans cette théorie des considérations géométriques.

Il débuta par la remarque que NEWTON, dans le VII^e § de son *Enumeratio linearum tertii ordinis,* fit connaître un procédé pour résoudre une équation algébrique

$$x^m + A_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0 = 0$$

à l'aide de deux courbes de degré $< m$; or on peut évidemment atteindre le même but en cherchant les intersections de la droite $y + A_0 = 0$ avec la courbe

$$y = x^m + A_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + A_1 x.$$

C'est au fond une remarque que G. CRAMER avait fait presque un siècle et demi plus tôt.[4]) Mais tandis que le géomètre genévois l'appliqua

1) « D'après SAMUEL HORSLEY (dit M. MARIE, T. V, 1884, p. 199, de son *Histoire des sciences mathématiques et physiques*), l'éditeur des œuvres de NEWTON, cette règle serait du très-illustre CAMPBELL, qui l'aurait présentée à la Société Royale de Londre »; cette opinion provient probablement d'une malentendue; aucun historien ne l'a adoptée.

2) *Règle de NEWTON-SYLVESTER. Suite à deux précédentes communications* (Comptes rendus Paris **99**, 1884, p. 165—170). *Examen de deux points de doctrine relatifs à la Règle de NEWTON. Conclusions* (id. ib. p. 269—272).

3) Voir la trilogie *Sur les équations algébriques.* I. *Considérations générales. Equations binômes. Equations trinômes.* II. *Equations polynômes.* III. *Des équations irrationnelles* (id. ib. p. 345—351, 469—473, 483—488).

4) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750), p. 93 et suiv.

à la résolution effective de l'équation donnée, DE JONQUIERES s'en servit pour arriver à une vue d'ensemble sur ses propriétés générales et sur les affections auxquelles elle est sujette; et, en effet, par une discussion de la courbe représentée par l'équation $y = x^m + A_r x^r$ il arriva à ce beau théorème: « Une équation trinôme $x^m + A_r x^r + A_0 = 0$, quels que soient les degrés m et r des deux termes en x, a, au plus, quatre racines réelles si m est pair, et trois si m est impair; elle peut d'ailleurs avoir toutes ses racines imaginaires (ou toutes moins deux) dans le premier cas, et toutes moins une dans le second cas. »[1])

Pour généraliser cette proposition, le même auteur donna la définition suivante: « des équations algébriques, complètes ou incomplètes, ordonnées suivant les puissances entières de la variable, appartiennent à la même espèce lorsque 1° elles ont le même nombre de termes, 2° les exposants des termes occupant respectivement le même rang sont de même parité, 3° les coefficients qui ont les mêmes rangs respectifs y sont affectés des mêmes signes. » Cela posé, « le nombre maximum de racines réelles que comporte une équation algébrique donnée d'espèce, est invariable »; théorème d'autant plus remarquable qu'il ne cesse de subsister si on supprime l'hypothèse que les exposants de la variable soient tous entiers. L'élégance et la généralité de cette proposition, conjointement à la simplicité des raisonnements qu'on peut employer pour l'établir, en conseillent l'introduction dans tout traité élémentaire d'algèbre supérieure.

La considération de l'*espèce* d'une équation a amené notre géomètre à un autre théorème sur les polynômes algébriques complets, qu'il a énoncé[2]) et démontré[3]) et d'où il sut faire découler une conséquence assez importante. C'est que, pour quelque espèce d'équation que ce soit, pourvu qu'elle soit complète, on peut toujours déterminer une infinité de systèmes de valeurs numériques des coefficients, tels que, pour chacun de ces systèmes, l'*équation possède* effectivement et précisément autant de racines réelles positives que de variations et *autant* de racines réelles négatives que de permanences. C'est un complément utile à la règle des signes de DESCARTES.

---

1) Une autre démonstration géométrique de la même proposition a été donnée par M. LALANNE dans sa note *Sur les équations algébriques* (Comptes rendus Paris **99**, 1884, p. 463—469).

2) *Théorèmes concernant les polynomes algébriques complets; application à la règle des signes de DESCARTES* (id. ib. p. 1143—1144).

3) *Étude sur les équations algébriques numériques dans leurs relations avec la règle des signes de DESCARTES* (Atti dell' accademia pontificia dei Nuovi Lincei **38**, 1886, p. 55—74; ce mémoire qui porte la date Paris, 7 avril 1885, a été présenté à l'Académie pontificale dans sa séance du 18 janvier de la même année!).

24. Tandis que la théorie des équations n'occupa qu'une courte période de la vie de DE JONQUIÈRES, l'arithmétique supérieure fut un sujet d'études auquel il se consacra pendant presque un quart de siècle, le dernier de sa noble vie; des occupations de telle nature ne doivent pas surprendre dans un mathématicien qui, dans les questions géométriques, considéra toujours de préférence le côté numérique. C'est de l'année 1878 que datent ses premières publications sur la théorie des nombres.

Deux d'entre elles[1]) servent à établir que les équations indéterminées

$$x^3 \pm a = y^2,$$

ne peuvent être résolues en nombres entiers lorsque a est un nombre de l'une des formes suivantes

$$(8b+1)^3 - 4, \quad (8b+5)^3 - 4, \quad (4b+2)^3 - 1;$$

si au contraire la constante $\pm a$ a la valeur b^2, l'équation citée peut se résoudre par une méthode que notre auteur fit connaître dans un de ses derniers travaux[2]), en en faisant application au cas $a = 3$, sur lequel son attention avait été fixée par une question proposée dans L'intermédiaire des mathématiciens.

Il est bon de citer ici en passant deux autres travaux[3]) de DE JONQUIÈRES qui appartiennent à l'analyse indéterminée quadrato-cubique; ils ont pour but la détermination des cas de résolubilité en nombres entiers non négatifs de l'équation

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$$

de laquelle dépend[4]) la détermination des surfaces osculatrices à une surface algébrique donnée.

Dans le cours de la même année 1878 notre mathématicien fit paraître trois autres mémoires sur la représentation d'un nombre par une forme quadratique[5]); mais les applications qu'il en fit sont entachées d'une erreur

1) *Détermination de certains cas généraux où l'équation $x^3 \pm a = y^2$ n'admet pas de solution en nombres entiers* (Nouv. ann. de mathém. **17**$_2$, 1878, p. 374—381); *Au sujet des cas d'impossibilité d'une solution en nombres entiers de l'équation $x^3 \pm a = y^2$* (id. ib. p. 514—516).

2) *Question 1371* (L'interméd. des mathém. **6**, 1899, p. 91—95).

3) *Note sur le degré des surfaces osculatrices* (Comptes rendus Paris **98**, 1883, p. 1025—1026); *Etude arithmétique d'une équation indéterminée du troisième degré* (Atti dell' accad. pontif. dei Nuovi Lincei **37**, 1886, p. 183—188).

4) HERMITE, *Cours d'analyse* T. I (Paris 1873), p. 149.

5) *Études sur les décompositions en somme de deux carrés, du carré d'un nombre entier composé de facteurs premiers de la forme $4n+1$, et de ce nombre lui-même. Formules et applications à la résolution complète, en nombres entiers, des équations $y = x^2 + (x-1)^2$ et $y^2 = z^2 + (z-1)^2$.* (Nouv. ann. de mathém. **17**$_2$, 1878,

que M. NETTO a remarquée[1]) et dont la gravité ne saurait être niée. Il a été un peu plus heureux en découvrant une formule pour exprimer le nombre des nombres premiers n'excédant pas une limite assignée[2]); je dis *un peu* seulement, car cette formule n'était pas nouvelle, LEGENDRE l'ayant découverte au commencement du XIX[e] siècle.[3]) C'est ce que DE JONQUIÈRES s'empressa de déclarer lui-même.[4]) Mais ce rappel à l'activité de service d'un ancien résultat n'a pas été stérile pour la science, car il provoqua de savants développements de la part de M. LIPSCHITZ[5]); et ceux-ci poussèrent notre géomètre à publier[6]) un raisonnement pour démontrer la formule en question, qui est remarquable, pour son caractère tout à fait élémentaire, parce qu'il se fonde exclusivement sur la règle dite crible d'ERATOSTHÈNE et sur une propriété, que tout le monde connaît, des coefficients binomiaux.

25. Cette circonstance n'a pas été la seule dans laquelle l'auteur des *Mélanges* dut reconnaître d'avoir été prévenu; en effet dans son plus ancien essai[7]) pour démontrer l'impossibilité en nombres entiers, affirmée par FERMAT, de l'équation $a^n + b^n = c^n$, il choisit la même voie qu'ABEL avait tracée dans une lettre adressée à HOLMBOE le 4 août 1823.[8])

Au dernier théorème de FERMAT se rattache aussi le problème[9]) s'il est possible, dans la formule $p^n q^n = c^n - b^n$, d'exprimer c et b par des fonctions algébriques de p et q telles que l'identité littérale s'établisse finalement entre les deux membres; DE JONQUIÈRES arriva à la conclusion

p. 241—247, 289—310); *Décomposition du carré d'un nombre N et de ce nombre lui-même en sommes quadratiques de la forme $x^2 + ty^2$, t étant un nombre rationnel positif ou négatif; résolution en nombres entiers du système des équation déterminées* $y^2 = x^2 + t(x + \alpha)^2$, $y^2 = z^2 + t(z + \beta)^2$ (id. ib. p. 419—425, 433—446); *Méthode nouvelle pour la décomposition des nombres en sommes quadratiques binaires* (Comptes rendus Paris **87**, 1878, p. 399—402).

1) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **10** (1878), p. 137—138.

2) *Formule pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné* (id. **95**, 1882, p. 1144—1146).

3) *Théorie des nombres*, IV[e] Partie (2[e] éd. 1808), p. 414.

4) *Sur la formule récemment communiquée à l'Académie au sujet des nombres premiers. Lettre à M. BERTRAND* (Comptes rendus Paris **95**, 1882, p. 1343—1344).

5) *Sur une communication de M. DE JONQUIÈRES relative aux nombres premiers* (id. **95**, 1882, p. 1344—1346 et **96**, 1882, p. 58—61).

6) *Addition à une note sur les nombres premiers* (id. ib. p. 231—232).

7) Comptes rendus Paris **98**, 1884, p. 863—864; cette note contient l'analyse d'un mémoire présenté à l'académie pontificale des Nouveaux Lyncées le 11 août 1884.

8) ABEL, *Oeuvres complètes*, éd. SYLOW et LIE, t. II, p. 254.

9) *Sur une question d'algèbre qui a des liens avec le dernier théorème de FERMAT* (Comptes rendus Paris **120**, 1895, p. 1139—1143, 1236).

que, si $n > 2$, en dehors des solutions triviales, il n'en existe pas d'autres, sans toutefois déterminer en quoi le déchiffrement de la célèbre énigme était avancé.

Ce travail, dans lequel DE JONQUIÈRES introduisit des considérations algébriques dans une question d'arithmétique pure, fait pendant à un couple de travaux où il considéra du point de vue arithmétique la théorie des fonctions elliptiques[1]) et celle des déterminants.[2]) L'espace nous fait défaut pour les analyser; nous voulons seulement extraire du second cette élégante proposition: «le produit de n nombres entiers différents, multiplié par le produit de leurs différences deux à deux, a pour valeur un multiple de $1!\,2!\cdots n!$»; c'est une belle généralisation de la propriété qu'a le produit de n nombres consécutifs quelconque d'être divisible par $n!$ DE JONQUIÈRES se borna à en donner l'énoncé; mais un de ses collègue de la marine — M. EMILE GUYOU — l'établit par un raisonnement simple et élémentaire que notre géomètre présenta à l'Académie des sciences.[3])

26. Nous abordons maintenant un sujet de recherches numériques plein d'intérêt, auquel le savant dont nous nous occupons a consacré un groupe de travaux[4]) nombreux et brillants, qui lui ont valu la gloire d'avoir perfectionné en un point important une théorie qui, depuis LAGRANGE, était demeurée stationnaire; je veux parler des fractions continues périodiques. Comme on sait, l'illustre mathématicien italien en fit application au développement de la racine carrée $(\sqrt{E})$ d'un nombre entier, sans toutefois approfondir la liaison existant entre la période du

---

1) *Sur une relation de recurrence qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques* (Comptes rendus Paris **101**, 1885, p. 415—417).

2) *Sur les dépendances mutuelles des déterminants potentiels* (id. **126**, 1895, p. 408—410, 580). L'auteur donne le nom de *potentiel* à un déterminant dont chaque ligne ne contient que des puissances entières de l'élément qui la caractérise et dont chaque colonne contient une même puissance des divers éléments.

3) Voir la note *Démonstration d'un théorème sur les nombres premiers* (id. ib. p. 534—537).

4) *Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques* (id. **96**, 1883, p. 568—571); *Sur la composition des périodes* (id. ib. p. 694—696); *Additions aux communications précédentes sur les fractions continues périodiques* (id. ib. p. 832—833); *Loi des périodes* (id. ib. p. 1020—1023, 1129—1131, 1210—1213); *Sur les fractions continues périodiques dont les numérateurs diffèrent de l'unité* (id. ib. p. 1297—1300); *Études des identités qui se présentent entre les réduites appartenant, respectivement, aux deux modes de fractions continues périodiques* (id ib. p. 1351—1354); *Lois de coïncidences entre les réduites des fractions continues des deux modes* (id ib. p. 1420—1423); *Lois des identités entre les réduites des fractions périodiques des deux modes* (id. ib. p. 1490—1493); *Lois des identités entre les réduites des deux modes* (id. ib. p. 1571—1574); *Études sur les fractions continues périodiques* (id. ib. p. 1721—1724).

développement et la nature arithmétique du nombre E. Or notre auteur découvrit que, en considérant la multitude des nombres entiers, il y a une infinité, et même une infinité de groupes, où les périodes sont soumises à des lois absolues. Quant aux autres, si leurs périodes sont moins disciplinées, l'indépendance individuelle est néanmoins loin d'y être complète; car on retrouve encore des éléments plus ou moins nombreux de subordination parmi les périodes de ces nombres, classés par groupes. DE JONQUIÈRES parvint à ces conclusions en se servant tour à tour de fractions continues à numérateurs égaux à l'unité et de fractions à numérateurs quelconques. Cette application de fractions, dans lesquelles LAGRANGE ne voyait guère qu'un sujet de curiosité, le persuada des précieuses qualités qu'elles ont; dès lors il se fit l'apôtre de leur introduction méthodique dans l'arithmétique. Or cette introduction s'est accomplie bien avant la proposition de notre géomètre; cette proposition ne manquait donc pas d'opportunité, mais elle n'était pas nouvelle; toutefois il lui reste le mérite d'avoir su tirer des conclusions nouvelles, avec une facilité étonnante, de la comparaison des développements d'un même radical quadratique en fractions continues d'espèces différentes.

27. Tandis que, par ces beaux travaux, DE JONQUIÈRES apparaît en arithmétique comme un élève de l'école française, il y en a d'autres montrant que, non seulement il était un admirateur sincère du génie de GAUSS[1]), mais qu'il s'était rendu maître des concepts des méthodes par lesquels ce grand mathématicien a donné un essor magnifique et une physionomie nouvelle à la chimie des nombres.[2]) Les travaux auxquels je fais allusion se rapportent aux racines primitives des nombres premiers[3]) et à celles que notre géomètre appellait «secondaires»[4]); ils ont pour but l'investigation des propriétés dont sont doués les produits de ces racines. Aux théorèmes, simples mais non sans élégance, exprimant ces propriétés,

---

1) Cette admiration est visible dans deux courtes notes (*Sur une lettre de GAUSS, du mois de juin 1805*, Comptes rendus Paris **122**, 1896, p. 829—830; *Au sujet d'une lettre inédite de GAUSS*, id. ib. 857—859), dont la première contient une lettre adressée par le grand mathématicien au traducteur des *Disquisitiones arithmeticae* (DELISLE), tandis que l'autre donne des extraits de l'article que, sur la traduction française de cet ouvrage, écrivit POINSOT dans le Moniteur universel du 21 mars 1807.

2) Un témoignage plus modeste de ses études sur GAUSS est donné par sa *Berichtigung von zwei Druckfehlern im Band II von GAUSS Werken* (Göttinger Nachrichten 1896, p. 365).

3) *Quelques propriétés des racines primitives des nombres premiers* (Comptes rendus Paris **122**, 1896, p. 1451—1455).

4) *Quelques propriétés des racines secondaires des nombres premiers* (ib. id. p. 1513—1517).

notre auteur ajouta l'énoncé de plusieurs propositions empiriques, dont la vérité ne tarda pas à être établie par le P. PEPIN.[1])

Comme dérivations des idées de GAUSS il faut encore citer un remarquable complément que DE JONQUIÈRES donna à une proposition sur la fonction $\frac{x^p - y^p}{x - y}$ qu'on lit dans les *Disquisitiones arithmeticae*[2]), des remarques nouvelles sur les résidus de puissances[3]) et des contributions de détail[4]) à la difficile question « pour quelles valeurs de D est résoluble l'équation $t^2 - Du^2 = -1$? ».

Nous finirons en citant les applications de solutions algébriques que notre auteur fit à la résolution des équations indéterminées suivantes:

$$(a+1)\,x^2 - ay^2 = 1$$
$$(ma^2 \pm 1)\,x^2 - my^2 = \pm 1$$
$$(ma^2 \pm 4)\,x^2 - my^2 = \pm 1,$$

où a est un nombre entier, impair dans les deux dernières[5]); ce sont des questions d'analyse indéterminée du 2e degré, en traitant lesquelles DE JONQUIÈRES fut amené[6]) à faire une comparaison des méthodes qu'employèrent pour les résoudre les deux grands mathématiciens — LAGRANGE et GAUSS — qui furent ses maîtres en Arithmétique, comme CHASLES l'avait été en Géométrie.

---

1) *Au sujet d'une précédente communication, relative à quelques propriétés des racines primitives et des racines secondaires des nombres premiers* (Comptes rendus Paris **123**, 1896, p. 374); *Au sujet des nombres premiers dont un nombre quelconque donné ne peut être racine primitive* (ib. id. p. 405—406).

2) *Commentaire arithmétique sur une formule de* GAUSS (ib. **98**, 1884, p. 1358—1362, 1515).

3) *Sur certains points de la théorie des résidus des puissances. Caractères distinctifs des nombres, ou racines, d'où proviennent les résidus générateurs* (ib. **124**, 1897, p. 334—340, 428).

4) *Formules générales donnant des valeurs de D pour lesquelles l'équation $t^2 - Du^2 = -1$ est résoluble en nombres entiers* (ib. **126**, 1898, p. 1837—1843); *Extension du nº 162 des « Disquisitiones arithmeticae » de* GAUSS (ib. **127**, 1898, p. 596—601).

5) *Solutions algébriques de diverses questions concernant les équations indéterminées du second degré à trois termes* (ib. **126**, 1898, p. 863—871, 990); *Sur un point de doctrine dans la théorie des formes quadratiques* (ib. id. p. 991—997); *Addition à une précédente communication, concernant la théorie des formes quadratiques* (ib. id. p. 1077—1081, 1177); *Au sujet d'une précédente communication. Rectification d'une erreur dans la communication Comptes rendus T. CXXVI, p. 863* (ib. **132**, 1901, p. 750).

6) *Rapprochements entre les méthodes de* LAGRANGE *et de* GAUSS *pour la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du second degré* (ib. **127**, 1898, p. 694—700).

Nous voici à la fin de notre revue de la production mathématique de DE JONQUIÈRES![1]) Si nous avions réussi à inspirer à nos lecteurs le plaisir que nous a procuré l'étude d'une collection si riche, si brillante, si variée, nous aurions atteint le but de chaque biographie, celui de faire admirer son protagoniste. Mais, même si nous n'y sommes pas arrivés, même si nous en sommes restés bien loin, on peut croire et espérer que ceux, qui ont eu la patience de nous suivre jusqu'ici, reconnaîtront que ce n'est pas une illusion de panégyriste qui nous fait mettre DE JONQUIÈRES en première ligne parmi les mathématiciens français du second ordre, vécus dans la seconde moitié du 19[e] siècle. S'il n'a pu obtenir une place encore plus élevée c'est que probablement ses devoirs de marin ne le lui ont pas permis; on peut le croire, car sa profession rejaillit d'une manière visible sur l'ensemble de ses travaux mathématiques. En effet, la discontinuité dans ses recherches de science pure et ses fréquents éloignements des centres scientifiques produisirent ces lacunes dans sa culture, cette insuffisante connaissance de la littérature, qui percent dans un grand nombre de ses travaux. Mais, d'autre part, la lutte quotidienne avec les vagues de l'océan, à laquelle il s'était habitué dès sa jeunesse, paraît lui avoir fait acquérir un courage indomptable et une initiative hors ligne, même dans les questions scientifiques; nous le voyons en conséquent aborder en souriant des questions capables d'effrayer un mathématicien consommé et employer paisiblement des méthodes dangereuses, dont la rigueur est encore aujourd'hui en discussion. On dirait que si comme soldat DE JONQUIÈRES appartint à l'armée régulière, comme géomètre il eut tous les caractères d'un volontaire, toujours jeune et enthousiaste, méprisant la routine surannée et courant à l'assaut avec des procédés inouïs.

Les géomètres craintifs, préférant les routes connues et sûres, feront un étalage des nombreuses blessures dont il fut atteint et que nous, historiens impartiaux, n'avons pas cachées; mais on peut leur répondre que ces blessures sont là pour atteindre tous les explorateurs de pays nouveaux et que d'ailleurs, il n'y a que les poltrons, qui n'ont jamais vu un champ de bataille, qui ne connaissent pas le chemin de l'hôpital.

On doit ajouter que cette attitude courageuse jusqu'à la témérité qu'eut DE JONQUIÈRES, correspond parfaitement au caractère d'une époque — celle de sa jeunesse — où la géométrie, réveillée après un long repos, se montrait impatiente de regagner le temps perdu, pour monter rapidement au même niveau que celui que l'analyse avait atteint.

1) « Virescit Vulnere Veritas » frontispice de la plus ancienne édition anglaise d'EUCLIDE!

Le domaine des mathématiques s'enrichit chaque jour d'une rapidité si vertiginieuse, l'aspect de notre science se transforme d'une manière si étonnante que je ne sais pas si dans les traités futurs d'algèbre supérieure et de haute arithmétique les propositions et les remarques de DE JONQUIÈRES, quelque importantes qu'elles soient, auront une place assurée. Je ne sais même pas si les méthodes hardies et fécondes, à l'aide desquelles il a déterminé tant de nombre relatifs à des courbes et à des surfaces, seront encore, comme elles sont aujourd'hui, considérées comme légitimes.[1]) Mais une chose est certaine: quel que soit le sort que l'avenir prépare à la géométrie énumérative, DE JONQUIÈRES sera toujours considéré comme un des fondateurs les plus admirables et un des précurseurs les plus courageux de cette importante discipline.

1) Je rappelle que la *détermination rigoureuse des nombres de la Géométrie énumérative* est, suivant M. HILBERT, un des problèmes futurs des mathématiques (voir Comptes rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens à Paris 1900 (1902), p. 95).

31 mai 1902.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1 : 12, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265.

---

1 : 15. Der Ursprung der Orientierung der Wohnhäuser dürfte in praktischen Rücksichten auf Besonnung, Wind und Wetter zu suchen sein.

A. Sturm.

---

1 : 22, 29, 34, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103, 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135, 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 190, 197, 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 283**, siehe BM 1_3, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 395. Anm. 1 ist „kommentiert" statt „übersetzt" zu lesen. Bekanntlich war der griechische Text des „Analemma" verloren gegangen, und Commandino hatte für seine Ausgabe vom Jahre 1562 zur Verfügung nur die von Wilhelm von Moerbek verfertigte lateinische Übersetzung (vgl. Heiberg, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **5**, 1890, S. 4; **7**, 1895, S. 3—4). Erst vor einigen Jahren hat Heiberg Überreste des griechischen Originals entdeckt und herausgegeben (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **7**, 1895, S. 1—30).

Auch der griechische Text des „Planisphaeriums" ist bekanntlich verloren, und nur eine aus dem Arabischen verfertigte lateinische Bearbeitung ist uns aufbewahrt worden. Der arabische Bearbeiter war Maslama al-Madjriti und als lateinischer Übersetzer wird gewöhnlich Rudolph von Brügge (1144) angegeben (vgl. z. B. Steinschneider, Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_3$, 1902, S. 76); nach Houzeau und Lancaster, *Bibliographie générale de l'astronomie*, I: 1 (Bruxelles 1887, S. 630) existiert handschriftlich eine dem Hermannus secundus (= Dalmata) zugeschriebene Übersetzung, und man hat auch behauptet (vgl. Steinschneider, Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, S. 382, 392), dafs in Wirklichkeit nur dieser aber nicht Rudolph von Brügge das „Planisphaerium" übersetzt hat. Die erste lateinische Ausgabe (Chasles und andere geben bestimmt an, dafs sie die Übersetzung des Rudolph von Brügge enthält) rührt von Marco Beneventano her und erschien in Rom 1507 als Anhang der *Geographia* Ptolemaei. Eine neue Ausgabe besorgte J. Ziegler (Basel 1536), und 1558 gab Commandino einen verbesserten lateinischen Text mit Kommentar heraus. G. Eneström.

1:400, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 429. M. Cantor distingue un Anatolius chrétien, évêque de Laodicea et un Anatolius païen, maître de Jamblichos, mais dès 1887, M. P. Tannery (*La géométrie grecque*, p. 42—43), a fait observer que rien n'empêche de regarder le premier comme ayant été le maître de Jamblichos, et à présent il est établi que cet Anatolius païen est un personnage inventé (voir P. Tannery, Annales internationales d'histoire; Congrès de Paris 1900, 5e section, p. 56).

1:432, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:436,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238.

---

1 : 463. La remarque (Biblioth. Mathem. $\mathbf{3}_3$, 1902, p. 139) que Suidas aurait appelé Diophantes, non Diophantos, l'auteur d'une table astronomique, est erronée, quoique d'accord avec le texte de la vulgate, que donne Cantor (p. 462, note 2). Car, d'une part, les meilleurs manuscrits donnent *Διόφαντον* (voir mon édition de Diophante II, 1895, 36, 24): de l'autre Diophantes n'est pas grec, comme le prouve la comparaison des mots de même finale (hiérophante, sycophante), où la terminaison *phantes* a un sens actif (celui qui montre). Cette remarque décisive de Bachet a été à tort contredite par Nesselmann (*Die Algebra der Griechen*, p. 246). P. Tannery.

1:463, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:467, 469,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:476,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1:519—520,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:687—688,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144. — **1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 449—500. — **1: 749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

---

1 : 854. Statt „Molsem", welche unrichtige Form wahrscheinlich auf einem Schreibfehler von Chasles beruht, lies „Maslem" (= Maslama al-Madjriti; vgl. z. B. Steinschneider, Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_3$, 1902, S. 76). G. Eneström.

1:855, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2:25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2:34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:41, 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2:98,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2:100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140.

---

2 : 101. Die Vermutung, es handle sich bei der Quadratur des CAMPANUS um ein Zusammenbiegen der Kreisperipherie zu einem umfanggleichen Quadrate, entspricht der Wahrheit (vgl. SUTER, Zeitschr. für Mathem. **29**, 1884; Hist. Abt. S. 95). A. STURM.

2:105, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2:111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:122, 128,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504. — **2:132,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2:157, 158,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:163, 166,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2:175,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:210, 219,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352—353. — **2:229, 242, 243,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505. — **2:253,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2:273,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505.

---

2 : 274. In der Seitenstettner Bibliothek ist eine Handschrift des 15. Jahrhunderts: IOANNIS REGIOMONTANI *Ludus Pannoniensis seu Tabulae directionum profectionumque cum sinuum Canone ad radium 60.000.* Das Werk ist dem Erzbischof JOHANNES von Gran gewidmet. A. STURM.

2:282, 283, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353-354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2:296,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2:313,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:328,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:334, 353, 381,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:385,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81. — **2:386, 395, 401, 405, 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2:430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145.

2:442. Dem ausführlichen Berichte über den Inhalt der *Arithmetica integra* des STIFELS könnte vielleicht hinzugefügt werden, daſs dort (fol. 306—307) der Satz

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

angegeben worden ist (vgl. E. HOPPE, Mittheilungen der mathem. Gesellsch. in Hamburg **3**, 1900, S. 422). G. ENESTRÖM.

2:449, 474, 480, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2:481, 482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2:482,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240. — **2:484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:486, 489, 490, 497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2:510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510. — **2:550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2:554, 569, 572, 573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:572,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2:582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2:592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:594, 597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2:597, 599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:602, 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271. — **2:611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2:612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:614, 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:621, 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2:638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2:665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2:719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:721, 742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:742,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:746, 747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:767,** siehe BM **2**$_3$,

1901, S. 148, 357—358. — **2:772, 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **2:784, 820, 825, 840, 856, 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2:876, 878, 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:12, 17, 22,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3:26,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:45—48, 49, 50,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3:70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3:100,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3:116,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:117,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513.

3:151. Da Leibniz selbst die Z. 1—8 erwähnte Gleichung nicht unter der Form $y = \varphi(x)$, sondern unter der Form $\varphi(x, y) = 0$ angiebt, wäre es vielleicht angemessener die Leibnizsche Vorschrift in die Sprache der heutigen Mathematik auf folgende Weise zu kleiden: Wenn die Kurve $f(x, z) = 0$ zur Quadratur der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ füren soll, mufs man

$$y = \frac{z}{t} = \frac{dz}{dx}$$

setzen, weil alsdann

$$0 = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}y$$

wird, und man aus der letzten Gleichung und der Gleichung $f(x, z) = 0$ durch Wegschaffen von z eine Gleichung in x und y erhält, deren Koefficienten mit denen der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ zu identifizieren sind. Die Bemerkung des Herrn Cantor, dafs die Leibnizsche Vorschrift im Jahre 1678 nicht so leicht zu verstehen war, wird dadurch noch mehr begründet. G. Eneström.

3:174, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3:183,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3:188,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241. — **3:201,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:207,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3:215,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3:218,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513.

3:220. Material zur Ergänzung der Bemerkung: „Unter denen, welche die Kurve (d. h. die Kettenlinie) ermittelten, haben wir Huygens zu nennen gehabt, ein Beweis, dafs hier auch mit anderen Hilfsmitteln als denen der Differentialrechnung auszukommen ist", giebt es nunmehr in dem Artikel des Herrn D. J. Korteweg: *La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette* (Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, S. 97—108).

3:224, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:225, 228,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3:232,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:246,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3:250,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:303,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3:330—331,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3:447, 455,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3:473,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155. — **3:477, 479,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3:521,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441.

3:565. Von der ersten Auflage (Paris 1708) der *Analyse démontrée* des Ch. Reyneau, die Herrn Cantor nicht zugänglich gewesen ist, besitze ich

selbst ein Exemplar. Die Arbeit besteht aus zwei Quartbänden von zusammen mehr als 900 Seiten und ist in acht Bücher eingeteilt. Die sieben ersten Bücher behandeln die Algebra, das achte Buch (das allein den zweiten Band bildet) dagegen die analytische Geometrie und die Infinitesimalrechnung mit deren Anwendungen. In der eigentlichen Algebra stützt sich REYNEAU vorzugsweise auf die Arbeiten von DESCARTES, HUDDE, PRESTET und ROLLE.

Herr CANTOR macht darauf aufmerksam, dafs die *Arithmetica universalis* von 1707 der *Analyse démontrée* von 1708 vorausging, aber aus dieser Thatsache darf man nicht unmittelbar schliefsen, dafs REYNEAU die erste Schrift benutzen konnte, denn nach der „Approbation“ am Ende des zweiten Bandes war die ganze Arbeit schon Oktober 1704 fertig. In der That erwähnt REYNEAU zwar NEWTONS Arbeiten über Infinitesimalrechnung und unendliche Reihen, aber nie die *Arithmetica infinitorum*, und ich habe bei REYNEAU keine Stelle entdecken können, die offenbar aus dieser Quelle geschöpft ist.

G. ENESTRÖM.

3:571. Herr CANTOR stellt als möglich hin, dafs in der ihm nicht zugänglichen *Analyse démontrée* (1708) des REYNEAU ein Beispiel eines Maximum oder eines Minimum einer Funktion von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen sich finden kann, aber eine von mir angestellte Nachsuchung hat ein negatives Ergebnis gehabt.

G. ENESTRÖM.

3:578. Der Satz: „Sind F, G, H die Coeffizienten lückenlos aufeinanderfolgender Glieder eines Gleichungspolynoms, so ist immer $G^2 > FH^2$“, den Herr CANTOR als von DE GUA ausgesprochen erwähnt, setzt natürlich voraus, dafs die Gleichung $\Phi(x) = 0$ nur reelle Wurzeln hat, und aus dem Anfange der Seite 578 könnte man wohl folgern, dafs DE GUA sich nur mit diesem Fall beschäftigt hat; indessen wäre es vielleicht der Deutlichkeit halber angebracht hinzuzufügen, dafs DE GUA an der von Herrn CANTOR zitierten Stelle ausdrücklich von einer „équation quelconque n'ayant que des racines réelles“ gesprochen hat.

G. ENESTRÖM.

3:636—637, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3:652,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3:660, 667, 689, 695,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442. — **3:750, 758, 760, 766,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3:774, 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3:845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447.

3:845. Wie Herr CANTOR richtig bemerkt, schreibt EULER ohne weitere Begründung $b = x - dx + d^2x$, $c = y - dy + d^2y$ hin. Da den meisten Lesern die Richtigkeit dieser Gleichungen gewifs nicht unmittelbar einleuchtend ist — ein Problemlöser unserer Zeit würde wohl zuerst daran denken $b = x - dx + \frac{1}{2}d^2x$ zu setzen, was freilich $f = x + dx + \frac{1}{2}d^2x$ statt $x + dx$ mit sich führt — und da die ganze EULERsche Herleitung der geodätischen Linie auf diesen Gleichungen beruht, könnte es angebracht sein anzugeben, wie EULER wahrscheinlich auf dieselben geführt worden ist. Bekanntlich war es den Mathematikern der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts geläufig, dafs wenn b, x, f drei unmittelbar aufeinander folgende Glieder einer Reihe sind, so ist die zweite Differenz von b gleich $b - 2x + f$, oder in moderner Bezeichnung

$$\Delta^2 b = b - 2x + f.$$

Nun hat Euler schon $f = x + dx$ gesetzt, also ist

$$\Delta^2 b = b - x + dx \quad \text{oder} \quad b = x - dx + \Delta^2 b.$$

Aber b ist der Wert, den x annimmt, wenn man $t - dt$ statt t setzt, und da in den folgenden Rechnungen unendlich kleine Größen dritter und höherer Ordnung vernachlässigt werden können, so ist

$$\Delta^2 b = \Delta^2 x = d^2 x.$$

Auf ganz dieselbe Weise findet man natürlich, daſs $c = y - dy + d^2 y$.

G. Eneström.

---

3 : 848, 881, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen.

100. Über eine astronomische Schrift des A. Ricius. Am Anfange des 16. Jahrhunderts veröffentlichte Augustinus Ricius (Ritius) eine Schrift mit dem Titel: *De motu octavae sphaerae, opus mathematica atque philosophia plenum . . . Ejusdem de astronomiae autoribus epistola*, die nach Riccardi (*Biblioteca matematica italiana* I, 369) „in oppido Tridini, in aedibus Ioannis de Ferraris alias de Jolitis, 1513" gedruckt wurde; auf der anderen Seite haben zwei Exemplare, von denen das eine der Staatsbibliothek in München angehört, und das andere im Besitz des Fürsten Boncompagni gewesen ist, auf dem Titelblatt die Worte: „Nuper in ciuitate Casalis sancti Euasij . . . editum" aber keine Jahreszahl, und ein drittes Exemplar, das vor einigen Jahren in einem antiquarischen Bücherkataloge ausgeboten wurde, ist nach dem Titelblatte gedruckt in Paris (Lutetia) 1521 bei Simon Colinaeus. Giebt es wirklich drei verschiedene Auflagen oder wenigstens drei Titelausgaben der Schrift des Ricius?

G. Eneström.

---

101. Giannantonio Rocca (1607—1656). In der fünften Abhandlung seiner *Exercitationes geometricae sex* (Bologna 1647) erwähnt Cavalieri (S. 230) ein dem Guldinschen Satze ähnliches Theorem, das sein Schüler Giannantonio Rocca ihm mitgeteilt hatte. Dieser Umstand wird auch von Montucla (*Histoire des mathématiques* II, Paris 1758, S. 22—23) und Cantor (*Vorles. über Gesch. der Mathematik* II^2, S. 843) bemerkt, aber keiner von diesen Verfassern giebt weitere Auskunft über Rocca. Nach Riccardi (*Biblioteca matematica italiana* I, Sp. 384) war Rocca 1607 in Reggio (in Emilien) geboren und starb 1656; Riccardi nennt keine von ihm verfaſste mathematische Schrift, sondern nur einen lange Zeit nach seinem Tode herausgegebenen Briefwechsel (*Lettere d' uomini illustri del secolo XVII a Giannantonio Rocca . . . con alcune del Rocca a' medesimi*, Modena 1785) zwischen ihm und anderen Gelehrten (u. a. Cavalieri und Torricelli).

Giebt es in dem zitierten Briefwechsel wertvolle Beiträge zur Geschichte der Mathematik des 17. Jahrhunderts, und verdient Rocca einer ausführlicheren Erwähnung, als es in den Cantorschen *Vorlesungen* der Fall ist?

G. Eneström.

Recensionen.

F. Amodeo. Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732. (Atti dell' accademia Pontaniana **31.**) Napoli 1902. 60 S. 8⁰.

Seit dem Anfange des 16. und bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts gab es in Neapel keine mathematische Professur; erst 1650 wurde eine solche neu errichtet, und der erste Inhaber derselben war Tommaso Cornelio (1612? —1684), der das Studium der Descartesschen Geometrie in Neapel einführte. Unter den folgenden Professoren der Mathematik bis zum Jahre 1732 hebt Herr Amodeo besonders Agostino Ariani (1672—1748) hervor, von dem u. a. eine bisher fast unbekannte lateinische Euklides-Ausgabe (Neapel 1718) herrührt. Aufser der Universität gab es seit dem Ende des 17. Jahrhunderts in Neapel eine andere Institution zur Beförderung wissenschaftlicher Forschung, nämlich die 1698 gestiftete „Accademia reale", und auch über mathematische Gegenstände wurden darin Vorträge gehalten, deren Inhalt dennoch ziemlich elementar war. Auf der anderen Seite gab es in der letzten Hälfte des 16. und am Anfange des 17. Jahrhunderts in Neapel einige Männer, die sich *privatim* mit der Mathematik beschäftigten. Unter diesen nennt Herr Amodeo zuerst den bekannten Neapolitaner Giovanni Alfonso Borelli (1608—1679), der sich freilich nicht in Neapel aufhielt, ferner Antonio de Monforte (1644—1717) und Giacinto de Cristofaro (1650—?; Riccardi nennt ihn Cristoforo), die beide über die Auflösung von Gleichungen schrieben, sowie einige andere. Monforte erwarb sich einen gewissen Ruf als Verteidiger einer angeblich neuen geometrischen Methode, die der Genueser Paolo Mattia Doria (c. 1661—1746) entdeckt zu haben glaubte, und wodurch das delische Problem elementar gelöst werden könnte. Natürlich stellte es sich zuletzt heraus, dafs die Methode fehlerhaft war, aber bevor diese Thatsache konstatiert wurde, hatte man für nützlich erachtet, sogar ein Gutachten von Leibniz zu erbitten, und ein solches wirklich bekommen.

Obgleich die Abhandlung des Herrn Amodeo kaum irgend einen Beitrag zur Geschichte der Mathematik im engeren Sinne liefert, kann sie als eine dankenswerte Arbeit bezeichnet werden, da sie über sonst wenig bekannte Mathematiker und ihre Schriften viele Aufschlüsse giebt.

S. 4 nennt Herr Amodeo unter den früheren Professoren der Mathematik in Neapel einen gewissen Beneventano, der 1512—1513 an der Universität vorgelesen haben soll. Über diesen Beneventano hat Herr L. Birkenmajer kürzlich eine ausführliche Monographie veröffentlicht (siehe Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 154), woraus u. a. hervorgeht, dafs derselbe wirklich, wie Herr Amodeo vermutet, Marco und nicht Mario hiefs. — S. 42 wird als Druckjahr der *Algebra* des Bombelli 1579 angegeben; richtiger wäre es vielleicht

1572 statt 1579 zu setzen, da bekanntlich 1579 nur das Titelblatt neu gedruckt wurde. — S. 60 wird unter den Professoren in Neapel ein spanischer Mathematiker Diego Perez de Meza (oder Meta) erwähnt; die Form Meza ist hier ohne Zweifel die richtige, da A. F. Vallín in seiner Arbeit *Cultura científica de España en el siglo XVI.* (Madrid 1893, S. 207) eben einen Mathematiker Diego Pérez de Meza aufnimmt. Freilich scheint es etwas zweifelhaft, ob dieser mit dem von Herrn Amodeo erwähnten identisch sein kann, da Vallín eigentlich nur mit den Mathematikern des 16. Jahrhunderts zu thun hat, und es aus dem von Herrn Amodeo citierten Aktenstück hervorzugehen scheint, daſs der betreffende Diego Perez de Meza 1630—1653 Professor der Mathematik in Neapel war.

Stockholm. G. Eneström.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1
3_3 (1902) : 2.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [2
1902 : 2.

Физико-математическiя науки въ ходѣ ихъ развитiя. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°. [3
1_2 : 9. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8°. [4
31 (1900) : 1. — Die Seiten 1—63 enthalten Referate der im Jahre 1900 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman. Amsterdam. 8°. [5
10 : 2 (octobre 1901 — avril 1902).

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl (1902). — [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 54—56. (G. L.) [6

Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications publiés par E. Duporcq. Paris, Gauthier-Villars 1902 [7
8°, (3) + 455 S. — [16 fr.]

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. = 1^2 (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 238—239. (G Eneström, P. Tannery.) = 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 239—240. (G. Eneström.) = 3^3 (1901). [Recension oder kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 241—242. (G. Eneström) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 226—227. (J. Boyer.) [8

Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. Third edition (1901). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 244—248. (G. Eneström.) — Liter. Centralbl. 1902, 194—195. (E—L.) [9

Zeuthen, H. G., Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge, traduite par J. Mascart (1902). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 2_3, 1902, 265—275. (H. Bosmans.) — Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1465. — Mathesis 2_3, 1902, 140—141. (P. M.) — Nature 66, 1902, 199. (M.) [10

Gambioli, D., Breve sommario della storia delle matematiche colle due appendici sui matematici italiani e sui tre celebri problemi geometrici dell' antichità. Ad uso delle scuole secondarie compilato. Bologna, Zanichelli 1902. [11
8°, (2) + 239 + (1) S. — [3 lire.]

***Dannemann, F.,** Grundrifs einer Geschichte der Naturwissenschaften, zugleich eine Einführung in das Studium der grundlegenden naturwissenschaftlichen Litteratur. Erster Band. Erläuterte Abschnitte aus den Werken hervorragender Naturforscher aller Völker und Zeiten. Zweite Auflage. Leipzig, Engelmann 1902. [12
8°, XIV + 422 S. — [8 ℳ] — [Recension:] Naturwiss. Rundschau **17**, 1902, 322. (P. R.)

Fujisawa, R., Note on the mathematics of the old Japanese school. [13
Compte rendu du congrès des mathématiciens à Paris 1900 (1902), 379—393.

***Isely, L.,** Histoire des sciences mathématiques dans la Suisse française. Neuchatel 1901. [14
8°, 215 S. — [3 fr.]

Konen, H., Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ (1901). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 248—251. (G. Wertheim.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **5**, 1902, 47—48. (G. L.) — Monatsh. für Mathem. **13**, 1902; Lit.-Ber. 32—33. — Naturwiss. Rundschau **17**, 1902, 280—281. (E. Lampe.) [15

Reye, Th., Die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit. Rede gehalten am 1. Mai 1886 beim Antritt des Rektorats der Universität Strafsburg. [Zweite Auflage.] [16
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **11**, 1902, 343—353. — Die erste Auflage der Rede erschien 1886 als besondere Schrift

Loria, G., Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schütte. Leipzig, Teubner 1902. [17
8°, XXI + 774 S. + 17 Taf. — [26 ℳ] — Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **11**, 1902, 369—370.

***Urbański, W.,** O postępach w astronomii i fizyce od najdawniejszych czasów aż do końca XIX stulecia. Szkic historyczno-naukowy. Lwow 1901. [18
8°, 58 S. — Über die Fortschritte der Astronomie und Physik von den ältesten Zeiten bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. — [Recension:] Wiadomości matem. **6**, 1902, 119—120. (S. D.)

b) Geschichte des Altertums.

Bürk, A., Das Āpastamba-Śulba-Sūtra, herausgegeben, übersetzt und mit einer Einleitung versehen. II. Übersetzung. [19
Leipzig, Deutsche morgenl. Gesellsch., Zeitschr. **56**, 1902, 327—391.

Löschhorn, K., Über das Alter des Pythagoräischen Lehrsatzes. [20
Zeitschr. für mathem. Unterr. **33**, 1902, 183. — Verweis auf das Vorkommen des Satzes bei den Indern im vorchristlichen Zeitraum.

Kugler, F. X., Astronomische und meteorologische Finsternisse. Eine assyriologisch-kosmologische Untersuchung. [21
Leipzig, Deutsche morgenl. Gesellsch., Zeitschr. **56**, 1902, 60—70.

***Weyh, A.,** Die wichtigsten Mathematiker und Physiker des Altertums. Kreuzburg 1902. [22
4°, 26 S.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro V (1902). [Recension:] Wiadomości matem. **6**, 1902, 291—292. (S. D.) [23

Tannery, P., Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure. [24
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 161—175.

Schmidt, W., Zur Textgeschichte der „Ochúmena" des Archimedes. [25
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 176—179. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, 2100,

Björnbo, A. A., Über Menelaos' Sphärik. Leipzig, Teubner 1902. [26
8°, 55 + (1) S. — Inauguraldissertation (München), eigentlich der Anfang einer gröfseren Abhandlung, die in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften publiziert wird.

Molhuysen, P. C., Zur Geschichte des Codex Arcerianus der Agrimensoren. [27
Centralbl. für Bibliotheksw **19**, 1902, 269—271.

c) Geschichte des Mittelalters.

Steinschneider, M., Arabische Mathematiker mit Einschlufs der Astronomen. I—VII. [28
Orientalistische Litteraturzeitung (Berlin) **4**, 1901, 89—91, 183—190, 269—278, 345—354, 441—444; **5**, 1902, 1—5, 177—184.

Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis edidit M. Curtze (1899). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 2_2, 1902, 275—280. (H. Bosmans.) [29

Eneström, G., Über Summierung der Reihe von Kubikzahlen im christlichen Mittelalter. [30
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 243. — Anfrage.

Schmidt, W., Leonardo da Vinci und Heron von Alexandria. [31
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 180—187. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, 1976.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Birkenmajer, L. A., Marco Beneventano, Kopernik, Wapowski a najstarsza karta geograficzna polski (1901). [Recension:] Wiadomości matem. **6**, 1902, 278—280. (R. Merecki.) [32

Eneström, G., Über eine wiedergefundene Handschrift der Trigonometrie des Johannes Werner. [33
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 242—243.

Maas, M., Nikolaus Krazer, ein Münchener Humanist. Ein biographischer Versuch. München 1902. [34
8°, 22 S. — Sonderabdruck aus der Beilage zur „Allgemeinen Zeitung". — NIKOLAUS KRAZER (1487—c. 1550) war auch als Astronom thätig.

Frizzo, G., De numeris libri duo authore J. Noviomago (1901). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 49—51. (G. L.) [35

Favaro, A., Una lettera inedita di Ticone Brahe. [36
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 188—190.

Vacca, G., Notizie storiche sulla misura degli angoli solidi e dei poligoni sferici. [37
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 191—197.

Schor, D., Simon Stevin und das hydrostatische Paradoxon. [38
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 198—203.

Vacca, G., Sui manoscritti inediti di Thomas Harriot (1902). [Résumé:] Wiadomości matem. 6, 1902, 259—260. (S. D.) [39

Goldbeck, E., Das Problem des Weltstoffs bei Galilei. [40
Vierteljahrsschr. für wissensch. Philosophie 26, 1902, 143—204.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. IV. Alessandra Bocchineri. V. Francesco Rasi. VI. Giovanfrancesco Buonamici. [41
Venezia, Istituto Veneto, Atti 61:2, 1902, 665—701.

Loewy, A., Über Oughtreds abgekürzte Multiplikation. [42
Arch. der Mathem. 3_3, 1902, 321—323.

Monchamp, G., Une lettre „perdue" de Descartes. A propos de la nouvelle édition de ses oeuvres. [43
Bruxelles, Acad. de Belgique, Bulletin (Classe des lettres) 1899, 632—644. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1975—1976. (C. GÜTTLER.)

***Ricci, G.,** Origine e sviluppo dei moderni concetti fondamentali sulla geometria. Discorso inaugurale letto nell' Aula Magna della r. università di Padova il 5 novembre 1901. Padova 1902. [44
8°.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillirenden Functionen. 2. Lieferung. [45
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 10:2, 1902, 177—400.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, histoire, bibliographie (1901). [Recension:] Mathesis 2_3, 1902, 142—143. (P. M.) [46

Stäckel, P., Beiträge zur Flächentheorie. VII. Darstellungen der Minimalflächen. [47
Leipzig, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Berichte (Mathem. Cl.) 1902, 101—108. — Wesentlich historischen Inhalts.

Staude, O., Die Hauptepochen der Entwickelung der neueren Mathematik. [48
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 280—292.

Eneström, G., Über den Ursprung der Benennung „Pellsche Gleichung". [49
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 204—207.

Dingeldey, F., Zur Euler-Goeringschen Rektifikation des Kreises. [50
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 238—240.

Pepin, T., Etude historique sur la théorie des résidus quadratiques. [51
Roma, Accad. d. N. Lincei, Memorie 16, 1900, 229—276.

Günther, S., Der Innsbrucker Mathematiker und Geophysiker Franz Zallinger (1743—1828). [52
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 208—225. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1915.

***Fiser, R.,** Die Methoden der analytischen Geometrie in ihrer Entwickelung im 19. Jahrhundert. Braunau 1900. [53
4°, 51 S. — Programm. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1723.

M[ehmke R.,] Der Rechenschieber in Deutschland. [54
Zeitschr. für Mathem. 47, 1902, 489—491.

Föppl, A., Die Mechanik im 19. Jahrhundert (1902). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1466. — Monatsh. für Mathem. 13, 1902; Lit.-Ber. 43. [55

Klein, F., Gauss' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814 (1901). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 113—114. [56

Stäckel, P., Die Entwickelung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai. [57
Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn 17 (1899), 1901, 1—19.

Kürschák, J. und **Stäckel, P.,** Johann Bolyais „Bemerkungen über Nicolaus Lobatschewskys geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien". [58
Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn 18 (1900), 1902, 250—279.

Stäckel, P., Untersuchungen aus der absoluten Geometrie. Aus Johann Bolyais Nachlaſs herausgegeben. [59
Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn 18 (1900), 1902, 280—307.

Noether, M., Zur Erinnerung an Karl Georg Christian von Staudt (1901). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 2043. [60

Dyck, W., Eine in den hinterlassenen Papieren Franz Neumanns vorgefundene Rede von C. G. J. Jacobi. [61
Mathem. Ann. 56, 1902, 252—256.

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensumstände und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen, u. s. w. aller Völker und Zeiten. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend). Herausgegeben von A. J. VON OETTINGEN. Lieferung 1. Leipzig, Barth 1902. [62
8°, 80 S. — [3 M]

Mittag-Leffler, G., Une page de la vie de Weierstrass. [63
Compte rendu du congrès des mathématiciens à Paris 1900 (1902), 131—153. — Enthält zum grofsen Teil Auszüge aus Briefen von WEIERSTRASS an SOPHIE KOWALEVSKI nebst französischer Übersetzung derselben.

Volterra, V., Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse. [64
Compte rendu du congrès des mathématiciens à Paris 1900 (1902), 43—57.

Бобынинъ, В. В., Литература и дѣятели исторіи математики въ XIX вѣкѣ. Антонио Фаваро. [65
Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 267—285. — BOBYNIN, V. V., Die Litteratur und die Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete im 19. Jahrhundert. Antonio Favaro.

e) Nekrologe.

Xavier François **Antomari** (1855—1902). [66
L'enseignement mathém. 4, 1902, 294. — Nouv. ann. de mathém. 2_4, 1902, 239—240. (C. A. LAISANT.)

Joseph **Bertrand** (1822—1900). [67
Mathesis 2_2, 1902, 167—170. (Auszug aus dem Nekrologe von G. DARBOUX.)

Nicolas **Breithof** (1840?—1901). [68
L'enseignement mathém. 4, 1902, 215.

Alfred **Cornu** (1841—1902). [69
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 2_2, 1902, 127—146. (J. THIRION.) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 212—215 [mit Porträt]. (C. A. LAISANT.) — Nature 66, 1902, 12—13. (S. P. THOMPSON.) — Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 347—348.

Antonio **Cua** (1819—1899). [70
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti 31, 1901. 5 S. (F. AMODEO.)

Guelfo **del Prete** (1873—1901). [71
Il bollett. di matem. e di sc. fis. (Bologna) 2, 1901, 297—300. (A. CONTI.)

François **Deruyts** (1863?—1902). [72
Bruxelles, Acad. de Belgique, Bulletin (Cl. des sciences) 1902, 168—171. (C. LE PAIGE.) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 215.

Léopold François Joseph **van Emelen** (1879—1902). [73
L'enseignement mathém. 4, 1902, 294.

Immanuel Lazarus **Fuchs** (1833—1902). [74
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 134, 1902, 1081—1083. (C. JORDAN.) — Arch. der Mathem. 3_2, 1902, 177—186. (M. HAMBURGER.) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 293—294. — Nature 66, 1902, 156—157. (G. B. M.) — Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 293—296. (G. WALLENBERG.) — Wiadomości matem. 6, 1902, 245—251 [mit Schriftverzeichnis]. (A. DENIZOT.) M. HAMBURGER, *Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs.* Leipzig 1902. 8° [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. — Zum Teil Sonderabdruck aus dem Arch. der Mathem. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 2173.

Lucien Henri François Xavier **Moulins** (1813—1898). [75
Toulouse, Acad. d. sc., Mémoires 1_{10}, 1901, 318—329 [mit Schriftverzeichnis]. (V. ROUQUET.)

Robert **Pendlebury** (?—1902). [76
Nature 65, 1902, 471.

E. **Ronkar** (1857—1902). [77
L'enseignement mathém. 4, 1902, 215.

John D. **Runkle** (1823—1902). [78
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 8_2, 1902, 484.

Charles Antony **Schott** (1826—1901). [79
México, Soc. Alzate, Revista 1901, 36—40 [mit Porträt].

Wilhelm **Schur** (1846—1901). [80
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 292—301. (E. BECKER.)

Peter Guthrie **Tait** (1831—1901). [81
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 23, 1901, 498—504. (W. KELVIN.) — Physical review 15, 1902, 51—64 + Porträt. (A. MACFARLANE.)

f) Aktuelle Fragen.

Darboux, G., Le catalogue international de littérature scientifique. [82
Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 58—67. — Auszug aus dem Journal des savants.

Maillet, E., Sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en mathématiques. [83
Compte rendu du congrès des mathématiciens à Paris 1900 (1902), 425—427.

Müller, Felix, Zur Frage über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften. [84
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 235—237.

Eneström, G., Wie soll ein Mathematiker-Kalender zweckmäfsig bearbeitet werden? [85
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 226—234.

Alasia, C., Saggio di nomenclatura della recente geometria del triangulo. [86
Il Pitagora (Palermo) 8, 1902, 43—49, 73—75, 100—104, 125—131.

Tafelmacher, A. et **Berdellé, Ch.,** Sur une question de terminologie. [87
L'enseignement mathém. 4, 1902, 298—302.

Schotten, H., Über eine geplante Encyklopädie der Elementar-Mathematik. [88
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 217—229.

Galdeano, Z. G. de, L'enseignement scientifique en Espagne. [89
L'enseignement mathém. 4, 1902, 237—246.

[Die russische Mathematiker-Versammlung in St. Petersburg 1901 (a. St.)] [90
Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 297.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdocent L. Ambronn in Göttingen zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdocent G. P. Bacon zum Professor der Physik an der „Wooster university".

— Professor L. Boltzmann in Leipzig zum Professor der Physik an der Universität in Wien.

— T. J. I'A Bromwich zum Professor der Mathematik am „Queens college" in Galway.

— A. B. Coble in Baltimore zum Professor der Mathematik an der „University of Missouri".

— Professor H. Du Bois in Berlin zum Professor der Physik und Mechanik an der Universität in Utrecht.

— Professor A. Krazer in Strafsburg zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Karlsruhe.

— Privatdocent A. Loewy in Freiburg i. Br. zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor H. Minkowski in Zürich zum Professor der Mathematik an der Universität in Göttingen.

— H. L. Rietz in Ithaca zum Professor der Mathematik am „Butler college" in Irvington (Indiana).

— Professor F. Schottky in Marburg zum Professor der Mathematik an der Universität in Berlin.

— G. H. Scott zum Professor der Mathematik und Astronomie am „Yankton college" in Yankton (S. Dakota).

— Professor W. Trabert in Wien zum Professor der kosmischen Physik an der Universität in Innsbruck.

— Privatdocent J. Wellstein in Strafsburg zum Professor der Mathematik an der Universität in Giefsen.

— Dr. J. Westlund in Lafayette (Indiana) zum Professor der Mathematik an der „Purdue university" daselbst.

— Dr. E. J. Wilczynski in Berkeley zum Professor der Mathematik an der „University of California" daselbst.

Todesfälle.

— Anton Abt, Professor der Physik an der Universität in Klausenburg, geboren in Rézbánya den 6. November 1828, gestorben 1902.

— Xavier Antomari, Professor der Mathematik am „Lycée Carnot" in Paris, Herausgeber der „Nouvelles annales de mathématiques", geboren zu Valle d'Orezza (Corsika) 1855, gestorben in Paris den 9. Juni 1902.

— Nicolas Breithof, Professor der Geometrie an der Universität in Löwen, geboren in Luxemburg den 30. August 1840 (?), gestorben in Löwen den 11. Oktober 1901.

— François Deruyts, Professor der Geometrie an der Universität in Lüttich, gestorben in Lüttich den 23. Februar 1902, 38 Jahre alt.

— Hervé Faye, Mitglied des „Bureau des longitudes" in Paris, geboren in St. Benoît du Sault den 5. Oktober 1814, gestorben in Paris den 5. Juli 1902.

— Victor August Julius, Professor der Physik an der Universität in Utrecht, geboren in Utrecht den 11. Mai 1851, gestorben daselbst den 1. Mai 1902.

— E. Ronkar, Professor der Mechanik an der Universität in Lüttich, geboren in Lüttich den 26. August 1857, gestorben daselbst den 13. Januar 1902.

— John Daniel Runkle, Professor der Mathematik an dem „Institute of technology" in Boston, geboren in Root, N. Y. den 11. Oktober 1823, gestorben in Southwest Harbor den 8. Juli 1902.

— Ernst Schröder, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Karlsruhe, geboren in Pfortzheim den 25. November 1841, gestorben in Karlsruhe den 17. Juni 1902.

Demnächst erscheinende mathematisch-historische Arbeiten.

— Eine deutsche Übersetzung der Arbeit des Herrn H. G. Zeuthen über die Geschichte der Mathematik des 16. und 17. Jahrhunderts ist jetzt unter der Presse und wird als besonderes Heft der Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften erscheinen.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— Prof. F. Rudio hat im Sommersemester 1902 am Polytechnikum in Zürich eine zweistündige Vorlesung über die Geschichte der Quadratur des Kreises gehalten.

Mathematikerversammlungen im Jahre 1902.

— *Mathematics at the American association meeting 1902.* The American association for the advancement of science met at Pittsburg from 28 June to 3 July 1902. The retiring vice-president, Mr. J. MacMahon delivered an address on „Some recent applications of the function theory to physical problems". Mr. E. O. Lovett read a paper on the periodic solutions of the problem of three bodies in which he determines the imaginary centres of libration and establishes that about certain of these imaginary centres there exist real periodic orbits. Mr. J. A. Eistand read papers on a certain class of real functions to which Taylors theorem does not apply and on a class of transcendental functions having line-singularities. Mr. G. B. Halsted presented a new treatment of volume and a new founding of spherical geometry. Mr. E. Frisby read a paper on transformation of the hypergeometric series. Three reports were presented: Recent progress in the quaternion analysis by Mr. A. Macfarlane; Report on the theory of collineations by Mr. H. B. Newson; and Second report on recent progress in the theory of groups of finite order by Mr. G. A. Miller. The next meeting of the Association will be held in Washington during Christmas week.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1903. On demande une contribution importante à l'étude des formes mixtes renfermant un nombre quelconque de séries de variables; en appliquer les résultats à la géométrie des espaces quelconques.

Vermischtes.

— Eine Gesamtausgabe von Ernst Scherings wissenschaftlichen Abhandlungen in zwei Bänden ist jetzt im Erscheinen. Der erste Band, der die mathematischen Arbeiten umfafst, wird von Herrn R. Haussner herausgegeben, und die Herausgabe der übrigen Arbeiten, die den zweiten Band bilden, wird von Herrn K. Schering besorgt werden.

— Unter dem Titel *Il bollettino di matematica* erscheint seit dem Anfange des Jahres 1902 in Bologna eine von A. Conti redigierte Zeitschrift, die sechsmal jährlich herausgegeben wird; jedes Heft wird wenigstens 40 Seiten umfassen.

Zur Geschichte des Dampfkessels im Altertume.

Von Wilhelm Schmidt in Helmstedt.

Neuerdings beschäftigt sich die Geschichte der 'Wärmekraftmaschinen'[1]) auch mit einem HERONischen Apparate in Form eines römischen Meilensteins (milliarium), der nach HERON, *Pneum.* II 34 und ATHENAEUS III 98c von den Alten als Badeofen benutzt wurde und sich als Dampf- und

---

1) Vgl. Th. Beck, *Beiträge zur Geschichte des Maschinenbaues*, Berlin 1899, S. 22 f. und A. Musil, *Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen*, Leipzig 1902, S. 5. Da das von Musil benutzte englische Werk von J. A. Ewing bereits 1899 erschien, so halten wir uns im Folgenden blofs an Musil. Dieser, der sich S. 3—6 mit Herons Wärmekraftmaschinen überhaupt befafst, würde nun eine Reihe von Irrtümern vermieden haben, wenn er die bereits 1899 und 1900 erschienenen Bände der neuen Heron-Ausgabe hätte benutzen wollen. Statt dessen geht er im Anschlufs an Beck S. 22 auf Carios elendes Machwerk vom Jahre 1688 zurück, eine Arbeit, die von Übersetzungsfehlern wimmelt, wie ich bereits im Supplemente zu Heron, *Op.* I S. 134 gezeigt habe. Daher kann es uns denn nicht wundern, wenn solch mangelhafter Text vorgelegt wird, wie Musil S. 5: 'Es soll sich aber das kalte Wasser erst dann mit dem warmen vereinigen, wenn es auf den Boden des Topfes gelangt *und dort durch eine Röhre ausgeflossen ist*' ('ehe es auf des Geschirrs Boden komme und *durch selbe Röhre das kalte Wasser ausfliefse*', Cario S. 144). Das Richtige lehrt Heron, *Op.* I 305, 12. Auch sind Musils Notizen ein anschauliches Beispiel dafür, wie gewisse Irrtümer unausrottbar sind und sich „wie eine ewige Krankheit" von Buch zu Buch vererben. In der Vorrede von Carios Übersetzung wird dem Abt Bernhard Baldi von Urbino eine griechische Ausgabe der *Pneumatik*, die in Augsburg gedruckt sei, zugeschrieben. In Wirklichkeit hat er sie weder im Urtext noch in Übersetzung herausgegeben, sondern Cario hat die Ausgabe der *Pneumatik*, wie ich schon in dem erwähnten Supplemente S. 134 Anm. 3 dargethan habe, mit der im Jahre 1616 in Augsburg erschienenen griechischen Ausgabe der *Belopoiika* verwechselt. Dieser Irrtum ist dann übergegangen auf Greenwood (?) — ich habe ihn eben leider nicht zur Hand —, auf Susemihl, *Gesch. d. griech. Litt.* Bd. I (1890), S. 743, auf Beck a. a. O. S. 6 und jetzt wieder in das Buch von Musil. Dafs Herons *Mechanik* überhaupt nicht vorhanden sein soll, berührt jedenfalls den seltsam, der weifs, dafs sie 1900 in arabischem und griechischem Texte neu ediert ist, und schon vorher (1894) arabisch und französisch erschien. Dafs Heron seine Dampfturbine selber Äolipile genannt habe (Musil S. 545), ist gleichfalls unrichtig. Desgleichen ist Barülkon (so!) durch Barulkos zu ersetzen. Schliefslich sind auch

Wasserkessel darstellt. Er erregt dadurch besonderes Interesse, daſs er eines der ältesten Beispiele ist, in denen wir einer inneren Feuerung nach Art der Cornwall-Kessel, ferner quer durch die Feuerung laufenden Röhren nach Art der Gallowayschen Quersieder und schlieſslich einem dritten Rohre nach Art der Fieldröhre[1]) begegnen. Es ist TH. BECKS Verdienst, in seinen *Historischen Notizen* im Civilingenieur 1886, S. 425, die in den oben erwähnten *Beiträgen* fast unverändert wieder abgedruckt sind, zuerst auf diese Analogien zwischen antiken und modernen Vorrichtungen hingewiesen zu haben.

Was nun die Rekonstruktion des vertikalen HERONischen Kessels betrifft, so weicht die von BECK gegebene und von MUSIL S. 5 übernommene von der meinigen (Fig. 1) wesentlich ab, und ich sehe mich darum veranlaſst, die von mir gegebene Rekonstruktion etwas ausführlicher zu begründen.

Zu dem Zwecke ist es zunächst notwendig, die Einrichtung des HERONischen Dampfkessels zu kennen, wie ihn die griechische Überlieferung des Textes und der zugehörigen Illustration uns an die Hand giebt.[2]) Ein äuſserer Hohlcylinder $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 1 und 2, s. nebenstehend) umschlieſst konzentrisch einen inneren. Der zwischen beiden liegende, ringförmige, oben und unten geschlossene Hohlraum ist bestimmt, durch ein Rohr $\varrho\sigma$ das kalte Wasser aufzunehmen, welches im Kessel erwärmt werden soll. Innerhalb dieses hohlen Ringkörpers wird ein Raum $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$

---

die Wärmekraftapparate nicht erschöpft. Es ist ja lobenswert, daſs die Techniker auch der historischen Seite der exakten Wissenschaft ihre Aufmerksamkeit zuwenden, und man muſs zugeben, daſs die historischen Notizen für das Buch von MUSIL nur eine sekundäre Bedeutung beanspruchen. Gleichwohl wird man gerade bei einem zusammenfassenden, für weitere Kreise bestimmten Buche wünschen müssen, daſs der Verfasser, wenn überhaupt historische Notizen beigegeben werden, auch hier sich bemühe, „dem heutigen Stande des Themas gerecht zu werden“ (MUSIL, Vorwort), eine Aufgabe, der MUSIL für HERON leider nicht gerecht geworden ist. Zur Kritik von BECKS 2. Aufl. (1900) vgl. Deutsche Litteraturz. 1902, S. 2738 ff.

1) Der Vergleich mit der Fieldröhre ist natürlich nicht genau. Man kann aber vielleicht das Eindringen des kühleren Wassers durch die Kernrohre beim Fieldkessel mit dem Zugieſsen des kalten Wassers durch das Rohr $\varrho\sigma$ (Fig. 1) vergleichen. In beiden Fällen wird lebhaft Dampf aufsteigen. MUSILS Vergleichung des Blasrohrs mit der Fieldröhre ist mir bei seiner Figur nicht klar geworden. Die Möglichkeit, daſs beide Rohre als Innenrohre leicht herausgenommen werden können (vgl. MUSIL S. 479), bietet doch nur eine äuſsere Parallele. BECK S. 24 vergleicht die Röhre $\lambda\xi$ mit der heutigen Fieldröhre, wohl weil sie wie letztere an einem Ende geschlossen ist und in den Feuerraum geht, aber sie enthält kein Wasser.

2) Es sei einer Bemerkung BECKS *Beitr.* S. 6 gegenüber hier nachdrücklich darauf hingewiesen, daſs in den griechischen Hss. zu *allen* Apparaten von HERONS *Pneumatik* Figuren vorhanden und Proben davon (z. B. Fig. 2) in meiner Ausgabe abgebildet sind.

abgesondert. Unten führt in denselben die am Ende ξ offene Röhre λξ, oben steckt eine röhrenförmige, abnehmbare, pustende Figur, deren unteres Ende in eine Röhre ψω eingeschliffen und nach aufsen drehbar ist. Ist die Figur aus ψω herausgezogen, so giefst man ein wenig Wasser in den abgesonderten Raum. Die aus λξ zuströmende heifse Luft verwandelt das Wasser in Dampf, der dann durch die kleine Figur nach dem innern Hohlcylinder geleitet wird. Durch diesen gehen auch zwei Wasserröhren οκ und μν, welche auf beiden Seiten offen sind. Der seitliche Hahn steht offen, er läfst heifses Wasser auslaufen, wenn kaltes zugegeben wird. Das kleine in ρσ mündende Ventil wird teils den Dampf ablassen, teils auch überkochendes Wasser in den Kessel zurückleiten sollen, falls etwa der Hahn einmal geschlossen ist. Nun ist die Frage, wo die Kohlen liegen. Heron verbreitet sich darüber leider nicht; da er aber sonst die

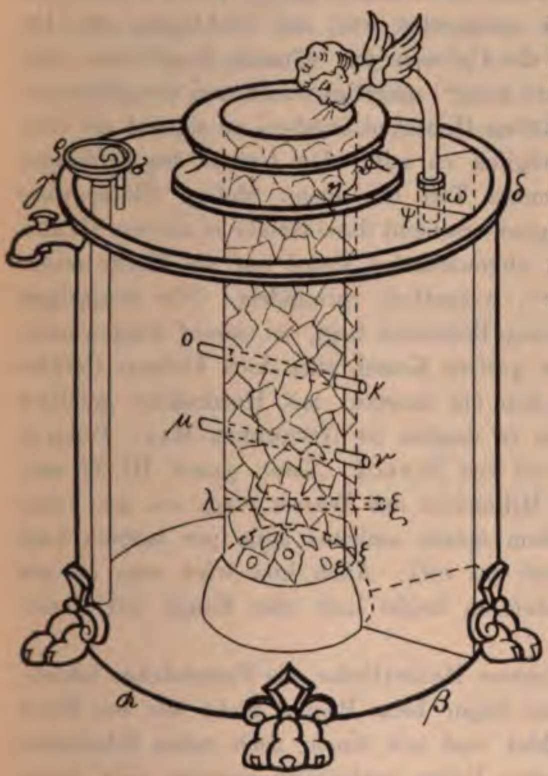


Fig. 1.

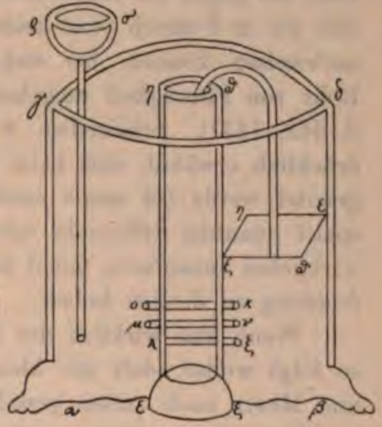


Fig. 2.

Einzelheiten ziemlich genau beschreibt, so ist wahrscheinlich der entsprechende Abschnitt ausgefallen, wie ich bereits *Pneum.* 304, 20 Anm. angedeutet habe. Dennoch fehlt es nicht ganz an Hinweisen, die einen Schlufs auf die Lagerung der Kohlen gestatten. Die Röhre λξ wird 306, 3 (= 307, 5) als eine der unter den Kohlen liegenden (*εἷς ὢν τῶν ὑποκειμένων τοῖς ἄνθραξιν*) bezeichnet; es liegen also auch μν und οκ unter den Kohlen. Sämtliche Röhren aber gehen durch den innern Hohlcylin-

der. Daraus folgt, dafs dieser mit glühenden Kohlen gefüllt war, die durch den aus dem Figürchen ausströmenden Dampf immer von neuem angefacht wurden. Der innere Hohlcylinder dient also nicht wie BECK und MUSIL wollen, welche in ihren Figuren den Kohlen ihren Platz *unter* demselben anweisen, lediglich als Flamm- oder Rauchrohr mit Unterfeuerung, sondern als Herd (Feuerbüchse) für die innere Feuerung.[1]) Bei dem HERONischen Kessel würde auch bei einer Unterfeuerung die Wärme keineswegs in dem Mafse ausgenutzt wie bei einer wirklichen Innenfeuerung. Die Frage, ob nicht etwa derjenige Teil des innern Cylinders, welcher mit zur abgesonderten Kammer gehörte, der Gefahr des Erglühens, Durchbiegens u. ä. ausgesetzt war, sei Fachleuten zur Erwägung empfohlen. Da aber die Cylinder aus dünnem *Kupferblech* (vgl. SENECA, *Nat. quaest.* III 24: „aere tenui") gefertigt waren und die glühenden Holzkohlen kaum einen allzuhohen Hitzegrad ergaben, so scheint die Einrichtung technisch nicht unmöglich zu sein. Die Gefahr des Erglühens u. s. w. würde für den genannten Teil bei einem blofsen Flammrohre schwerlich geringer sein. Übrigens erscheint diese Gefahr in der von HERON gegebenen Variation, die den abgesonderten Raum auf die Hälfte seiner Höhe reduziert (*Pneum.* 317, 8), wesentlich vermindert. Für denjenigen aber, der gegen die Innenfeuerung Bedenken hegt, sei darauf hingewiesen, dafs wir in Pompeji zwar keine grofsen Kessel, aber doch kleinere Gefäfse nachweisen können, bei welchen ein inneres, mit Holzkohlen gefülltes Rohr von Flüssigkeit umgeben zu denken ist (OVERBECK-MAU, *Pompeji*, S. 442, 443[4]). Schliefslich wird von SENECA, *Natur. quaest.* III 24 ausdrücklich erwähnt, dafs beim Milliarium das Wasser rings *um* das Feuer geleitet werde (ut saepe eundem ignem ambiens aqua per tantum fluat spatii quantum efficiendo calori sat est). Auch hier wird man an ein wirkliches Innenfeuer, nicht blofs an heifse Luft oder Rauch mit Unterfeuerung zu denken haben.

Wenn nun wirklich der innere Hohlcylinder die Feuerbüchse bildete, so folgt weiter, dafs die kleine Figur beim Pusten nicht wie bei BECK und MUSIL nach aufsen gerichtet und mit einem nach unten führenden, von HERON gar nicht erwähnten Rohre verbunden gewesen sein kann, zumal sie bei dieser Gestaltung sich ohne weiteres weder nach der entgegengesetzten Richtung drehen[2]) noch abheben läfst. Vielmehr ist sie

1) Die zum Vergleich angezogenen Cornwall-Kessel haben teils wirkliche Innenfeuerung, teils im Anschlufs daran ein Rauchrohr.

2) Sie wird also nicht etwa erst gehoben und dadurch mit der äufseren Röhre aufser Verbindung gesetzt. Das Abheben der Figur hat lediglich den Zweck, das Eingiefsen des *μικρὸν ὑδάτιον* 306, 14 (der geringen Quantität Wasser) zu ermöglichen, vgl. *Pneum.* 306, 20.

nach HERON nach *aufsen* drehbar, sobald sie *nicht* pusten soll, andernfalls ist sie aber nach dem inneren 'Feuerraume' gerichtet.

Zum Schlusse dürfte es vielleicht von Interesse sein, zu erfahren, dafs nach SENECA a. a. O. Röhren aus dünnem Kupferbleche den innern Feuerherd des Badeofens (miliarium) *spiralförmig* umgaben. So wenigstens glaube ich seine Worte verstehen zu sollen: „Facere solemus miliaria in quibus aere tenui fistulas struimus *per declive* circumdatas, ut saepe eundem ignem ambiens aqua per tantum fluat spatii, quantum efficiendo calori sat est. Frigida itaque intrat, effluit calida." SENECAS Ofen mit seinen Spiralwindungen erinnert sehr an LILIENTHALS Dampfmotor mit Innenfeuerung, nur dafs bei letzterem die spiralförmigen Windungen des Rohrs *zwei* konzentrische Cylinder in auf- und absteigender Ordnung um den Feuerherd bilden und sein Zweck nicht wie bei SENECA blofs die Erwärmung des Wassers, sondern die gefahrlose Erzeugung des Dampfes ist.

Simplicius et la quadrature du cercle.

Par PAUL TANNERY à Pantin.

1. Dans la Bibliotheca Mathematica ($\mathbf{3}_3$, 1902, p. 1—62), F. RUDIO a rouvert récemment la discussion sur un sujet où elle semblait épuisée depuis dix-huit ans, je veux dire depuis l'article de HEIBERG dans le Philologus de 1884 (p. 336—344). Au moins en ce qui me concerne, alors que, dès 1878[1]), j'avais pris position sur la question, je n'avais plus trouvé matière à revenir sur mon travail de 1883[2]); après un laps de temps aussi long, il me semble que je puis le juger impersonnellement, et je serais certainement très disposé à accepter les nouvelles observations introduites par F. RUDIO, si je n'étais pas arrêté par divers scrupules que son étude, en tous cas très-utile et très-méritoire, n'est pas parvenue à écarter de mon esprit.

Je n'ai nullement au reste l'intention de soumettre ici son article à une critique minutieuse, mais seulement de toucher les divers points qui me paraissent avoir une importance réelle. Je le prie donc de m'excuser si je ne relève pas ici les passages sur lesquels il me paraît bien avoir réalisé des progrès définitifs, mais d'ordre secondaire; je m'abstiendrai de même de signaler les objections de pur détail que je pourrais avoir à présenter sur quelques autres.

2. Tout d'abord, F. RUDIO a eu grandement raison de porter son attention sur tout l'ensemble du commentaire de SIMPLICIUS concernant la quadrature du cercle, et d'en donner une traduction annotée. Mais je trouve là matière à une petite digression, à propos de la pseudo-quadrature d'ANTIPHON. Je n'ai jamais exactement compris l'importance historique qu'on est généralement d'accord pour lui attribuer. ANTIPHON, en effet, était postérieur d'une génération à HIPPOCRATE, et celui-ci avait démontré que deux cercles étaient dans le rapport des carrés de leurs diamètres.

---

1) *HIPPOCRATE de Chio et la quadrature des lunules*; Mémoires de la société des sciences de Bordeaux $\mathbf{2}_2$, 1878, 179—184.

2) *Le fragment d'EUDÈME sur la quadrature des lunules*; Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $\mathbf{5}_2$, 1883, 211—236.

Sans doute cette démonstration n'avait pas la rigueur qui ne fut atteinte que par EUDOXE, mais je ne puis concevoir comment elle a pu être dirigée, si elle n'était pas une première ébauche de la méthode d'exhaustion. Ce serait donc à HIPPOCRATE, non pas à ANTIPHON, qu'il faudrait faire remonter l'origine de cette méthode; dans le raisonnement du second, je ne puis voir qu'une *variation* sophistique sur un *motif* appartenant au premier. Et si l'on veut s'attacher en particulier aux calculs d'ARCHIMÈDE, je ne vois point que ce dernier ait eu en rien besoin de l'idée d'ANTIPHON; la démonstration d'EUCLIDE (ou d'EUDOXE) était pour lui un point de départ tout indiqué et parfaitement suffisant.

Je serais heureux si ces remarques incidentes provoquaient une étude approfondie sur la question, dût-elle montrer que mon opinion est erronée.

3. Un autre point sur lequel F. RUDIO me paraît avoir, à juste titre, attiré l'attention, c'est que tous les critiques (moi le premier, bien entendu) qui depuis BRETSCHNEIDER se sont occupés du texte historique de SIMPLICIUS, ont défavorablement apprécié ce commentateur, en tant que géomètre, et cela plutôt par une sorte de préjugé contre lui que par des raisons absolument décisives. Il convenait donc d'essayer de le réhabiliter; mais malgré l'impartialité évidente du défenseur qu'il vient de trouver, cet essai a-t-il été couronné de succès? L'appréciation courante sur SIMPLICIUS doit-elle être désormais sensiblement modifiée?

Demander que SIMPLICIUS soit jugé par les mathématiciens aussi favorablement qu'il l'est par les philosophes, est la note juste; mais c'est peut-être moins demander que ne le croit F. RUDIO. Pour ma part, à l'occasion de leçons que j'ai professées au Collège de France, j'ai pratiqué SIMPLICIUS encore plus comme philosophe que comme géomètre; sa valeur n'est certainement pas négligeable, mais ses défauts ne peuvent davantage être niés, et je ne pense pas qu'il y ait un philosophe qui ne le considère comme inférieur à PROCLUS. De même comme géomètre, ce dernier me semble au dessus de lui. Nous avons aujourd'hui un moyen de les comparer, grâce aux fragments conservés par ANARITIUS de l'écrit de SIMPLICIUS sur les définitions et axiomes d'EUCLIDE. Mais je crois inutile d'entreprendre ici cette comparaison, puisque je reconnais que F. RUDIO, en principe, a eu raison de nous mettre en garde contre des jugements trop sévères et insuffisamment motivés.

Cependant, en égard aux cas particuliers, comme je le montrerai plus loin, je ne sais point si l'idée qu'il se fait de son client n'est pas, tout compte fait, inférieure à celle que je m'en fais moi-même; je me vois donc obligé de préciser celle-ci.

4. Dans son exposition mathématique des quadratures, la maladresse technique de SIMPLICIUS se traduit surtout par des impropriétés d'expres-

sion qui lui font dire le contraire de ce qu'il devrait. Plaider que néanmoins ce qu'il voulait dire était juste, comme, par exemple, sur le passage de l'édition DIELS, 55, 16 (où il faudrait supprimer *ἀρχὴν εἶναι τὸ* pour avoir un bon sens) ou encore 69, 31—32 (où *ἀορίστων* est insoutenable), c'est peut-être là une thèse juste, mais elle est, ce me semble, en dehors de la question, qui pratiquement revient à ceci: lorsque nous nous trouvons en présence d'un passage sur l'attribution duquel il y a doute, entre EUDÈME et SIMPLICIUS, et que ce passage renferme une maladresse, serons-nous tentés de l'attribuer au second, qui en est capable, ou au premier, pour lequel nous n'avons aucun motif semblable de suspicion?

Je m'arrête au second des deux passages précités, parce qu'il me paraît topique. La partie du fragment d'EUDÈME, où sont exposées les trois lunules carrables d'HIPPOCRATE, se termine apparemment par une phrase (éd. DIELS, 67, 3—6) qui se traduit littéralement comme suit: « Ainsi HIPPOCRATE a carré toute sorte de lunule, en tant du moins qu'il « a carré celle où l'arc extérieur est d'une demi-circonférence, celle où il « est plus grand, et celle où il est plus petit. » J'ai admis qu'une pareille phrase ne pouvait pas avoir été écrite en ces termes par EUDÈME, et HEIBERG est du même sentiment. Peut-être l'un et l'autre avons-nous préjugé trop favorablement du premier historien des mathématiques; en tout cas, quand même l'opinion du rédacteur définitif de cette phrase n'aurait pas été erronée (c'est ce qu'admet F. RUDIO), elle présente une ambiguïté inexcusable, puisque les trois lunules sont tout-à-fait particulières.

SIMPLICIUS (éd. DIELS, 69, 12—34) revient pour son propre compte sur cette question, et examine s'il faut entendre que la quadrature des lunules est générale. Il rejette tout d'abord cette interprétation, parce qu'on en devrait conclure, en vertu de la dernière proposition rapportée par EUDÈME, qu'HIPPOCRATE aurait obtenu la quadrature du cercle, tandis qu'ARISTOTE déclare que cette quadrature est inconnue. Passons sur ce singulier appel à l'autorité du Maître.

Il ne faut donc pas dire, continue SIMPLICIUS, que la quadrature d'HIPPOCRATE soit générale.[1]) En effet, pour un arc extérieur donné, il peut y avoir une infinité d'arcs intérieurs, tandis qu'HIPPOCRATE suppose toujours l'arc intérieur déterminé par l'arc extérieur. Cette fois le raisonnement est irréfragable; on pourrait tout au plus désirer la remarque que l'arc extérieur des lunules carrées est également déterminé d'espèce. Mais, sur ce point, SIMPLICIUS ajoute maladroitement que les segments

1) Je concède que *μήποτε* (éd. DIELS 69, 23) peut ne pas avoir ici le sens quelque peu dubitatif que lui donne d'ordinaire SIMPLICIUS (par exemple ibid. 60, 17).

semblables, construits, pour la première quadrature, sur le côté du carré inscrit, le sont, pour les deux autres, sur des cordes *indéterminées* (*ἀορί-στων*: nicht näher bezeichneten, RUDIO). Après quoi, se corrigeant, il dit que ces segments sont déterminés en quelque sorte (*ὡρισμένοις πως*: irgendwie bestimmt, RUDIO).

En réalité, les cordes dont il s'agit sont tout aussi déterminées, par rapport au rayon du cercle, que le côté du carré inscrit, et HIPPOCRATE avait donné le moyen de les construire. SIMPLICIUS aurait donc dû écrire, non pas *ἀορίστων*, mais *ἄλλως*, ou, au plus, *ἄλλως πως ὡρισμένων* (déterminées d'une certaine autre façon); PROCLUS, par exemple, n'aurait pas sans doute employé une expression aussi impropre, ni tenu un langage d'apparence aussi contradictoire.

L'erreur d'expression est donc manifeste; sans doute il ne faut pas en exagérer l'importance, ni même conclure ici que cette erreur existait dans la pensée de SIMPLICIUS, puisque nous voyons qu'il a cherché à se corriger. Cependant, étant donné que nous nous trouvons pour le fragment d'EUDÈME, en présence d'un texte certainement remanié par le commentateur, et que nous venons de prendre ce dernier en flagrant délit d'incorrection dans le languge technique, nous avons au moins un motif de soupçonner que ce peut être lui qui est responsable, par exemple de l'ambiguïté du passage précédemment rapporté. Peut-être, d'ailleurs, s'il l'a ainsi rédigé, n'était-ce que dans l'intention de faire ressortir une conclusion sophistique qui lui semblait pouvoir être tirée de l'exposé d'EUDÈME, mais qu'il se proposait de réfuter ensuite. C'est un procédé qui est, en effet, assez dans ses habitudes de discussion philosophique.

5. En résumé, la réhabilitation tentée par F. RUDIO ne me paraît pas devoir pratiquement, pour la critique du texte, changer sensiblement l'état de la question.[1]) Elle se trouverait au contraire sérieusement modifiée, si nous devions, comme il le fait, renoncer complètement au critérium fondé sur l'emploi des locutions comme *τὸ ἐφ' ᾧ A* ou *τὸ A*, servant à désigner le point *A*. DIELS avait déjà remarqué très justement que ce critérium n'est pas suffisant, puisque la seconde locution se trouve dans des passages qui ne peuvent raisonnablement être déniés à EUDÈME. F. RUDIO soutient que de plus il est de nature à induire en erreur, parce que SIMPLICIUS a pu se laisser aller, par imitation involontaire, à employer l'ancienne locution. Passe peut-être pour une fois; mais attribuer

---

1) Comme cependant cette réhabilitation, au point de vue historique, garde son intérêt, j'aurais désiré que F. RUDIO discutât plus à fond la réplique (éd. DIELS, 59—60) à AMMONIUS qui, comme mathématicien, avait de son temps une grande réputation. SIMPLICIUS ne me paraît point avoir bien saisi la question.

à Simplicius tout un passage (éd. Diels, 66, 15—19) où cette ancienne locution revient six fois, cela me paraît dépasser les bornes.

Je reconnais parfaitement que la certitude de l'emploi du critérium n'est jamais absolue, pas plus que pour aucun indice analogue en matière de critique de textes (puisqu'une corruption peut toujours être supposée). Mais, sous les réserves nécessaires, les distinctions à tirer du dit critérium, entre ce qui appartient à Simplicius et ce qui appartient à Eudème, n'en doivent pas moins, je crois, être considérées comme fondées sur un motif très grave, et il ne faut pas oublier que, sans ces distinctions, on ne serait pas parvenu à débrouiller le texte d'Eudème autant qu'on a pu le faire.

F. Rudio estime d'autre part que, du temps d'Eudème, la vieille locution était déjà tombée en désuétude et que celui-ci ne l'a guère employée que là où, par suite d'une plus grande complication du sujet, il a été conduit à suivre de plus près le texte d'Hippocrate. Je dirais plutôt qu'à mon avis Eudème a cherché autant que possible à éviter l'emploi des lettres de figure; que là où il a été obligé d'y recourir, il a mélangé les deux locutions comme on les trouve déjà mélangées dans Aristote, quoique dans les textes de ce dernier l'emploi de la nouvelle locution provienne souvent d'additions postérieures. Que l'usage de l'ancienne locution ait persisté longtemps encore après Eudème, nous pouvons d'ailleurs le voir d'après Philon de Byzance: dans le livre IV de sa *Mechanica syntaxis* (éd. R. Schöne, Berlin, Reimer 1893), je relève 19 fois cette locution contre 23 exemples de la nouvelle. Si nous considérons que les textes d'Euclide, d'Autolycus et d'Aristarque, tels que nous les lisons, sont bien loin de remonter à leur époque, au point de vue de la tradition manuscrite, il est difficile d'affirmer que le triomphe de la nouvelle locution a été déterminé par l'emploi exclusif qu'ils en auraient fait.

6. Après ces préambules, j'arrive enfin aux trois passages pour lesquels l'attribution à Eudème ou à Simplicius reste le plus controversable. Le premier se rapporte au début de l'exposé d'Eudème, les deux autres à la quadrature de la troisième lunule.

Sur le premier (éd. Diels, 61, 11—18), F. Rudio propose une conjecture nouvelle et très intéressante relative à la marche qu'aurait suivie Hippocrate. Celui-ci aurait défini les *secteurs* de cercle semblables ceux qui sont dans le même rapport à leurs cercles, définition qui aurait entraîné, pour les secteurs semblables, l'égalité des angles au centre (comme ayant un même rapport à quatre droits). Des secteurs semblables sont donc dans le même rapport que les carrés des diamètres des cercles, et comme les triangles, formés dans chaque secteur par les rayons extrêmes

et par la corde de l'arc, base du segment, sont semblables, ces triangles sont aussi dans le même rapport, qui est également celui des carrés des cordes. Il s'ensuit que les segments seront, eux aussi, dans ce même rapport et peuvent être, par suite, qualifiés de semblables. HIPPOCRATE démontrait supplémentairement que les angles inscrits dans les segments semblables sont égaux, etc.

Cette conjecture soulève malheureusement des difficultés aussi graves que celles qu'il s'agit d'écarter. Tout d'abord il faut admettre qu'EUDÈME aurait employé à quelques lignes de distance, le mot τμῆμα d'abord dans le sens de *secteur*, de l'autre dans celui de *segment*; malgré les assimilations faites par F. RUDIO avec certains emplois de mots techniques, cette concession est bien difficile à faire. D'un autre côté, on ne comprend guère comment, dans l'hypothèse de telles démonstrations, EUDÈME (éd. DIELS, 61, 19) aurait écrit un peu plus loin au singulier, δειχθέντος δὲ αὐτῷ τούτου et non au pluriel δειχθέντων . . . τούτων. A cet égard, je ne puis regarder comme susceptible de preuve l'opinion que l'ensemble de ces démonstrations était nécessaire dans l'écrit d'HIPPOCRATE sur les lunules, parce que cet écrit aurait été antérieur aux *Eléments* du même auteur. L'argument de F. RUDIO, à savoir que, dans le cas contraire, EUDÈME aurait nécessairement mentionné les références d'HIPPOCRATE à ses *Eléments*, ne me semble point en effet concluant; nous en savons trop peu sur les habitudes de rédaction d'EUDÈME pour nous prononcer à cet égard, et sa concision, dont nous pouvons juger, serait plutôt de nature à nous faire douter qu'il eût remarqué cette mention comme bien utile, surtout s'il avait antérieurement parlé de l'ordre des écrits d'HIPPOCRATE.

Je ne vois point d'autre part que cette conjecture atteigne son but, celui de sauver l'honneur de SIMPLICIUS: un commentateur aussi minutieux qu'il l'est partout ailleurs, n'aurait pas dû, en tout cas, laisser passer, sans la signaler, une amphibologie dans l'emploi du mot τμῆμα, amphibologie peut-être excusable à une époque où la langue technique n'était pas fixée, mais qui, pour les lecteurs de son temps, troublait l'ordre des idées aussi bien que pour nous. Admettre que SIMPLICIUS aurait copié EUDÈME sans le comprendre et sans dire qu'il ne comprenait pas, serait lui faire encore plus de tort; et à vrai dire, ce ne sont point là ses habitudes.

En somme, nous manquons des données nécessaires pour restituer sûrement, non pas les connaissances effectives d'HIPPOCRATE sur la matière, mais l'ordre dans lequel il les enchaînait. La rédaction dont nous devrions déduire cet ordre est au moins incorrecte; et nous n'avons point de critérium assuré pour en mettre les incorrections à la charge d'EUDÈME ou de SIMPLICIUS. Mais en attribuant toute cette rédaction à SIM-

PLICIUS et en lui enlevant ainsi toute valeur historique, ainsi que le fait HEIBERG, on ne fait pas, ce me semble, au commentateur un tort aussi grand que paraît le croire RUDIO.

7. Le premier des deux passages corrompus de la quadrature de la troisième lunule (éd. DIELS, 63, 7—23), est, à mon avis, au moins en ce qui concerne la restitution du texte d'EUDÈME, dans un état irrémédiable.

La situation est la suivante: notre historien vient d'indiquer la construction d'un trapèze isoscèle dont les bases sont BK, HE, l'une, BK, étant égale à chacun des deux côtés non parallèles BH, KE, étant de plus dans le rapport $\sqrt{\frac{3}{2}}$ avec EZ ou ZH, qui sont, du côté de l'autre base, les segments, égaux entre eux, des diagonales BZE, KZH du trapèze.

D'après F. RUDIO, EUDÈME indiquerait ensuite que le trapèze $BKEH$ est inscriptible dans un cercle; puis, que si l'on circonscrit également à un cercle le triangle EZH, les segments sur EZ, ZH seront semblables aux segments sur EK, KB, BH. Certes la marche est très correcte et bien dans la manière d'EUDÈME; mais il faut déplacer toute une phrase et y apporter une correction violente.

Contre le déplacement, on peut objecter que si HIPPOCRATE s'était, comme il semble, donné la peine de démontrer que le trapèze était inscriptible, il était peut-être plus naturel pour lui de commencer par tracer le cercle circonscrit au triangle. Mais, au fond, cela importe peu; ce qui me frappe surtout dans le texte actuel, c'est que la similitude des segments soit aussi incorrectement énoncée, et que, d'autre part, SIMPLICIUS ne s'occupe nullement de la démontrer, alors que c'est un point capital, et qui n'est pas immédiatement évident. Si peu favorablement que je juge le commentateur comme géomètre, je ne considère pas cette démonstration comme dépassant ses forces. Je me demande donc s'il n'y a pas là une lacune considérable, ou bien si SIMPLICIUS ne s'est pas trouvé en présence d'un texte déjà corrompu, qu'il n'aura pas osé remanier autant qu'il aurait fallu.

8. Le dernier passage (éd. DIELS, 66, 14—67, 2) a une importance historique plus considérable. F. RUDIO l'attribue en presque totalité (c. a. d. sauf 67, 19—24) à SIMPLICIUS, malgé le critérium des locutions qui, ainsi que je l'ai dit plus haut, conduit à maintenir à EUDÈME les lignes 15—19 qui seules sont proprement en question. Mais dès le début (l. 14—15), le rédacteur dit: « Il démontre ainsi ». Ce rédacteur ne peut donc être SIMPLICIUS.

Le motif invoqué par RUDIO est qu'HIPPOCRATE, ayant à démontrer que $\overline{EK}^2 > 2\overline{KZ}^2$, l'aurait simplement conclu de $EK = KB$, par hypo-

thèse, et $\overline{KB}^2 > 2\overline{KZ}^2$, dans le triangle isoscèle KZB où l'angle en Z est obtus. Nous trouvons au contraire une démonstration passablement confuse, dans laquelle, par surcroît, le texte est plus ou moins altéré. Mais RUDIO suppose implicitement qu'HIPPOCRATE admettait sans démonstration que l'angle en Z est obtus; or cela est au moins douteux, d'autant que, dans le texte actuel, nous voyons simplement énoncer que l'angle en Z est plus grand que l'angle ZKB et annoncer qu'on le démontrera plus loin. Cette démonstration, qu'on ne retrouve pas, pouvait être déduite par HIPPOCRATE de l'hypothèse $\overline{EZ}^2 = \frac{3}{2}\overline{EK}^2$, d'où l'on conclut $\widehat{EKZ} > \widehat{EZK}$. D'autre part $\widehat{EKB} < 2\,\text{dr}$. Retranchant la première inégalité de la seconde, $\widehat{ZKB} < \widehat{KZB}$. C. Q. F. D.

Dans mon essai de restitution du texte d'EUDÈME, j'ai essayé de pratiquer la critique conservatrice, c'est à dire de n'apporter aux leçons des manuscrits que le minimum de changements possible. J'ai ainsi été conduit à admettre qu'HIPPOCRATE avait en réalité admis provisoirement, sauf à le démontrer plus loin, que l'angle en Z était obtus. Aujourd'hui je rejetterais plutôt cette hypothèse, et serais par suite amené à me rapprocher davantage du texte admis par F. RUDIO; mais je crois toujours qu'il faut attribuer ce texte à EUDÈME (reproduisant d'assez près HIPPOCRATE), non pas à SIMPLICIUS.

9. Si confuse que puisse nous paraître cette démonstration, je crois plus équitable de ne pas en mettre les défauts apparents à la charge du commentateur. Si puissant géomètre qu'ait pu être HIPPOCRATE, ses habitudes n'avaient sans doute pas encore la perfection atteinte par EUCLIDE. Si maladroit, d'autre part, que se montre parfois SIMPLICIUS, il faut bien reconnaître qu'il avait l'acquis d'un enseignement méthodique sur des modèles irréprochables; pour la mise en forme d'une démonstration, il pouvait donc très bien mieux faire qu'HIPPOCRATE.

Malheureusement le passage en question est le seul, à mon avis, où nous aurions vraiment la chance de nous trouver en présence d'une démonstration d'HIPPOCRATE qui ne soit pas refaite par EUDÈME au même degré que les autres. Il y aurait donc un véritable intérêt historique à en obtenir une restitution désormais hors de toute controverse. Mais, dans les matières de ce genre, il est plus facile de faire ressortir les difficultés d'une solution proposée que d'en établir une qui rallie tous les suffrages.

Über die im „Liber augmenti et diminutionis" vorkommenden Autoren.

Von Heinrich Suter in Zürich.

Im IX. Bande der Bibliotheca arabico-hispana[1]) giebt Abû Bekr b. Chair el-Išbîlî (d. h. von Sevilla), gest. 575 d. H. (1179/80) in Cordova, ein Verzeichnis der von ihm unter den verschiedensten Professoren Spaniens studierten Werke. Viele von diesen mögen wohl von seinen Lehrern nur als Quellen zitiert worden sein, denn es wäre fast undenkbar, dafs er eine so grofse Zahl von Werken (es sind über 1400 genannt) studiert, ja auch nur gelesen haben könnte; freilich hat er fast sein ganzes Leben (er wurde beinahe 70 Jahre alt) auf Studien an sämtlichen Hochschulen Spaniens verwandt, um sich eine ausreichende Kenntnis beinahe aller Wissenschaften jener Zeit zu erwerben. Ich sage: beinahe aller Wissenschaften, denn Mathematik und Naturwissenschaften hat er nur in sehr bescheidenem Mafse berücksichtigt; ich hatte daher auch nie daran gedacht, in dem Buche den *Liber augmenti et diminutionis* zu finden, und ich habe mich hierin nicht getäuscht; dagegen führt er neun Werke über Erbteilung an und unter diesen befindet sich (p. 264) das Buch der Erbteilungen von Eijûb b. Soleimân, der betreffende Artikel lautet:

„Die Erbteilungen *(el-farâ'iḍ)* von Eijûb b. Soleimân. Ich studierte sie unter dem Scheich Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. ʿAbdallâh b. Mauhib, dieser unter Abû ʿOmar b. ʿAbdelbarr el-Ḥâfiẓ el-Namirî, dieser unter Abû ʿOmar Aḥmed b. ʿAbdallâh b. Muḥ. el-Bâǵî, dieser unter seinem Vater, dem Überlieferer Abû Muḥ. ʿAbdallâh b. Muḥ. b. ʿAlî, dieser unter Abû ʿAmr ʿOṯmân b. ʿAbderraḥmân b. Abî Zeid, dieser unter Aḥmed b. Ibrâhîm, dieser unter Abû Ǵaʿfar ʿAbdelǵanî b. Abî Aqîl el-Miṣrî, dieser unter Eijûb b. Soleimân."

Es steht nun wohl fest, dafs dieser Eijûb b. Soleimân, der Verfasser des Buches über die Erbteilungen, kein anderer ist als der im

1) Betitelt: *Index librorum de diversis scientiarum ordinibus quos a magistris didicit Abû Bequer ben Khair* (arab.) edid. Fr. Codera et J. Ribera Tarrago, Caesaraugustae 1894—1895.

Liber augmenti et diminutionis genannte Job (= Hiob = Eijûb) filius Salomonis, divisor (d. h. der Erbteiler).

Wann und wo aber hat dieser Eijûb gelebt? Die Lösung dieser Frage ist mir nicht mit voller Sicherheit gelungen; Abû Bekr b. Chair fügt leider nichts über das Leben der Verfasser der von ihm studierten Werke hinzu, er nennt ihn auch nirgendwo sonst als an der zitierten Stelle; in den übrigen mir zu Gebote stehenden biographischen Werken fand ich diesen Gelehrten noch mehrmals zitiert, aber niemals mit irgend einer Zeit- oder Ortsangabe. Was die Zeit anbetrifft, zu der er gelebt hat, so ist diese wohl angenähert zu bestimmen; das nächstliegende war natürlich, die Lebenszeit der in der obigen Stelle angeführten Lehrer der Erbteilung festzulegen. Nach dem II. Bd. der Bibliotheca arabico-hispana[1]) (p. 419) starb Abû'l-Ḥasan 'Alî b. 'Abdallâh, der Lehrer Abû Bekr b. Chairs, i. J. 532 (1137/38); Abû 'Omar b. 'Abdelbarr starb nach demselben Band (p. 618) i. J. 463 (1070/71)[2]); nach dem I. Bd. der Bibliotheca arabico-hispana (p. 11) starb Abû 'Omar Aḥmed b. 'Abdallâh el-Bâǵî i. J. 396 (1005/06); nach dem VII. Bd. desselben Werkes[3]) (p. 200) starb Abû Muḥ. 'Abdallâh b. Muḥ. b. 'Alî i. J. 378 (988/89); nach demselben Band (p. 251) starb Abû 'Amr 'Oṯmân b. 'Abderraḥmân i. J. 325 (936/37); nach demselben Band (p. 24) starb Aḥmed b. Ibrâhîm el-Faraḍî (d. h. der Erbteiler) i. J. 290 (903); die Biographie dieses Gelehrten lautet mit Weglassung des für uns Unwesentlichen: „Aḥmed b. Ibrâhîm el-Lachmî el-Faraḍî aus Cordova, mit der Kunje Abû 'Abderraḥmân, reiste nach dem Osten und kam bis nach 'Irâq, hörte bei 'Obeîdallâh b. 'Omar b. Meisara el-Qowârîrî (?) u. and. Er trug über die Erbteilungen des Eijûb b. Soleimân vor nach 'Abdelǵanî b. Abî 'Aqîl, und dieser nach Eijûb selbst. Er starb i. J. 290 im Alter von 70 Jahren."

Dieser Bericht stimmt also vollständig mit dem Schlusse der oben angeführten Stelle aus Abû Bekr b. Chair; es wäre allerdings möglich, daſs der letztere diese Angaben einfach aus dem Werke des Ibn el-Faraḍî (gest. 403 = 1012/13) abgeschrieben hätte. Von Abû Ǵa'far 'Abdelǵanî b. Abî 'Aqîl befindet sich in den Bänden der Bibliotheca arabico-hispana keine Biographie, weil er eben ein Ägypter war, doch habe ich über ihn im VIII. Bande dieses Werkes (p. 50) folgende Stelle gefunden: „Jaḥjâ b. 'Abdel'azîz, bekannt unter dem Namen Ibn el-

1) Enthaltend die *Sila* (das Geschenk) des Chalaf b. 'Abdelmelik b. Baškuwâl.

2) Zwischen diesem und dem vorhergehenden Gelehrten ist wohl ein vermittelndes Glied ausgefallen.

3) Enthaltend den *kitâb târich ulemâ' el-andalus* (das Buch der Chronik der Gelehrten Spaniens) von Ibn el-Faraḍî.

Charrâz, aus Cordova, machte Reisen und hörte in Ägypten den ʿAbdelǧanî b. Abî ʿAqîl; er (Jaḥjâ) starb i. J. 295 (907/08)." Wir kennen nun also zwei Schüler des ʿAbdelǧanî b. Abî ʿAqîl, den Aḥmed b. Ibrâhîm el-Faraḍî und den Jaḥjâ b. ʿAbdelʿazîz, beide sind zwischen 290 und 300 gestorben; wir dürfen nun ganz wohl annehmen, daſs der Lehrer ʿAbdelǧanî nicht viel früher, ja sogar um dieselbe Zeit gestorben sei, denn diese beiden Spanier mögen erst als gereifte Männer nach dem Osten gereist sein. Diese Annahme sind wir nämlich gezwungen zu machen, wenn wir den Eijûb b. Soleimân, den Lehrer des Ägypters ʿAbdelǧanî in der Erbteilung, mit den ältesten der in den spanischen Quellen genannten Gelehrten dieses Namen identifizieren wollen. Wir halten nämlich Eijûb b. Soleimân für einen Spanier, trotzdem ein Ägypter unter ihm die Erbrechnung studiert hat; denn viele spanische Araber reisten damals nach dem Osten, studierten dort, lieſsen sich dort aber auch für kürzere oder längere Zeit nieder und hielten Vorlesungen über ihr Wissensgebiet, umgekehrt kamen auch ostarabische Gelehrte, besonders Ägypter, nach Spanien, um daselbst ihre Studien zu machen.

Ibn el-Faraḍî[1]) kennt nun in seiner Chronik der Gelehrten Spaniens sechs solche mit dem Namen Eijûb b. Soleimân, aber keiner wird als Verfasser eines Buches über die Erbteilungen genannt[2]), obgleich alle Juristen waren und als solche sich auch mit der Erbteilung befassen muſsten; bei vier derselben reicht das Todesjahr zu weit hinunter, als daſs sie noch Lehrer des ʿAbdelǧanî gewesen sein könnten, die zwei ältesten sind die folgenden:

(VII. Bd. p. 77): „Eijûb b. Soleimân aus Toledo, gehörte zu den Rechtsgelehrten; es erwähnt ihn Ibn Ḥâriṯ; el-Râzî sagt, daſs er mit Jaḥjâ b. Qaṭâm und Muḥ. b. Ismâʿîl zusammen in Toledo getötet worden sei im Šauwâl d. J. 293 (906)."

(Ibid): „Eijûb b. Soleimân b. Hâšim b. Sâliḥ[3]), Abû Sâliḥ, von Cordova, aus Jaen stammend, überlieferte nach Abû Zeid ʿAbderraḥmân b. Ibrâhîm b. ʿÎsâ, ʿAbdallâh b. Châlid, Jaḥjâ b. Muzein u. and. Er war ein Imâm nach malekitischem Ritus. Bei Rechtsentscheidungen waren er und Muh. b. ʿOmar b. Lubâba zu ihrer Zeit maſsgebend. Er verfügte auch über groſse Kenntnisse in der Grammatik und Poetik, war

1) Die Verfasser der übrigen Bände der Bibliotheca arabico-hispana kennen keine Gelehrten dieses Namens, die sich nicht auch unter den von Ibn el-Faradî genannten befinden.

2) Ich muſs hier bemerken, daſs die Verfasser der acht Bände der Biblioth. arab.-hisp. sehr selten ein bestimmtes Werk eines Gelehrten nennen, sondern nur allgemein angeben, er habe Bücher über das und das Gebiet geschrieben.

3) Im III. Bd. der Biblioth. arab.-hisp. p. 223 steht „b. Sâliḥ b. Hâšim."

beredt und von umfassender Bildung. Er war auch Marktaufseher zur Regierungszeit des Emirs ʿAbdallâh, aus Widerwillen vor den Leuten desselben (des Marktes) trat er von dieser Stelle zurück. Er starb im Muḥarrem 302 (914) oder 301.[1]) Nach ihm überlieferte Aḥmed b. Muṭarrif b. ʿAbderraḥmân."

Trotz des späten Todesjahres gebe ich dem zweiten Eijûb b. Soleimân den Vorzug, er wird in den Quellen noch oft genannt als Lehrer von Juristen und Traditionisten unter dem Namen Abû Ṣâliḥ Eijûb b. Soleimân; er ist jedenfalls sehr alt geworden, denn seine beiden Lehrer Abû Zeid ʿAbderraḥmân b. Ibrâhîm und Jaḥjâ b. Muzein sind schon 258 (872), bezw. 259 (873) gestorben. Für ihn spricht auch noch der Umstand, daſs er zum Marktaufseher ernannt worden ist, denn hierzu wurden gewöhnlich Leute ausgewählt, die neben juristischen Kenntnissen auch noch Gewandtheit in der Rechenkunst aufzuweisen hatten. Wir müssen uns also vorläufig mit diesem Gelehrten zufrieden geben, obgleich es uns, wir müssen gestehen, verdächtig vorkommt, daſs von ihm gar keine schriftlichen Leistungen erwähnt werden.

Wir kommen nun zu Abraham (arab. Ibrâhîm), dem Verfasser des *Liber augmenti et diminutionis.* Die Frage, wer dieser Abraham gewesen sei, ist bedeutend schwieriger als die vorhergehende, denn weder der Name des Vaters, noch irgend ein Beiname, noch eine Nisbe ist angegeben. Keiner unter den vielen Ibrâhîm, welche in den arabisch-spanischen Quellen vorkommen, wird als Verfasser eines solchen Buches genannt, auch nicht einmal als Verfasser eines Buches über Erbteilungen; es ist daher geradezu unmöglich, mit Bestimmtheit zu entscheiden, welcher von den vielen unser Abraham sein mag. Man wird erwarten, daſs dieser Abraham ziemlich später gelebt hat als Eijûb b. Soleimân, da eine lateinische Übersetzung eines westarabischen Werkes über Mathematik aus so früher Zeit (c. 900) nicht bekannt ist, ich wage es daher kaum, folgende zwei Gelehrte als mutmaſsliche Verfasser unseres Buches aufzustellen:

1) Der in meiner Abhandlung *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (p. 44) genannte Ibrâhîm b. Jûnis, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ḥassâb (Sohn des Rechners); er hatte auch den Beinamen „Ḥâriṯ der Rechenkunst", und zwar weil er nach R. Dozy unter den Arithmetikern dieselbe Berühmtheit erlangt hatte, wie Ḥâriṯ ben ʿObâd unter den groſsen Männern vor Muḥammed. Er gehörte zum Gerichtshof von Qairowân und auch zu den Richtern der Stadt Raqâda. Er starb i. J. 308 (920/21).

---

1) Die Todesjahrangabe 301 und der Schluſssatz sind aus dem III. Bd. der Biblioth. arab.-hisp. p. 223.

2) Ibrâhîm b. Ahmed b. Mo'âd el-Ša'bânî aus Cordova, hörte bei Eijûb b. Soleimân, und bei seinem Oheim Sa'd b. Mo'âd und bei Tâhir b. 'Abdel'azîz. Er verwandte besondern Fleiſs auf das Studium der Rechtsfragen. Er starb i. J. 302 (914/15) (Biblioth. arab.-hisp. VII. Bd. p. 17).

Für den erstgenannten Gelehrten spricht, daſs er einen berühmten Namen in der Rechenkunst hatte, für den zweiten, daſs er ein Schüler von Eijûb b. Soleimân[1]) war. Etwelche Wahrscheinlichkeit für das gröſsere Alter des *Liber augmenti* liegt vielleicht auch in der Thatsache, daſs gerade um den Beginn des 10. Jahrhunderts herum eine Reihe von Erbteilern unter den Juristen Spaniens erscheinen, die zugleich mit der Rechenkunst sich beschäftigt haben, nachher werden Gelehrte dieser Richtung bedeutend seltener. Einer dieser Spätern, der also Diejenigen eher befriedigen wird, welche die beiden erstgenannten Gelehrten als einer zu frühen Zeit angehörend betrachten, ist der auch in meiner Abhandlung (p. 102) genannte Ibrâhîm b. Muh. b. Ašah el-Fehmî, Abû Ishâq, von Toledo, ein Schüler von Abû Muh. b. el-Qošârî und Jûsuf b. Asbag b. Chidr, sehr vielseitig gebildet, vor allem in Sprachwissenschaft, Erbteilung und Rechenkunst. Er starb im Ša'bân 448 (1056)[2]) (Biblioth. arab.-hisp. I. Bd. p. 94).

Sicheres wissen wir also über unsern Abraham bis jetzt noch nichts, es ist aber nicht unwahrscheinlich, daſs er mit einem der drei genannten Gelehrten identisch sei; immerhin glauben wir die Frage über Herkunft und Lebenszeit der im *Liber augmenti et diminutionis* genannten Gelehrten der endgiltigen Lösung etwas näher gerückt zu haben, die vielleicht erreicht werden wird, wenn noch andere westarabische Quellen, an denen der Escurial und andere Bibliotheken noch sehr reich sind, an die Öffentlichkeit gelangt sein werden.

---

1) Es ist dies unzweifelhaft der zweite der oben genannten Gelehrten dieses Namens, er wird noch als Lehrer von einer Reihe von Gelehrten genannt, die in den Jahren 300—350 gestorben sind; bald heiſst er Abû Sâlih Eijûb b. Soleimân, bald bloſs Eijûb b. Soleimân, sogar nur Abû Sâlih.

2) Der ebenfalls in meiner Abhandlung p. 105 genannte Erbteiler und Rechner Ahmed b. Mogît (gest. 1067) hielt ihm das Leichengebet.

Ein verschollener deutscher Cossist aus dem Anfange des sechzehnten Jahrhunderts.

Von G. Eneström in Stockholm.

Die Geschichte der Algebra in Deutschland am Ende des 15. und am Anfange des 16. Jahrhunderts ist seit längerer Zeit Gegenstand der Aufmerksamkeit der Forscher gewesen. Schon 1840 veröffentlichte M. W. Drobisch seine wertvolle Monographie über Johannes Widman[1]) und etwa gleichzeitig stellte die Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig für das Jahr 1842 eine hierher gehörende Preisfrage[2]) auf. Diese Preisfrage scheint zwar erfolglos gewesen zu sein, aber etwas später erschienen neue verdienstvolle Beiträge zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fraglichen Zeitraum, z. B. von B. Berlet[3]) und C. I. Gerhardt[4]); eine zusammenfassende Darstellung der Geschichte der deutschen Coss gab dann P. Treutlein im Jahre 1879.[5]) Dafs aber der Gegenstand damit keineswegs erschöpft war, zeigten u. a. neue wichtige Untersuchungen

1) M. W. Drobisch, *De Ioannis Widmanni Egerani compendio arithmeticae mercatorum* (Leipzig 1840).

2) Da dieselbe die erste von einer wissenschaftlichen Gesellschaft gestellte mathematisch-historische Preisfrage sein dürfte, erlaube ich mir den vollständigen Wortlaut derselben hier mitzuteilen: „Testibus historiae matheseos scriptoribus, „Hutton et Chasles, ab initio saeculi XVI. in Germania status algebrae, si ab aequa- „tionibus tertii ordinis discesseris, tam promotus erat, ut haec doctrina in patria „nostra magis exculta videretur quam in ipsa Italia. Iam vero ex illo tempore quum unici „Christophori Rudolffi Javerani nomen et opera ad nos pervenerint, qui exempla „sua e bibliotheca Vindobonensi hausisse fertur, quaeritur an ante illum iam „cossistae" „germanici fuerint, qui proprio Marte artem promoverent. Quod ut diiudicetur, „opus erit, ut in MSS. inedita bibliothecarum Norimbergensium, Vindobonensium, „Monacensium aliorumque inquiratur."

3) B. Berlet, *Die Coss von Adam Riese* (Annaberg 1860, Programm). Berlet hatte schon 1855 eine biographische Arbeit über Riese veröffentlicht.

4) C. I. Gerhardt, *Zur Geschichte der Algebra in Deutschland*. Monatsber. der Akad. d. Wiss. in Berlin 1867, 39—54; 1870, 141—153. — *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (München 1877), S. 46—60.

5) P. Treutlein, *Die deutsche Coss*. Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 2, 1879.

von E. Wappler[1]), so dafs die neue zusammenfassende Darstellung von M. Cantor im 2. Bande der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*[2]) sehr willkommen war. Aber auch diese Darstellung ward bald in gewissen Punkten veraltet, besonders auf Grund neuer, von M. Curtze herrührender Funde.[3]) Unter solchen Umständen könnte man wohl vermuten, dafs auf diesem natürlich sehr begrenzten Gebiete jetzt fast alles geleistet wurde, was überhaupt zu leisten möglich ist. Aber dem ist gewifs nicht so, denn noch giebt es manche dunkle Punkte, worüber es gar nicht unmöglich sein dürfte, Licht zu verbreiten. Insbesondere scheint es mir, als ob man durch erneute Nachforschungen imstande sein könnte, die Verfasser gewisser anonymer Schriften über die Coss zu ermitteln, und dadurch auch genauere Auskunft zu bekommen über die litterarische Wirksamkeit gewisser Persönlichkeiten, die als hervorragende Cossisten genannt werden, ohne dafs bisher einige von ihnen verfafste Schriften bekannt waren. Einen Versuch in dieser Richtung zu machen ist der Zweck nachfolgender kleinen Untersuchung.

Unter den deutschen Cossisten aus dem Anfange des 16. Jahrhunderts nennt M. Cantor[4]) auch einen Magister Andreas Alexander, welcher ein ganzes Buch über die Coss geschrieben hat. Diese Notiz hat Cantor den von Berlet herausgegebenen Bruchstücken aus der Schrift *Die Coss* von Adam Riese entnommen, und in der That scheinen fast alle Verfasser, welche Andreas Alexander erwähnen, ausschliefslich aus dieser Quelle geschöpft zu haben.

Schon in der „Ankündignng“ zu seiner Schrift nennt Riese „denn erfarenenn Mathematicum Magistrum Andream Alexandrum“[5]) als Verdeutscher eines Buches über die Coss, und auch an anderen Stellen gedenkt er derselben Persönlichkeit. In einer Bemerkung zu seinem Exempel 122) berichtet er[6]), dafs der Rechenmeister Hans Conrad dem Mönche Aquinas, „von dem auch Andreas Alexander der erfarnste Mathematicus gelernett“, für die Auflösung dieses Exempels einen Gulden gegeben hatte, und dem Exempel 143) fügt Riese hinzu[6]), dafs Hans

1) E. Wappler, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert* (Zwickau 1887, Programm).

2) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II (1892), S. 209—229, 359—394. — In der zweiten Auflage ist die Darstellung an einigen Stellen ergänzt.

3) M. Curtze, *Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fünfzehnten Jahrhundert.* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 7, 1895, 31—74. — *Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum.* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **13**, 1902, 435—609.

4) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II² (1900), S. 423.

5) Berlet, *Die Coss von Adam Riese*, S. 9.

6) Berlet, a. a. O. S. 30.

6) Berlet, a. a. O. S. 35.

CONRAD „hat obgemeltetem Mathematico 1 fl. in goltt geschenckt, Das er yme solch exempel durch die Coss zu machen geweist hatt.“ Nach BERLET finden sich in der zwischen 1544 und 1559 vollführten Umarbeitung des Buches von RIESE noch ein paar hierher gehörende Stellen. In der Vorrede sagt RIESE[1]), daſs unter seinen Zeitgenossen besonders „ANDREAS ALEXANDER . . . wie ir dan in seinem lateinischen schreiben sehen werdet“ die Coss behandelt und verbessert hat; an einer anderen Stelle der Umarbeitung spricht er[2]) von den „exempla ANDREE ALEXANDRI“.

Aus den soeben citierten Notizen geht hervor, daſs ANDREAS ALEXANDER Magister war und bei seinen Zeitgenossen in groſsem Ansehen stand. Da er Schüler von dem Mönche AQUINUS DACUS war, der sich schon vor 1471 mit der Auflösung von Rechenaufgaben beschäftigte[3]), so muſs er wohl ein älterer Zeitgenosse des im Jahre 1492 geborenen ADAM RIESE gewesen sein. Von seinen Lebensumständen erfahren wir sonst nichts aus dem veröffentlichten Stücke der RIESEschen *Coss*, aber GERHARDT nennt ANDREAS ALEXANDER den „Leipziger Mathematiker“[4]), den „Docenten der Mathematik zu Leipzig“[5]), und „Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig“[6]); es ist mir unbekannt, woher GERHARDT diese Angaben entnommen hat.

Nach RIESE scheint ANDREAS ALEXANDER teils eine lateinische Arbeit über die Coss verfaſst, teils eine deutsche Übersetzung eines Buches über denselben Gegenstand verfertigt zu haben[7]); die Worte „exempla ANDREAE ALEXANDRI“ beziehen sich wohl auf die eine oder die andere dieser Schriften. BERLET giebt an[8]), dass die erste Arbeit des ANDREAS ALEXANDER mit dem „alten verworffenen Buch“ identisch ist, das RIESE in seiner Widmung nennt[9]), aber an einer anderen Stelle sagt RIESE[10]), daſs er gewisse Lösungen auffand, ehe er „dass alte buch ader [= oder] die exempla ANDREE ALEXANDRI“ gesehen hatte, woraus man wohl ohne weiteres schlieſsen kann, daſs die Schrift des ANDREAS ALEXANDER und „das alte buch“ nicht identisch sind. Übrigens hat WAPPLER später bewiesen[11]), daſs „das alte buch“ eben die von WIDMANN verfaſste oder von ihm benutzte sogenannte „Dresdener Algebra“

1) BERLET, a. a. O. S. 4. 2) BERLET, a. a. O. S. 27.

3) Vgl. CANTOR, a. a. O. II², S. 238.

4) GERHARDT, *Zur Geschichte der Algebra in Deutschland.* Monatsber. der Akad. d. Wiss. in Berlin 1867, S. 46.

5) GERHARDT, a. a. O. S. 49.

6) GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, S. 48.

7) TREUTLEIN, a. a. O. S. 12, scheint unsicher zu sein, ob von ANDREAS ALEXANDER mehr als eine Schrift über die Coss herrührt.

8) BERLET, a. a. O. S. 20, Anm. 9) BERLET, a. a. O. S. 10.

10) BERLET, a. a. O. S. 27. 11) WAPPLER, a. a. O. S. 5.

ist. Ob die Schrift des Andreas Alexander sich erhalten hat, weiſs man also nicht, und so weit mir bekannt ist, hat man keinen Grund dieselbe mit irgend einer der vorhandenen anonymen Schriften über die Coss zu identifizieren.

Anders dürfte es sich mit der von Andreas Alexander verfertigten deutschen Übersetzung verhalten. Von derselben spricht nämlich Riese auf folgende Weise[1]): „Das Buch von dem ding [ist] auss arabischer In „krichisch gesatzt vonn Archimedo vnd alssdann auss der krichischen sprach „in di lateinische durch Apuleyum vnd Zum letzten Zu vnser ... eins „teyls verdeutst durch denn erfarnenn Mathematicum Magistrum Andream „Alexandrum.“

Aber fast dieselbe wundersame historische Notiz findet sich in einer Handschrift aus dem Jahre 1545 in der Universitätsbibliothek zu Göttingen.[2]) Dort heiſst es nämlich im „Prologus“ „Das Buch von dem Dinge ... „ist aus Arabischer Sprach jn kriechisch transferirt von Archimede vnnd „aus kriechisch jn das Latein von Apuleio, ... vnnd laut zu vnserm „Teutschen ... hernach volgt.“

Schon durch diesen Umstand wird man versucht anzunehmen, daſs die Handschrift die von Riese citierte Übersetzung des Andreas Alexander enthält. Aber dazu kommen noch andere Umstände, die diese Annahme noch wahrscheinlicher machen, und unter welchen ich hier ein paar hervorheben will. Riese sagt, daſs Andreas Alexander einen Teil des Buches von dem Ding übersetzt hat, und in der That enthält die Göttinger Handschrift nur drei Bücher, obgleich das ganze Werk nach der Inhaltsanzeige acht Bücher umfaſst. Riese hat in seiner Arbeit „Acht equaciones Algebre, gezogenn auss seynem ersten Buch“ angegeben[3]), und das erste Buch der Göttinger Handschrift, wo der Verfasser des Originals „Algebras“ genannt wird, handelt eben „de octo aequationibus et demonstrationibus earundem“, wozu noch kommt, daſs die achte Gleichung des Riese mit der achten Gleichung der Handschrift übereinstimmt, während diese Gleichung in keiner der von Riese sonst citierten Quellen sich findet.[4])

Wenn ich also aus den jetzt angeführten Gründen für wahrscheinlich halte, daſs die von Riese citierte Übersetzung des Andreas Alexander in der fraglichen Handschrift enthalten ist, so kann ich nicht umhin einen Umstand hervorzuheben, der vielleicht die Richtigkeit meiner Ansicht verdächtig machen kann. Die Handschrift, der ich Erwähnung gethan habe, ist kürzlich unter dem Titel *Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum* von M. Curtze veröffentlicht worden[5]),

1) Berlet, a. a. O. S. 9.
2) Cod. Gotting. Philos. 30.
3) Berlet, a. a. O. S. 12.
4) Vgl. Cantor, a. a. O. II², S. 423.
5) Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **13**, 1902, S. 435—609.

und in der ausführlichen Einleitung findet man nicht die leiseste Andeutung, daſs der Übersetzer mit ANDREAS ALEXANDER oder mit irgend einem anderen bisher bekannten Mathematiker identisch sein kann. Ebensowenig hat sich M. CANTOR in seiner Besprechung der Algebra des INITIUS ALGEBRAS[1]) über die Persönlichkeit des deutschen Übersetzers geäuſsert, obgleich er auf gewisse andere „Rätselfragen" aufmerksam macht. Hieraus könnte man vielleicht folgern, daſs sowohl CURTZE als CANTOR, beide hervorragende Kenner auf diesem Gebiete, einen Versuch, den Namen des Übersetzers zu ermitteln, als erfolglos betrachten. Aber trotz dieses Umstandes habe ich nicht darauf verzichten wollen, hier die Gründe für meine Ansicht, daſs dieser Übersetzer eine schon früher bekannte Persönlichkeit ist, den Fachgenossen vorzulegen.

Wenn man also wenigstens vorläufig ANDREAS ALEXANDER als Übersetzer und Kommentator der Algebra des INITIUS ALGEBRAS annehmen darf, so folgt daraus, daſs die von CURTZE herausgegebene Schrift jedenfalls vor 1524 verfaſst wurde, während man bisher nur wuſste, daſs sie nicht später als 1545 entstanden ist. Die Schrift erlangt dadurch selbstverständlich gröſseres historisches Interesse, aber in keinem Falle dürfte der historische Wert derselben so hoch zu schätzen sein, als die CURTZEsche Einleitung mit den darauf folgenden Bemerkungen anzudeuten scheint. So z. B. legt CURTZE[2]) groſses Gewicht darauf, daſs der Kommentar inbetreff der Auflösung der Gleichungen dritten Grades auf eine Stelle in den jetzt verlorenen Büchern der Algebra des INITIUS ALGEBRAS verweist, und fragt: sollte der Verfasser wirklich diese Lösung besessen haben, und zwar aus arabischer Quelle? Meiner Ansicht nach ist es mit Rücksicht auf den Inhalt des deutschen Kommentars durchaus unwahrscheinlich, daſs es sich hier um die allgemeine algebraische Lösung der kubischen Gleichungen handelt, und mit besonderen Gleichungen 3. Grades haben sich ja schon LEONARDO PISANO[3]), ferner RUDOLFF[4]) und andere Verfasser[5]) beschäftigt. Zu groſs scheint mir auch das Gewicht, daſs CURTZE[6]) auf das Vorkommen einer Methode zur Lösung unbestimmter Gleichungen 1. Grades durch ganze Zahlen legt, da wesentlich dieselbe Methode sich schon bei LEONARDO PISANO findet. In einem Anhang zu seiner Schrift *Flos* behandelt nämlich LEONARDO[7]) eine Auf-

1) Deutsche Litteraturz. 23, 1902, Sp. 2676—2677.

2) CURTZE, a. a. O. S. 441, 540.

3) Vgl. CANTOR, a. a. O. II², S. 46.

4) Vgl. CANTOR, a. a. O. II², S. 426—427.

5) Vgl. CANTOR, a. a. O. I² (1894), S. 736—738; II², S. 160—162.

6) CURTZE, a. a. O. S. 447, 573—574.

7) LEONARDO PISANO, *Scritti ed.* BONCOMPAGNI II (1862), S. 247; vgl. CANTOR, a. a. O. II², S. 50—51.

gabe, die auf die Gleichungen (1) $x + y + z = 30$, (2) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30$ hinauskommt, und benutzt dabei ein methodisches Verfahren, das zu einem Resultate führt, welches wir durch die Gleichung $y + 10z = 120$ ausdrücken können. Aber diese Gleichung wird ja erhalten, wenn man Gl. (1) mit 2 und Gl. (2) mit 6 multipliciert und dann die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert; in der That kann LEONARDOS Verfahren als eine versteckte Ausführung dieser Operationen angesehen werden. Darauf teilt LEONARDO 120 in zwei Teile derart, dafs der erste Teil durch 1 und der zweite Teil durch 10 dividiert werden kann, also in Übereinstimmung mit der Darstellung von CURTZE in der Anmerkung S. 573—574. Auch LEONARDO wufste[1], dafs die Lösung möglich ist, wenn die zwei gegebenen Zahlen nicht gleich sind, denn er behandelt auch eine Aufgabe, die zu den Gleichungen $x + y + z = 15$, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 16$ führt. Wenn also CURTZE S. 447 sagt, dafs mindestens 66 Jahre vor BACHET DE MÉZIRIAC solche Aufgaben methodisch gelöst worden sind, so kann man wohl hier ohne weiteres 400 statt 66 setzen.

Auch in bezug auf andere im deutschen Kommentar zur Algebra des INITIUS ALGEBRAS enthaltene Methoden oder Sätze wäre es nützlich gewesen, wenn der Herausgeber auf ihr Vorkommen bei älteren Verfassern aufmerksam gemacht hätte. So z. B. wäre es vielleicht angebracht S. 448 zu bemerken, dafs schon OMAR ALKHAYAMI[2] ähnliche Formeln für $\sqrt[3]{a^2 + b}$ gekannt haben dürfte, S. 497 hinsichtlich der 8. Gleichung auf ALKARCHI zu verweisen[3] und S. 546 hinzuzufügen, dafs schon LEONARDO PISANO wufste[4], man brauche nur bis zur Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl die Divisionen fortzusetzen, wenn man untersuchen will, welches die Divisoren dieser Zahl sind.

Zum Schlufs erlaube ich mir noch einmal darauf hinzuweisen, dafs ich nicht behaupte durch die vorangehende Untersuchung bewiesen zu haben, dafs ANDREAS ALEXANDER mit dem deutschen Übersetzer und Kommentator der Algebra des INITIUS ALGEBRAS identisch ist, sondern dafs ich dies nur als sehr wahrscheinlich hingestellt habe. Es wäre darum erwünscht, dafs meine Annahme durch neue Nachforschungen über die Lebensumstände des ANDREAS ALEXANDER bestätigt werden könnte.

---

1) LEONARDO PISANO, a. a. O. II (1862), S. 248.
2) Vgl. CANTOR, a. a. O. I², S. 732.
3) Vgl. CANTOR, a. a. O. I², S. 737.
4) LEONARDO PISANO, a. a. O. I (1857), S. 38.

Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von der Fresnelschen Wellenfläche.

Von E. WÖLFFING in Stuttgart.

1. Die FRESNELsche *Wellenfläche* war bereits 1881 Gegenstand einer historischen Monographie von BÖKLEN [5].[1]) Der vorliegende Bericht stellt sich die Aufgabe, diese Arbeit zu ergänzen und bis zur Gegenwart fortzuführen, wobei insbesondere auf die geometrischen Eigenschaften Rücksicht genommen wird; übrigens erstreckt sich das beigegebene möglichst vollständige Litteraturverzeichnis auch auf die physikalischen Anwendungen der Fläche. Die Wellenfläche, der Ort der Punkte, in welche eine von einem Punkt ausgehende, in einem doppelt brechenden Medium sich fortpflanzende Welle zu einer bestimmten Zeit gelangt ist, wurde von FRESNEL [1] zuerst angegeben, der seine Arbeit am 26. XI. 1821 der Pariser Akademie vorlegte. Die Hauptfortschritte in ihrer Theorie verdankt man HAMILTON, MAC CULLAGH, WALTON, NIVEN, BÖKLEN, DARBOUX und vor allem MANNHEIM, der über 20 Arbeiten derselben gewidmet hat. Bei den ältesten Autoren heifst die Fläche oft nur die *Welle* (l'onde, the wave); HAMILTON nannte sie wohl am zutreffendsten *Surface of ray velocities*, MAC CULLAGH [2] *biaxal surface*. Doch findet sich der Name *surface de l'onde* schon bei FRESNEL ([1] S. 69).

2. Sind $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, die Hauptbrechungskoeffizienten des Mediums, so heifst die Fläche

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (1)$$

Ergänzungsellipsoid (auch Konstruktionsellipsoid oder erstes Ellipsoid (nach PLÜCKER [1]). Ferner ist dann die Gleichung der Wellenfläche:

$$W \equiv \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2} - 1 = 0 \quad (2)$$

oder

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) - [a^2(b^2+c^2)x^2 + b^2(c^2+a^2)y^2 + c^2(a^2+b^2)z^2] + a^2b^2c^2 = 0. \qquad (2')$$

1) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf den „Litteraturnachweis" am Ende des Aufsatzes.

Die Herleitung dieser Gleichung, insbesondere von der später zu erwähnenden Wellengeschwindigkeitsfläche ausgehend, auf die einfachste Weise zu bewirken, bemühten sich zahlreiche Mathematiker: Fresnel [2][3], Ampère [1] [2], Cauchy [2] [4], Senf bei F. Neumann [2], Hamilton [1] [2], Mac Cullagh [2], Smith [1] [2], Sylvester [1], Lubbock [3], Galopin-Schaub [1]. Cauchy [4] behauptet, dafs auch von Ettingshausen eine Lösung dieser Aufgabe gegeben habe; Lubbock [1] glaubte irrtümlich, dafs die Flächen von Fresnel und Cauchy von einander verschieden seien. Eine andere Form der Gleichung ist:

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0 \qquad (2'')$$

eine dritte gab Tait [2]:

$$\frac{x^2}{b^2c^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)}+\frac{y^2}{c^2a^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)} + \frac{z^2}{a^2b^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)}=0. \qquad (2''')$$

Die Gleichung in *Ebenenkoordinaten* findet sich z. B. bei Beer [3], Frosch [1] und Kolaček [1]; vermittelst der *singulären* Ebenen wurde die Fläche von Booth [1] ausgedrückt. Hamilton [2] und Sylvester [1] gaben die *Radioangulargleichung*, in welcher der Radiusvektor als Funktion seiner Winkel mit den optischen Achsen erscheint. W. Roberts (bei Salmon [1], p. 288) und Cayley [5] drückten die Fläche vermittelst Laméscher elliptischer Koordinaten aus; die Quaternionengleichung wurde von Tait [1] und Hamilton [4] aufgestellt.

Irrationale Parameterdarstellungen der Koordinaten finden sich bei Catalan [2] und Cayley [6]. Von der durch Weber [1] eingeführten Parameterdarstellung vermittelst *elliptischer Funktionen*, wobei die sphärischen und ellipsoidischen Linien Parameterkurven sind, machten Sophie von Kowalewski [1], Volterra [1] und Lacour [1] [2] Gebrauch. Sophie von Kowalewski [1] und Weber [2] machten darauf aufmerksam, dafs hierbei den beiden Mänteln der Fläche verschiedene Parameterdarstellungen zukommen. Bricard [1] drückte die Koordinaten des Tetraedroids durch elliptische σ-Funktionen aus.

3. Die Fläche ist von der 4. Ordnung und von der 4. Klasse. Ihre Stellung im System der F_4 wurde von Rohn [1] angegeben; sie gehört zum Typus IVa seiner Einteilung. Als *Kummersche Fläche* mit 16 Knotenpunkten und zwar der speziellen Klasse der *Tetraedroide*, von Cayley [1] eingeführt, angehörig, nimmt sie teil an den Eigenschaften dieser wichtigen Flächenklassen. Die *Schnitte* der Fläche mit den Koordinatenebenen zerfallen, wie schon Fresnel [1] [2] [3], Ampère [1] [2] und Smith [3] bemerkten, je in einen Kreis (*Hauptkreis*) und eine Ellipse (*Hauptellipse*).

Im Unendlichen, wo die Fläche imaginär ist, geht sie durch den unendlich fernen Kugelkreis und durch den unendlich fernen Kegelschnitt des *Polarisationsellipsoids* (zweites Ellipsoid nach PLÜCKER; *Indikatrix* nach FLETCHER):

$$E \equiv a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0, \tag{3}$$

das die Hauptbrechungskoeffizienten als Achsen hat und zum Ergänzungsellipsoid polarreziprok ist. So entstehen in jeder Fundamentalebene 4 *Knotenpunkte* (*singuläre Punkte*) der Fläche. Von denselben sind jedoch nur die 4 in der Ebene $y = 0$ liegenden als Schnitt von Hauptkreis und Hauptellipse (cf. MANNHEIM [**10**]) reell, wenn $a > b > c$ ist. Dieselben wurden von AMPÈRE [**1**][**2**] und HAMILTON [**1**] entdeckt. Die Tangentialkegel in denselben können keine Drehungskegel sein (FROSCH [**1**]). PRESCOTT [**1**] und CATALAN [**2**] zeigten, dafs die Kreisschnittebenen senkrecht stehen auf dem Radius des hindurchgehenden Hauptkreises (sog. *sekundäre optische Achsen*, von SYLVESTER [**1**] primi radii, von FLETCHER [**1**] biradials genannt) und auf der Normalen der hindurchgehenden Hauptellipse. Nach BOOTH [**1**] berühren die Tangentialkegel der 4 singulären Punkte einer Hauptebene alle dasselbe Ellipsoid. Bei der liniengeometrischen Definition der Wellenfläche (PAINVIN [**1**] [**2**]) entsprechen den singulären Punkten in Doppelebenen ausartende Kegel des erzeugenden Komplexes. Nach NIVEN [**1**] und MANNHEIM [**23**] liegen die Fufspunkte der Ursprungslote auf die Tangentialebenen eines Tangentialkegels auf einem Kreis. Die Kreisschnittebenen des Normalenkegels in einem singulären Punkt stehen nach LACOUR [**1**] senkrecht auf der betreffenden Hauptachse, und sind parallel zu den gemeinsamen Tangenten von Hauptkreis und Hauptellipse in dieser Ebene. CLIFTON [**1**] hat darauf aufmerksam gemacht, dafs die Wellenfläche in der Nähe eines singulären Punktes annähernd durch einen Wulst von geringer Excentrizität ersetzt werden kann; die betreffenden Gebiete werden von BOOTH [**2**] „basins“ genannt.

4. Polarreziprok (nach DURRANDE [**2**]) zu den 16 singulären Punkten sind die 16 *singulären Ebenen*, welche zu den Hauptebenen senkrecht stehen und die Fläche längs (doppelt zählenden) Kreisen berühren, von denen jedoch auch nur die 4 senkrecht zur Ebene $y = 0$ stehenden reell sind. Die Ursprungslote auf die reellen singulären Ebenen heifsen *wahre optische Achsen* („prime normals“ nach SYLVESTER [**1**], „binormals“ nach FLETCHER [**1**]); sie gehen durch die Mittelpunkte der Berührungskreise. Die singulären Ebenen, deren Entdeckung SMITH [**3**], der die Lage und Gröfse des Berührungskreises untersuchte, GREATHEED zuschreibt, finden sich ebenfalls bereits bei HAMILTON [**1**]. Nach LACOUR [**1**] liegt jeder Berührungskreis mit einem Hauptkreis auf einer Kugel. Die Komplexkegel-

schnitte in den singulären Ebenen arten in Doppelpunkte aus (Painvin [1] [2]); die Ebenen parallel zu den singulären schneiden nach Mannheim [10] [12] die Fläche in anallagmatischen C_4. Dafs die Wellenfläche aufser den Knotenpunkten keine Doppelkurve besitzen kann, zeigte Larmor [1], nachdem schon Stokes [1] bewiesen hatte, dafs aus optischen Gründen der Rand einer etwaigen Vertiefung der Fläche eben sein müsse. Die *Nabelpunkte* der Fläche bestimmten Galopin-Schaub [2] und Mannheim [14] [17] p. 334, welch' letzterer zeigte, dafs die 8 Punkte des Ergänzungsellipsoids, für welche die Strecke der Hauptkrümmungscentra vom Mittelpunkt unter rechtem Winkel erscheint, auf die Nabelpunkte der Wellenfläche führen. Vgl. über diese Punkte auch noch Böklen [3] und de Salvert [1].

5. Die Wellenfläche besteht aus *zwei Mänteln*, welche in den Knotenpunkten aneinanderstofsen. Zech [1] gab eine anschauliche *gestaltliche Beschreibung* der Fläche, vgl. auch Lamé [1] und Catalan [2]. Rohn [1] zeigte, dafs die Fläche zwei elliptisch gekrümmte Gebiete besitzt, von denen eines durch die 4 Tangentialkegel der Knotenpunkte, das andere durch die 4 Berührungskreise begrenzt ist. Je ein Kegel und ein Kreis schliefsen ein hyperbolisch gekrümmtes Gebiet ein (vgl. auch Schuh [1]). Beer gab bereits eine Abbildung eines *Kartonmodells* der Fläche; ferner hatte damals (1853) Soleil in Paris ein *Gypsmodell* des zwischen beiden Mänteln der Fläche liegenden Raumteils hergestellt, und Plücker besafs ein von Magnus verfertigtes *Holzmodell* der Fläche. Hicks [1] gab später ein Verfahren an, um die Fläche vermittelst weniger ebener Schnitte zu modellieren; das Modell befindet sich im „Cavendish physical laboratory" in Cambridge. Endlich ist eine Darstellnng der Fläche vermittelst der sphärischen und ellipsoidischen Linien von Böklen [4] ausgeführt und von L. Brill (Darmstadt) in den Handel gebracht worden.

6. Die *sphärischen* und *ellipsoidischen* Linien der Wellenfläche finden sich zuerst bei Hamilton [1] und Sylvester [1]. Erstere sind die Schnitte der Wellenfläche mit einer Schaar konzentrischer Kugeln; nach Catalan [2] werden sie, je nachdem sie auf dem $\left|\begin{matrix}\text{äufseren}\\\text{inneren}\end{matrix}\right|$ Mantel der Fläche liegen, durch konfokale $\left|\begin{matrix}\text{ein-}\\\text{zwei-}\end{matrix}\right|$ schalige Hyperboloide ausgeschnitten, sind daher sphärische Kegelschnitte. Die ellipsoidischen Linien sind die Orthogonaltrajektorien der sphärischen (Lamé [1] p. 264); sie werden durch Ellipsoide ausgeschnitten, welche zu den erwähnten Hyperboloiden konfokal sind. Nach Böklen [1] und Mannheim [19] schneidet ein Ursprungskegel, der eine sphärische Linie des einen Mantels projiziert, den andern Mantel in einer ellipsoidischen Linie. Die Ursprungskegel, welche die

spärischen und ellipsoidischen Linien projizieren, sind konfokal mit den sekundären optischen Achsen als Fokallinien. Ebenso fallen auch die Projektionen der sphärischen Kurven des einen Mantels auf eine Hauptebene mit den Projektionen der ellipsoidischen Linien des andern Mantels zusammen; die Projektionen sind nach Böklen [2] affin zu konfokalen C_2. Die Tangentialebenen, welche durch die Tangenten des äufseren Mantels an den inneren gelegt werden, berühren eine konzentrische Kugel (Böklen [6]). Tait [1] gab die Gleichung der sphärischen und ellipsoidischen Linien in Quaternionen; wie bereits bemerkt, sind sie auch Parameterlinien in der Darstellung durch elliptische Funktionen. Volterra [1] gab einen Überblick über die Verteilung der Parameterwerte auf beiden Mänteln und über die auftretenden Unstetigkeiten. Weber [2] bemerkte, dafs die sphärischen und ellipsoidischen Linien eine nichtkonforme Abbildung der Wellenfläche auf das Ergänzungsellipsoid vermitteln. Böklen zeigte, dafs bei jedem aus je einem Paar sphärischer und ellipsoidischer Kurven gebildeten *Viereck* auf der Fläche die Abstände einer Hauptebene von den vier Ecken, sowie von den Durchdringungspunkten von je vier zu zwei Gegenseiten gehörigen Tangenten dieser Linien mit einer andern Hauptebene in Proportion stehen. Ferner sind in einem solchen Viereck die Entfernungen von je zwei Gegenecken einander gleich; die Entfernung eines Punktes der Wellenfläche vom Endpunkt der sekundären optischen Achse ist gleich dem Abstand der Schnittpunkte der durch den Punkt gehenden sphärischen und ellipsoidischen Linie mit einer Hauptebene. In Gilberts [1] Theorie der Apsidalflächen treten die ellipsoidischen Linien als *Attraktionslinien* auf, d. h. ihre Tangenten liegen in der *Meridianebene*; so heifst die Ebene durch Radiusvektor und Flächennormale der Wellenfläche. Dafs die genannten Linien *Schwingungslinien* in der Fresnelschen Theorie der Doppelbrechung sind, haben Hamilton [1], Sylvester [1] und Walton [2] bemerkt. Painvin [2] untersucht die Developpablen der Tangenten der ellipsoidischen Linien; Zech [2] [3] die *Developpablen*, welche zu den sphärischen und ellipsoidischen Linien in Bezug auf das Direktionsellipsoid (siehe unten) polarreziprok sind. Durrande [2] zeigte, dafs die Tangentialebenen der zu einer ellipsoidischen Linie polarreziproken Developpabeln die Kugel berühren, welche die auf demselben Ursprungskegel wie die ellipsoidische Linie gelegene sphärische Kurve ausschneidet. Mannheim [21] betrachtet in einer mir leider unzugänglichen Arbeit Kegel, welche anallagmatische Kurven aus der Wellenfläche ausschneiden. Nach Painvin [1] [2] schneidet die Wellenfläche das Ergänzungsellipsoid in der imaginären Kurve, welche dasselbe mit der Kugel gemein hat, von deren Punkten aus drei aufeinander senkrechte Tangentialebenen an das Ellipsoid gehen (*orthoptische* Kugel). Humbert [2]

untersuchte die Gattungen der auf der Wellenfläche (resp. dem Tetraedroid) möglichen algebraischen Kurven.

7. Über *Durchmesser* und *Diametralebenen* der Wellenfläche sind zahlreiche Sätze, von denen einige, in optischer Einkleidung, sich schon bei Walton [9] finden, von Mannheim mitgeteilt worden. Einige derselben finden sich in der Arbeit [4]; in [6] zeigt Mannheim, daſs, wenn ein Ursprungslot auf einer Meridianebene durch Radius OM und Normale MN die Mäntel der Fläche in M_1 und M_2 trifft, die Gröſse $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM_1}+\frac{1}{OM_2}$ konstant, d. h. von der Wahl des Punktes M unabhängig ist. In [11] stellt Mannheim folgenden Satz auf: Werden senkrecht zu den Spuren der Meridianebene OMN in den Hauptebenen Diametralebenen konstruiert, so bestimmen diese auf der Normalen MN proportionale Stücke. Die Strahlenschiefe, d. h. der Winkel zwischen Normale und Radiusvektor wurde von Sylvester [1] bestimmt, die Strahlen gröſster Schiefe von Walton [3]. Dieselben liegen in der Ebene $y = 0$; sind resp. φ, χ, ψ die Neigungen der x-Achse gegen die wahre und die sekundäre Achse und gegen einen solchen Strahl, so ist

$$\operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi.$$

Soret [1] zeigte, unter Zugrundelegung eines Beweises von Cellérier, daſs die Maxima und Minima der Fuſspunktkurven der Diametralschnitte in dieselben Radien fallen, wie die Maxima und Minima dieser Schnitte selbst.

8. Die zur Wellenfläche in Bezug auf die Einheitskugel *polarreziproke* Fläche ist ebenfalls eine Wellenfläche W' und wurde von Hamilton [1] *surface of components* (of normal slowness) genannt. Daſs viele Autoren Hamilton den Namen „surface of wave slowness" (Wellenlangsamkeitsfläche, nach Galopin-Schaub [2]: „surface de l'onde lente") zuschreiben, läſst vermuten, daſs dieselben ebensowenig wie Plücker Hamiltons Originalarbeit vor sich gehabt haben können, sondern nur das Referat von Lloyd [1]. Die Fläche hat noch andere Namen bekommen: Mac Cullagh [2] *surface of refraction*, später [3] [4], wo er eine Konstruktion angab, *index-surface* (cf. Tait [2]); Cauchy [3], der als ihr Konstruktionsellipsoid das von ihm eingeführte Polarisationsellipsoid benützte, *surface caractéristique*. Indeſs zeigte Plücker [1], daſs die Wellenfläche zu sich selbst polarreziprok (autopolar) ist in Bezug auf ein Ellipsoid

$$\frac{x^2}{bc}+\frac{y^2}{ca}+\frac{z^2}{ab}-1=0, \tag{4}$$

das er *Direktionsellipsoid* („ellipsoide directeur") nannte. Beweise dieses Satzes finden sich bei Tait [2], Durrande [2], Catalan [2], Town-

SEND [1], NIVEN [3]. Dabei heifsen nach LAMÉ [1], p. 247 ein Punkt der Wellenfläche und der Berührungspunkt seiner Polarebene in Bezug auf das Direktionsellipsoid *konjugierte Punkte*. DARBOUX [2] zeigte, dafs die Wellenfläche in Bezug auf $10\,F_2$ autopolar ist (aufser dem Direktionsellipsoid drei imaginäre Mittelpunktsflächen, die schon PLÜCKER kannte, und sechs Paraboloide). Die Indexfläche ist autopolar in Bezug auf das zum Direktionsellipsoid polarreziproke Ellipsoid.

9. Die *Fufspunktfläche* der Wellenfläche

$$V \equiv \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2} = 0 \qquad (5)$$

oder

$$(x^2+y^2+z^2)^3 - (x^2+y^2+z^2)\left((b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2\right)$$
$$- (b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2) = 0 \qquad (5')$$

heifst *Wellengeschwindigkeitsfläche* und ist zu W' invers (BRILL [2] [3]). Sie ist namentlich von CATALAN [2], der sie als Ort sphärischer Kegelschnitte erkannte, aber irrtümlicher Weise für die Indexfläche von MAC CULLAGH hielt, und von BÖKLEN [3] [5] untersucht worden; siehe auch PAINVIN [2]. BOOTH [2] erwähnt auch die zweite Fufspunktfläche der Wellenfläche, sowie deren erste negative Fufspunktfläche, von welcher schon früher Lord RAYLEIGH (= W. STRUTT) [1] nachgewiesen hatte, dafs sie die Enveloppe der Ebenen ist, welche parallel zu den Zentralschnitten des Polarisationsellipsoids in Abständen gleich den Achsen desselben gelegt werden, dafs sie ferner vom 16. Grad ist und als Approximation der Wellenfläche dienen kann. Die Fufspunktfläche des Ergänzungsellipsoids, welche gewöhnlich *Elastizitätsfläche* heifst, ist eine ebenfalls von FRESNEL [1] S. 67 entdeckte, zur Wellenfläche apsidale (CATALAN [2]) F_6:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0, \qquad (6)$$

welche vielfach untersucht worden ist (z. B. von MAGNUS [1], GALOPIN-SCHAUB [2], DURRANDE [2], LACOUR [2]), auch in Bezug auf physikalische Anwendungen (BENTZIEN, Diss. Greifswald 1881; ZIMMERMANN, Diss. Göttingen 1881; DOORMANN, Diss. Göttingen 1882; F. HAUGER, Diss. Greifswald 1886; RIEDEL, Diss. Leipzig 1891); ihre Parallelflächen sind von E. HUTT (Pr. Tilsit 1868) komplaniert worden.

10. Für die *Tangentialebene* gab DARBOUX [2] folgende Konstruktion: N sei ein Punkt der Wellenfläche, M_1 der Schnitt seiner Polarebenen in Bezug auf $3\,F_2$ durch die vier singulären Punkte im Unendlichen und durch die vier singulären Punkte in einer Hauptebene; M_2 der Schnitt seiner Polarebenen in Bezug auf $3\,F_2$ durch die acht singulären Punkte in den andern Hauptebenen; so ist $M\,M_1\,M_2$ Tangentialebene und $M\,M_1$,

MM_2 konjugierte Tangenten. In [2] bewies Mannheim folgenden Satz: Legt man parallele Tangentialebenen an das Ergänzungsellipsoid und an beide Mäntel der Wellenfläche, so schneiden die Durchmesser durch die drei Berührungspunkte und der Durchmesser senkrecht zur Ebenenstellung jede der drei Ebenen in Punkten eines Rechtecks. Die *Normalenkonstruktion* gab Mannheim schon in [1]. Nach Sylvester [1] sind die zwei zu einem Radius gehörigen Meridianebenen auf einander senkrecht; ebenso die zwei zu einer Normalenrichtung gehörigen Meridianebenen. Jede Meridianebene halbiert den Winkel zwischen den Ebenen durch ihren Radius und die sekundären optischen Achsen, ebenso den Winkel der Ebenen durch ihre Normale und die wahren optischen Achsen. In [22] betrachtet Mannheim Normalen in den Punkten einer Flächenkurve; in [5] und [13] abwickelbare Normalenflächen. In [4] zeigt er: Schneidet das Lot vom Mittelpunkt o auf die Normale des Punktes m_1 der Wellenfläche diese Fläche in a_1 und b_1, ist ferner t_1 Fufspunkt des Lots von o auf die Tangentialebene in m_1, so sind $oa_1^2 + ob_1^2 + om_1^2$ und $oa_1 \cdot ob_1 \cdot ot_1$ von der Wahl des Punktes m_1 unabhängig. Böklen [7] betrachtete das oskulierende Ellipsoid der Wellenfläche mit Anwendung auf den Vorgang des Sehens. Das *Bogenelement* wurde von Combescure [1], Cayley [6] und Weber [2] gegeben. Konstruktionen der *Krümmungsmittelpunkte* sind von Mannheim [1] [15] [17] p. 332 [20] und Niven [3] mitgeteilt worden. Ersterer gab auch in [20] die *Indikatrix* und in [1] und [20] die *Hauptschnitte* (Richtungen der Krümmungslinien) an, (siehe auch Tait [1]) und bestimmte den Winkel, unter welchem die Strecke der Hauptkrümmungszentra vom Mittelpunkt erscheint (eine bemerkenswerte Differentialinvariante der dreigliedrigen Rotationsgruppe des Raumes). Die *Hauptkrümmungsradien* sind auch von Cayley [6] berechnet worden. Die *Centrafläche* wurde von Combescure [1], Cayley [6] und Böklen [10] untersucht. Die beiden letzteren bestimmten insbesondere die Kuspidalkurven derselben; es sind C_6 resp. C_4. Cayley [6] vermutet, dafs die Centrafläche von der 38. Ordnung ist.

11. Über der Bestimmung der *Krümmungslinien* der Wellenfläche waltete ein eigentümlicher Unstern. Zech [3] glaubt dieselben in den Berührungskurven der zu den sphärischen und ellipsoidischen Kurven polarreziproken Developpablen gefunden zu haben. Zwar nahm er in [4] diese Behauptung, deren Unrichtigkeit er erkannt hatte, zurück, aber bereits hatte Cayley in einem Referat [2] über die Arbeiten Zechs die angebliche Entdeckung weiter verbreitet und ehe derselbe in [3] von dem Widerruf Zechs Kunde geben konnte, machten sich Bertrand [1], Brioschi [1] und Combescure [1] an die Widerlegung der irrtümlichen Behauptung. Dazwischen kam noch Rouché [1] mit einer Mitteilung an

die französische Akademie, daſs er die Krümmungslinien der Wellenfläche gefunden habe; doch auch er muſste diese Behauptung wieder zurückziehen. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien wurde nun weiter von COMBESCURE [**1**], BRIOSCHI [**1**], CAYLEY [**1**], der die Hauptschnitte als Krümmungslinien erkannte, und DARBOUX [**4**] [**6**] [**7**] untersucht. Ersterer vermutete, ihr Integral werde im allgemeinen algebraisch sein; DARBOUX [**4**] bestritt dies dagegen ausdrücklich auf Grund der Entdeckung, daſs dasselbe in einem Grenzfall (kugelähnliche Wellenfläche bei cylinderähnlichem Ergänzungsellipsoid) nicht algebraisch ist. Doch ist dieser Schluſs von einem Grenzfall auf den allgemeinen Fall natürlich nicht zwingend, und man weiſs daher heute noch nicht, ob die Krümmungslinien der Wellenfläche algebraisch sind. Übrigens können dieselben in der Nähe der Nabelpunkte mit algebraischen Kurven 10. Ordnung verwechselt werden (DARBOUX [**4**]). Noch einmal sollten die Krümmungslinien zu einem Irrtum Anlaſs geben, indem AUGUST in einem Referat (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **14** [1882], 696) BÖKLEN [**6**] die Behauptung zuschrieb, er habe im Gegensatze zu DARBOUX [**4**] algebraische Kurven, nämlich die ellipsoidischen Linien, für Krümmungslinien der Wellenfläche gehalten. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, daſs BÖKLEN nur behauptet hatte, diese Kurven seien Krümmungslinien der Ellipsoide, welche dieselben ausschneiden. Dieser letztere Satz findet sich schon bei CATALAN [**1**], ebenso bei MANNHEIM [**19**], der noch bemerkt, daſs auch die sphärischen Kurven Krümmungslinien der ausschneidenden Hyperboloide sind. PAINVIN [**3**] bemerkt ausdrücklich, daſs die Krümmungslinien der Ellipsoide *nicht* Krümmungslinien der Wellenfläche sind.

12. Die *Asymptotenkurven* der Wellenfläche, welche nach ROHN [**1**] keine Inflexionstangenten besitzen, sind von DARBOUX [**4**] [**6**] [**7**] untersucht worden. Er machte darauf aufmerksam, daſs die Asymptotenkurven des Tetraedroids bereits von LIE (Comptes rendus Paris **71**, 1870, 579—583; vgl. auch KLEIN und LIE, Monatsber. Ak. Berlin 1870, 891—899) bestimmt und als algebraische Kurven 16. Ordnung und Klasse erkannt worden waren und gab ihren Zusammenhang mit der liniengeometrischen Erzeugung der Fläche vermittelst eines CHASLESschen Komplexes an. Alle Tangentialebenen nämlich in den Punkten einer Asymptotenkurve berühren die Kegel, deren Spitzen resp. ihre Berührungspunkte sind und deren Erzeugende das Tetraeder der vier Fundamentalebenen (inkl. der unendlich fernen) in einem von der Wahl der Asymptotenkurve abhängenden konstanten Doppelverhältnis schneiden. Die Differentialgleichung der *geodätischen Linien* ist von COMBESCURE [**1**] und CAYLEY [**6**] aufgestellt worden.

13. Die *Kubatur* der Wellenfläche wurde von W. Roberts [1] [2] vermittelst elliptischer Integrale 1. und 2. Gattung ausgeführt. Glaisher [1] gab das Volumen des Tangentialkegels in einem singulären Punkt bis zur Polarebene dieses Punkts in Bezug auf das Ergänzungsellipsoid. Die Komplanation der Fläche ist noch nicht ausgeführt worden, ebensowenig Schwerpunktsbestimmungen.

14. *Erzeugungen* der Wellenfläche als *Ort von Punkten:*

a) Konstruktion von Fresnel [1] [2] [3]: Wellenfläche als Ort der Endpunkte der Lote, welche im Mittelpunkte auf den Centralschnitten des Ergänzungsellipsoids errichtet und gleich den Achsen dieser Schnitte gemacht werden. Vgl. auch Mac Cullagh [1] und Walton [7], der bemerkt, dafs die Tangentialebenen in den beiden so entstehenden Flächenpunkten einander parallel sind. S. Roberts [1] hat diese Konstruktion verallgemeinert, indem er auf den Loten statt der Länge r einer solchen Achse die Strecken $\sqrt{\frac{r^2}{kr^2+1}}$ oder $\sqrt{\frac{r^2}{kr^2-1}}$ abtrug und damit wieder auf eine Wellenfläche kam.

b) Konstruktion als *Apsidalfläche*. Dieselbe geht auf Mac Cullagh [2] zurück, doch stammt die eigentliche Theorie von Catalan [1] [2]. Die Wellenfläche ist eine Apsidalfläche des Ergänzungsellipsoids, d. h. auf jeder Meridianebene dieses Ellipsoids wird im Mittelpunkt ein Lot gleich dem Radiusvektor des Ellipsoids errichtet, so ist der Ort der Endpunkte dieser Lote eine Wellenfläche. Siehe ferner Niven [3], Darboux [7] und „Un Abonné" [1], wo eine Verallgemeinerung, indem das Lot gleich einer Funktion des Radiusvektors gemacht wird.

c) Die Erzeugung von Walton [1] durch die ellipsoidischen Linien, deren jede alle drei Hauptkreise schneiden mufs, und welche als Schnitte von Umdrehungscylindern oder von Drehflächen zweiter Ordnung erscheinen. Ebenso läfst Durrande [4] die Wellenfläche durch ihre sphärischen Kurven erzeugen, welche [2] als Supplementarkegelschnitte der sphärischen Kegelschnitte des Ergänzungsellipsoids auftreten (siehe auch Catalan [2] und W. Roberts bei Salmon [1] p. 331).

d) Nach dem Zeugnis von Geiser [1] und Weierstrass (bei Steiner [1] p. 724, 742) stellte Steiner 1860 die Aufgabe nach dem Ort der Punkte, von welchen aus an ein Ellipsoid Tangentialkegel mit einem rechtwinkligen Hauptschnitt gehen. Weierstrass fand, dafs man eine Wellenfläche erhält; doch ist das gegebene Ellipsoid nicht Ergänzungsellipsoid derselben; vielmehr, wenn ersteres die Achsen a, b, c hat, sind diejenigen des letzteren $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{c^2+a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$. Vgl. ferner Lampe [1], der die Erzeugungsweise zuerst publiziert zu haben scheint, Mannheim [16] [19], Böklen [8] und Haas [1], der allgemein die Frage nach

dem Spitzenort der ähnlichen Tangentialkegel des Ellipsoids untersuchte. Geiser findet übrigens das Ergänzungsellipsoid der Wellenfläche als Bestandteil des Orts. Mannheim [**16**] definiert die Wellenfläche auch als Ort der Spitze eines rechten Winkels, dessen Schenkel ein Ellipsoid berühren und dessen Ebene in den Berührungspunkten auf der Fläche senkrecht steht (siehe auch S. Roberts [**1**]), oder wie sich Mannheim (a. a. O.) auch ausdrückt: Projiziert man ein Ellipsoid normal auf eine Tangentialebene in m, so liegen die Fufspunkte der vier von m auf die Kontour gefällten Normalen auf einer Wellenfläche. Diese Erzeugung, bei welcher die Flächennormale immer durch den Mittelpunkt der Berührungssehne des Winkels geht ([**17**] p. 265), kommt zwar auf die Steinersche hinaus; sie wurde aber von Mannheim [**18**] verallgemeinert, indem jetzt jeder Schenkel eines von zwei konfokalen Ellipsoiden berührt, während seine Ebene zu jedem im Berührungspunkt senkrecht bleibt; der Ort der Spitze ist immer noch eine Wellenfläche.

e) Die Definition von Niven [**1**] ist die einzige unabhängige von einem Ellipsoid: Legt man durch einen Punkt einer Fläche und je durch einen von drei konzentrischen in zu einander senkrechten Ebenen gelegenen Kreisen (den Hauptkreisen) Kugeln und steht die Verbindungslinie des Flächenpunkts mit dem zweiten Schnittpunkt der drei Kugeln auf der Verbindungslinie dieses Punkts mit dem Mittelpunkt senkrecht, so ist die Fläche eine Wellenfläche, während der zweite Schnittpunkt der Kugeln eine Wellengeschwindigkeitsfläche beschreibt (siehe auch Lacour [**1**]). Mannheim [**24**] ebenso Genty [**1**] und Michel [**1**] haben in Beantwortung einer Frage von „de Crès" [**1**] den Zusammenhang dieses Satzes mit der Mac Cullaghschen Definition klargelegt. Darboux [**4**] [**6**] hat an Stelle der Hauptkreise drei beliebige Kreise eingeführt und einen Punkt O, welcher von dem Schnittpunkt H der drei Kreisebenen verschieden ist, und welcher an Stelle des Mittelpunkts in der Nivenschen Definition tritt. Die Fläche ist aber alsdann eine F_5; sie wird jedoch eine F_4 (ein Tetraedroid), wenn O und H zusammenfallen.

f) Böklen [**1**] bewies, dafs die Brennpunkte der durch die grofse Achse gehenden Hauptschnitte aller Ellipsoide, welche einen Zentralschnitt gemein haben, auf einer Wellenfläche liegen. In [**9**] zeigte er noch, dafs die Brennpunkte der Hauptschnitte durch die kleine Achse dieser Ellipsoide eine Painvinsche Fläche erzeugen.

g) Endlich wurde von Böklen [**6**] folgende Erzeugung angegeben: Konstruiert man alle Ellipsoide mit gemeinsamem Zentralschnitt, für welche die Quadratsumme der grofsen und der $\left|\begin{matrix}\text{kleinen}\\ \text{mittleren}\end{matrix}\right|$ Achse konstant ist, so liegen die Endpunkte der zu dem Centralschnitt konjugierten

Durchmesser auf einer Wellenfläche. Brill [2] [3] hat die Bestimmung der Wellenfläche aus einem ebenen Zentralschnitt mit Rücksicht auf die optischen Anwendungen angegeben, wobei sich zwei nur in der mittleren Achse verschiedene Lösungen ergaben; vgl. auch Mannheim [23], der die Achsen aus einem Zentralschnitt, einem Flächenpunkt und einer Tangentialebene bestimmt, und neuerdings Viola [1].

15. *Erzeugungen* der Wellenfläche als *Enveloppe*:

a) Nach Cauchy [1] und Hamilton [1] wird die Wellenfläche erzeugt als Enveloppe der Ebenen, welche senkrecht zu den Radien der Indexfläche in einem Ursprungsabstand reziprok zu diesen Radien (in Bezug auf die Einheitskugel) gelegt werden oder wie Zech [2] es ausdrückt: welche parallel zu den Diametralschnitten des Ergänzungsellipsoids im Ursprungsabstand gleich der reziproken Länge der Halbachse dieser Schnitte gelegt werden; ähnlich Frosch [1]; siehe auch Zech [1], Niven [3], Mannheim [8], welcher zeigt, dafs die zu den Tangentialebenen eines singulären Punktes der Wellenfläche parallelen Tangentialebenen des Ergänzungsellipsoids einen Drehungscylinder umhüllen.

b) Böklen [6] zeigte, dafs die Ebene der Kreise, in welchen die zu je einem Berührungscylinder des Ergänzungsellipsoids koaxialen, ein- und umbeschriebenen Drehungscylinder die orthoptische Kugel des Ellipsoids schneiden, die Wellenfläche umhüllen.

c) Andrerseits wird nach Painvin [2] die Wellenfläche umhüllt durch die Drehungscylinder, deren Leitlinien die Projektionen der orthoptischen Kugel auf die Tangentialebenen des Ellipsoids sind.

d) Zech [2] [3] definiert endlich die Wellenfläche als Enveloppe der Schaaren von Developpablen, welche zu den sphärischen und ellipsoidischen Linien polarreziprok sind.

16. *Liniengeometrische Erzeugungen* der Wellenfläche. Die Wellenfläche ist nach Painvin [1] [2] und Mannheim [18] zusammen mit einer anderen Fläche Singularitätenfläche des Komplexes der Geraden, von welchen an das Ergänzungsellipsoid zwei aufeinander senkrechte Tangentialebenen gehen. Painvin [2] zeigte, dafs der |äufsere / innere| Mantel der Wellenfläche der Ort der Punkte ist, für welche der Komplexkegel in zwei |reelle / imaginäre| Ebenen zerfällt. Painvin [2] und S. Roberts [1] kennzeichneten den |äufseren / inneren| Mantel der Wellenfläche als Enveloppe der Ebenen, deren Komplexkegelschnitte in |imaginäre / reelle| Punktepaare ausarten. Painvin [3] definierte die Wellenfläche zusammen mit einer andern Fläche 12. Ordnung und 12. Klasse mit vier Doppelkurven 4. Ordnung und sech-

fachem Punkt im Mittelpunkt, als Ort von Brennpunkten von Komplexkegelschnitten. In diesem Zusammenhang mufs noch folgende Erzeugung von MANNHEIM [**16**] erwähnt werden: Die Fufspunkte der Lote vom Mittelpunkt des Ellipsoids auf die Sehnen, welche vom Mittelpunkt unter rechtem Winkel erscheinen, erfüllen einen von einer Wellenfläche umgrenzten Raum.

17. Eine *Schaar* von ähnlichen und ähnlich gelegenen Wellenflächen findet sich bei VOLTERRA [**1**] in elliptischen Koordinaten.

Der *Spezialfall*, dafs das Ergänzungsellipsoid ein *Drehungsellipsoid* wird, findet sich schon bei FRESNEL [**1**] [**2**] [**3**] und MAC CULLAGH [**1**]; die Wellenfläche zerfällt alsdann in eine Kugel und ein Drehungsellipsoid (siehe auch z. B. BRILL [**2**] [**3**]). Aus einer Andeutung von WEIERSTRASS (bei STEINER II, 742) geht hervor, dafs die STEINERsche Konstruktion auf ein Paraboloid angewandt, eine F_3 liefert.

18. *Verallgemeinerungen* der Wellenfläche sind ziemlich viele bekannt geworden. Zunächst kann an Stelle des Ergänzungsellipsoids eine allgemeine Mittelpunktsfläche 2. Ordnung treten. Diesen Fall hat DURRANDE [**3**] [**4**] behandelt; er nennt diese Flächen *surfaces analogues à la surface des ondes*. Aufser Arbeiten von S. ROBERTS [**1**] und ISSALY [**3**], der die Fläche *surface normodirective minima* nennt, vergleiche man die Abhandlung [**1**] von LEGOUX, welcher die Wellenfläche als Spezialfall eines konfokalen aber nicht orthogonalen F_4-Systems ansieht, bei welchem durch jeden Punkt des Raumes aufser einer Wellenfläche zwei von Hyperboloiden abgeleitete analoge Flächen gehen. Zwei solche Flächen schneiden sich in Kurven 12. Ordnung; die Enveloppe des Systems ist eine Developpable 8. Ordnung. Natürlich enthalten auch die „hyperboloidischen" Wellenflächen sphärische Kegelschnitte und Krümmungslinien von F_2 als ihre Orthogonaltrajektorien. LEGOUX entwickelt auch die Differentialgleichung der Nulllinien, der Asymptotenkurven und der Krümmungslinien. Das von CAYLEY [**1**] eingeführte *Tetraedroid* geht in eine Wellenfläche über, wenn drei Tetraederebenen auf einander senkrecht stehen, die vierte ins Unendliche gerückt ist, und von den Schnittkegelschnitten in jeder der ersteren Ebenen einer in einen Kreis übergeht. Das *Tetraedroid* ist eine Fläche vom Rang 12; es giebt 48 Ebenen (je 12 durch eine Tetraederecke), welche die Fläche in C_2 schneiden. Nach NIVEN [**3**] liegen die Punkte, deren Projektionen auf die Achsen die Mittelpunkte der drei Kugeln bei der NIVENschen [**1**] Erzeugung der Wellenfläche sind auf einer F_4 mit 16 imaginären und acht reellen Geraden und drei asymptotischen elliptischen Cylindern. Die Fläche wird auch, wenn man durch je eine Hauptellipse und einen Punkt der Wellenfläche ein zum Polarisationsellipsoid ähnliches Ellipsoid legt, durch den zweiten endlichen Schnittpunkt der drei Ellipsoide erzeugt. MANNHEIM [**19**] betrachtet Flächen,

welche Spitzen von Tangentialkegeln sind, deren Hauptschnitte einen konstanten, von einem Rechten verschiedenen Winkel bilden, und zeigt, dafs sie ebenfalls Krümmungslinien von Ellipsoiden enthalten. Eine Verallgemeinerung von Walton [1] besteht darin, dafs bei seiner Erzeugung die ellipsoidischen Linien, statt die drei Hauptkreise zu schneiden, anderen Bedingungen genügen müssen; er giebt die Differentialgleichung der so definierten Fläche. Eine von Cauchy [1] angegebene allgemeine Wellenfläche mit 76 singulären Punkten in jedem Hauptschnitt und mit 24 singulären Tangentialebenen ist von Knoblauch [1] näher untersucht worden. Ebenso beschäftigen sich die Arbeiten von Pochhammer [1] [2] mit der Cauchyschen Fläche, von welcher ein Spezialfall sich bei F. Neumann [1] findet. Ein anderer Spezialfall, bei welchem die Fläche von der 4. Ordnung ist und als Hauptschnitte Ellipsenpaare besitzt, ist von Pochhammer [2] erwähnt und von Schuh [1] als *elektromagnetische* Wellenfläche näher untersucht worden. Als affine Fläche zur gewöhnlichen Wellenfläche besitzt sie auch die singulären Punkte und Tangenten derselben. Auch die elektromagnetische Wellenfläche von Heaviside [1] [2] [3] entsteht durch affine Deformation aus der Fresnelschen (siehe auch Mac Aulay [1]). Endlich ist auch die Wellenfläche von Boussinesq [1], welche den Übergang zwischen zwei Fresnelschen bildet, zu diesen affin. Issaly [2] betrachtet allgemeine Wellenflächen mit Höhlungen, welche zwischen den Mänteln der Fresnelschen gelegen sind. Eine Verallgemeinerung von Darboux [7] bezieht sich auf Flächen, deren Asymptotenkurven sich ebenso wie bei der Fresnelschen durch eine Eulersche Gleichung bestimmen lassen. Zuletzt wäre noch die der theoretischen gegenüber stehende physikalische Wellenfläche von Cellérier [1] [2] zu erwähnen, sowie die F_6 von Beltrami [1].

19. Die Gleichung einer *n-dimensionalen* „Wellenfläche" gab Vahlen [1]. Schoute [1] verallgemeinerte für dieselbe zwei Erzeugungen von Mannheim [2] und zeigte [2], dafs die n-dimensionale Übertragung der Steinerschen Konstruktion auf ein anderes Gebilde führt.

20. Auf dem Gebiet der *Mechanik* hat Böklen [6] eine interessante Eigenschaft der Wellenfläche entdeckt. Er zeigte, dafs alle Punkte eines Körpers, für welche ein Hauptträgheitsradius konstant ist, auf einer Wellenfläche liegen, und dafs die Tangenten der ellipsoidischen Linien die Richtungen dieser konstanten Trägheitsradien angeben. Die durch den Schwerpunkt und den konstanten Trägheitsradius bestimmte Ebene schneidet die Ebene des gröfsten und des $\left|\begin{matrix}\text{kleinsten}\\ \text{mittleren}\end{matrix}\right|$ Trägheitsradius in der Flächennormale, je nachdem der Punkt auf dem $\left|\begin{matrix}\text{äufsern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right|$ Mantel liegt.

21. Die *optischen* Anwendungen waren nicht allein die Veranlassung zur Entdeckung der Wellenfläche, sondern sie spielen auch in den meisten Arbeiten über dieselbe eine wichtige Rolle. Die innere und äufsere *konische* (und cylindrische) *Refraktion*, welche auf den singulären Punkten und Tangentialebenen beruht, wurde von HAMILTON [**1**] theoretisch vorhergesagt und von LLOYD [**2**] sofort bestätigt (siehe auch SMITH [**3**], PRESCOTT [**1**]). Eine wichtige Stelle nehmen die Untersuchungen über die optischen Voraussetzungen ein, welche mit der FRESNELschen Fläche vereinbar sind. Man vergleiche hierüber die Arbeiten von LÉVY [**1**] [**2**], wo die FRESNELsche Fläche vereinbar erscheint mit den Auffassungen von FRESNEL; MAC CULLAGH, NEUMANN, CAUCHY, LAMÉ, MASSIEU; SARRAU, MAXWELL; BOUSSINESQ. Andererseits hat KOHLRAUSCH [**1**] nachgewiesen, dafs bei Zugrundelegung der FRESNELschen Fläche die Theorie der Doppelbrechung mit der Beobachtung in einer befriedigenden, innerhalb der Fehlergrenzen liegenden Übereinstimmung steht (cf. auch CELLÉRIER [**2**]). Das den meisten doppelbrechenden Substanzen zugehörige Ergänzungsellipsoid ist übrigens ein sehr kugelähnliches. Verschiedene optische Fragen werden in Arbeiten von MAC CULLAGH [**1**], BEER [**1**] [**2**], WALTON [**3**] [**6**] [**8**] [**9**] [**10**] [**11**] [**12**] [**13**] [**14**], CURTIS [**1**], ZECH [**3**], GALOPIN-SCHAUB [**2**], BRILL [**1**], MANNHEIM [**4**] [**6**], ISSALY [**2**] behandelt; insbesondere erscheinen bei englischen und andern Autoren geometrische Sätze in optischem Gewande. Hervorheben mufs ich noch WALTONS [**10**] *equiradial cone*, einen Kegel 4. Ordnung, für dessen Erzeugung beide Strahlengeschwindigkeiten der Welle einander gleich sind und welcher die *equiradial curve* WALTONS [**11**] ausschneidet. EWALD [**1**] und GALOPIN-SCHAUB [**2**] unterscheiden | negativ / positiv | zweiachsige Krystalle, je nachdem $b^2 - c^2 \lesseqgtr a^2 - b^2$, d. h. je nachdem der | innere / äufsere | Mantel dem ordentlichen Strahl bei der Doppelbrechung entspricht.

22. Anwendungen auf die *Elektrizität* und den *Magnetismus* wurden, abgesehen von der erwähnten elektro-magnetischen Wellenfläche HEAVISIDES [**1**], MAC AULAYS [**1**] und SCHUHS [**1**], besonders von SELLA [**1**] gemacht, der die FRESNELsche Fläche als Wellenfläche in magnetischen Krystallen nachwies. RAVEAU [**1**] zeigte, dafs bei elektrischer Isotropie und magnetischer Anisotropie die FRESNELsche Fläche auftrete. Die Fläche, welche dem Fall der elektrischen Anisotropie entspreche, sei von HERTZ untersucht worden.

Litteraturnachweis.

(Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind mir nicht zugänglich gewesen.)

Ampère, A. M. [1] *Mémoire sur la détermination de la surface courbe des ondes lumineuses dans un milieu dont l'élasticité est différente suivant les 3 directions principales.* Ann. chim. phys. **39**$_2$ (1828), 113—144. — [2] *Bestimmung der krummen Fläche der Lichtwellen in einem Mittel, dessen Elasticität verschieden ist nach den 3 Hauptrichtungen.* Ann. Phys. **30**$_2$ (1833), 262—295.

Bassett, A. B. [1] *Treatise on physical optics* (London 1892), p. 123.

Beer, A. [1] *On the deduction of Fresnels construction from the formulae of Cauchy for the motion of the light.* Philos. mag. **2**$_4$ (1851), 297—303. — [2] *Sur le calcul de la surface de l'onde de Fresnel.* Ann. chim. phys. **34**$_3$ (1852), 347—354. — [3] *Einleitung in die höhere Optik* (Braunschweig 1853, 2. Aufl. 1882).

Beltrami, E. [1]* *Sulla teoria generale delle onde piane.* Rend. circ. mat. Palermo **5** (1891), 227—235.

Bertrand, J. [1] *Note sur la surface des ondes.* Comptes rendus ac. Paris **47** (1858), 817—819. — [2] *Traité de calcul différentiel* I (Paris 1864). — [3] *Étude des surfaces algébriques.* Journ. des savants 1867, p. 644—656; Nouv. ann. de mathém. **7**$_2$ (1868), 49—56.

Billet, F. [1] *Traité d'optique physique* (II. Paris 1859).

Böklen, O. [1] [2] [3] *Über die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.* Zeitschr. für Mathem. **24** (1879), 400—405; **25** (1880), 207—213, 346—351. — [4] *Die sphärischen und die ellipsoidalen Curven einer Wellenfläche.* Mathem. Modelle XX, Darmstadt 1880. — [5] *Die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.* Progr. Reutlingen 1881. — [6] *Über die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.* Zeitschr. für Mathem. **27** (1882), 160—175. — [7] *Über die Krümmung der Flächen.* Journ. für Mathem. **96** (1884), 152—182. — [8] *Über die Tangentialkegel der F_2.* Mathem.-nat. Mitt. Stuttgart **1** C (1886), 48—55. — [9] *Note sur une surface étudiée par Painvin.* Nouv. ann. de mathém. **18**$_3$ (1899), 370—372. — [10] *Über die Wellenfläche.* Zeitschr. für Mathem. **44** (1899), 289—297.

Booth, W. [1] *On Hamiltons singular points and planes on Fresnels wave-surface.* Proc. roy. soc. Dublin **8**$_2$ (1897), 381—388. — [2] *On Fresnels wave-surface and surfaces related thereto.* Trans. roy. soc. Dublin **6**$_2$ (1897), 205—212.

Boussinesq, J. [1] *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés.* Journ. de mathém. **13**$_2$ (1868), 209—224.

Bricard, R. [1] *Étude du tétraédroide.* Nouv. ann. de mathém. **18**$_3$ (1899), 197—217.

Brill, A. [1] *Über die Differentialgleichungen für die Lichtschwingungen.* Mathem. Ann. **1** (1869), 225—252. — [2] *Bestimmung der optischen Wellenfläche aus einem Centralschnitt derselben.* Sitzungsber. Acad. München (Mathem. Kl.) **13** (1883), 423—435; Mathem. Ann. **34** (1889), 297—305.

Brioschi, F. [1] *Sulle linee di curvatura delle superficie delle onde.* Annali di matem. **2** (1859), 135—136. — [2] *Osservazioni sulla medesima quistione.* Annali di matem. **2** (1859), 285—287.

Briot, C. [1] *Essai sur la théorie mathématique de la lumière.* Paris 1864.

Catalan, E. *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes.* [1] *Rapport* par M. Gilbert. Bull. ac. Bruxelles **27**$_2$ (1869), 129—142. — [2] *Le mémoire complet.* Nouv. mém. ac. Bruxelles **38** (1871). — [3] *Sur les lignes de courbure de l'ellipsoide et de la surface des ondes.* Assoc. franç. **7** (Congrès de Paris 1878), 58—62.

Cauchy, A. L. [1] *Applications de formules qui réprésentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de repulsion mutuelle à la théorie de la lumière.* Exercices de mathém. **5** (Paris 1830), 19—72. — [2] *Mémoire sur la théorie de la lumière.* Mém. ac. Paris **10** (1831), 286—316. — [3] *Note sur la surface des ondes lumineux dans les cristaux à 2 axes optiques.* Comptes rendus ac. Paris **13** (1842), 319—323. — [4] *Mémoire sur la polarisation rectiligne et la réfraction.* Mém. ac. Paris **18** (1842), 153—217.

Cayley, A. [1] *Sur la surface des ondes.* Journ. de mathém. **11** (1846), 291—296. — [2] *On the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **3** (1860), 16—22. — [3] *Note on the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **3** (1860), 142—144. — [4] *On the tetraedroid as a sixteennodal quartic surface.* Journ. für Mathem. **87** (1879), 161—164. — [5] *Equation of the wave surface in elliptical coordinates.* Mess. of mathem. **8**$_2$ (1879), 190—191. — [6] *Sur la surface des ondes.* Annali di matem. **20**$_2$ (1892), 1—18.

Cellérier, C. [1] *Mémoire sur la surface des ondes.* Mém. soc. sci. phys. et nat. Genève **23** (1874), 161—235. — [2] *Note sur la surface des ondes.* Arch. sci. phys. et nat. Genève **49**$_2$ (1874), 5—23.

Clifton, R. B. [1] *On the conical refraction of a straight line.* Quart. journ. of mathem. **3** (1860), 360—363.

Combescure, E. [1] *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes.* Annali di matem. **2** (1859), 278—285.

„de Crès R." [1] *Question 1267.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 79—80.

Curtis, A. H. [1] *A geometrical proof of professor Mac Cullaghs theorem of the polar plane.* Quart. journ. of mathem. **1** (1857), 134—141.

Darboux, G. [1] *Sur une nouvelle définition de la surface des ondes.* Comptes rendus ac. Paris **92** (1881), 446—448. — [2] *Sur les surfaces à 16 points singuliers et des fonctions à 2 variables.* Comptes rendus ac. Paris **92** (1881), 685—688. — [3] *Sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes.* Comptes rendus ac. Paris **97** (1883), 1039—1045. — [4] *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes.* Comptes rendus ac. Paris **97** (1883), 1133—1135. — [5]* *Sur la surface des ondes.* Paris 1887 (vielleicht identisch mit [6]?). — [6] *Sur la surface des ondes.* Ann. éc. norm. Paris **6**$_3$ (1889), 379—388. — [7] *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* IV (Paris 1896), Note 8, p. 466—488.

Durrande, H. [1] *Sur la surface des ondes de Fresnel.* Nouv. ann. de mathém. **20** (1861), 456—458. — [2] *Recherches sur la surface des ondes.* Nouv. ann. de mathém. **2**$_2$ (1863), 193—204, 252—261. — [3]* *Propriétés géométriques des surfaces analogues à la surface des ondes.* Thèse (Paris) Moulins 1864. — [4] *Sur les surfaces du 4e ordre.* Nouv. ann. de mathém. **9**$_2$ (1870), 410—417, 440—457.

Dziwinski, P. [1]* *Die Fresnelsche Wellenfläche vom Standpunkt der Geometrie* (poln.). Progr. Jaroslaw 1878.

Ewald, J. W. [1] *De crystallis duorum axium opticorum* (Diss. Berlin 1837).

Fletcher, L. [1]* *The optical indicatrix.* London 1892. — [2] *Die optische Indicatrix.* Deutsch von Ambronn (Leipzig 1893).

Fresnel, A. J. [1] *Extrait d'un mémoire sur la double réfraction.* Bull. soc. philom. Paris 1822, 63—71.[1] — [2] *Sur la double réfraction.* Mém. ac. Paris **7** (1828), 45—176. — [3] *Über die doppelte Strahlenbrechung.* Ann. phys. **23**$_2$ (1831), 372—434.

1) Auf diese Arbeit wurde ich in freundlicher Weise von Herrn J. E. Hill in Morgantown (West-Virg.) aufmerksam gemacht.

Frosch, C. [1] *Die singulären Punkte und Tangentialebenen der Wellenfläche.* Progr. Schneidemühl 1870.

Galopin-Schaub, C. [1]* *Sur l'équation des ondes lumineuses dans les milieux biréfringents.* Thèse (Paris) Genève 1858. — [2] *Étude sur la théorie de la double réfraction.* Arch. sci. phys. et nat. Genève 18_2 (1863), 131—144.

Geiser, C. F. [1] *Über die Fresnelsche Wellenfläche.* Verhandl. Schweiz. Naturf. Gesellsch. 54 (Frauenfeld 1871), 178—192.

Genty, E. [1] *Réponse à la question 1267.* L'interméd. des mathém. 5 (1898), 260.

Gilbert, P. [1] *Sur quelques propriétés des surfaces apsidales.* Bull. ac. Bruxelles 28_2 (1869), 31—53.

Glaisher, J. W. L. [1]* Solutions of Cambridge problems 1878, p. 184.

Glazebrook, R. T. [1] *An experimental investigation into the velocities of normal propagation of plane waves in a biaxal crystal.* Phil. trans. roy. soc. London 170 (1880), 287—377.

Haas, A. [1] *Über die einem Ellipsoid umschriebenen Kegel.* Mathem.-nat. Mitt. Stuttgart 4_2 (1902), 39—44.

Hamilton, W. R. [1] *Third supplement to an essay on the theory of systems of rays.* Trans. r. ir. ac. Dublin 17 II (1837), 1—144.[1]) — [2] *On a mode of deducing the equation of Fresnels wave.* Philos. mag. 19_3 (1841), 381—383. — [3] *On some quaternion equations connected with Fresnels wave surface of biaxal crystals.* *Proc. roy. ir. ac. Dublin 7 (1858), 122—124, 163—164; *Report Brit. assoc. 29 (Aberdeen 1859) II, 248; *Natural history review, London 6 (1859), 240—242, 365. — [4] *Elements of quaternions* (London 1866), p. 336—357.

Hammon, C. [1] *Die Leistungen Fresnels in der Wellentheorie.* Diss. München 1858.

Heaviside, O. [1] *On the electromagnetic wave surface.* Philos. mag. 19_5 (1885), 377—419. — [2]* *Electrical papers* II (London 1892), p. 1. — [3] *On the transformation of optical wave-surfaces by homogeneous strain.* Proc. roy. soc. London 55 (1894), 30—43.

Herschel, J. F. W. [1] *Theory of light.* London 1828 (Franz. Übers. Bruxelles 1828—1829; Deutsche Übers. Stuttgart 1831).

Hicks, W. M. [1]* *Practical method of modelling the wave surface.* Mess. of mathem. 5_2 (1876), 183—186.

Humbert, G. [1] *Sur les surfaces de Kummer elliptiques.* Amer. journ. of mathem. 16 (1894), 221—253. — [2] *Détermination des courbes algébriques de degré quelconque qu'on peut tracer sur la surface de l'onde.* Bullet. soc. mathem. Paris 30 (1902), 23—28.

Issaly. [1] *Connexité et généralisation de trois lieux géométriques.* Mém. soc. sci. Bordeaux 5_3 (1889), 163—183. — [2] *Mémoire sur une double série de surfaces nouvelles comprises entre les deux nappes de la surface de l'onde de Fresnel et sur les cônes isochromatiques circonscrits à ces surfaces.* Mém. soc. sci. Bordeaux 5_3 (1889), 251—275. — [3] *Mémoire sur une surface d'ondes réfléchies corrélative de celle de Fresnel et sur la double série de surfaces d'onde moyennes dont elle est la limite.* Mém. soc. sci. Bordeaux 2_4 (1891), 339—377.

„Jesuiticus". [1] *Remarks on a paper of Mr. Moon on Fresnels theory of double refraction.* Philos. mag. 28_3 (1846), 144—145.

Knoblauch, J. [1] *Über die allgemeine Wellenfläche.* Diss. Berlin 1882.

Kohlrausch, W. [1] *Über die experimentelle Bestimmung der Lichtgeschwindigkeiten in Krystallen.* Ann. phys. 6_3 (1879), 86—116; 7_3 (1879), 427—435.

1) Sylvester [1] nennt irrtümlich Laplace als Verfasser dieser Abhandlung.

Koláček, F. [1] *Theorie der Doppelbrechung in induktiver Darstellung.* Ann. phys. 47_3 (1892), 258—264.

Kowalewski, S. [1] *Über die Brechung des Lichtes in krystallinischen Mitteln.* Acta Mathem. **6** (1885), 249—304.

Lacour, E. [1] *Sur la surface de l'onde.* Nouv. ann. de mathém. 17_3 (1898), 266—272. — [2] *Sur la surface de l'onde et la surface correspondante de l'élasticité.* Nouv. ann. de mathém. 19_3 (1900), 362—369.

Lamé, G. [1] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité.* Paris 1852.

Lampe, E. [1]* *Sur quelques problèmes relatifs à la surface des ondes.* Progr. Berlin 1870.

Larmor, J. [1] *The singularities of the optical wave-surface, electric stability and magnetic rotatory polarisation.* Proc. mathem. soc. London **24** (1893), 272—290.

Lecoux, A. [1] *Sur une nouvelle propriété d'un système triple de surfaces quartiques homofocales, comprenant comme cas particulier la surface des ondes.* Nouv. ann. de mathém. 4_3 (1885), 393—408.

Lévy, M. *Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de Fresnel.* [1] Comptes rendus ac. Paris **105** (1887), 1044—1050. — [2] Journ. de mathém. 4_4 (1888), 257—312.

Lloyd, H. [1] *Report on the progress and present state of physical optics.* Report Brit. assoc. **4** (Edinburgh 1834), 295—413. — [2] *On the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxal crystals.* Trans. roy. ir. ac. Dublin **17** II (1837), 145—157 — [3] *Elementary treatise on the wave theory of light.* 2. ed. London 1857.

Lubbock, J. W. *On the wave surface in the theory of double refraction.* [1] Philos. mag. 11_3 (1837), 417—421. — [2] Philos. mag. 12_3 (1838), 47—48. — [3] Philos. mag. 15_3 (1839), 351—357.

Mac Aulay, A. [1] *On the wave-surface and rotation of polarisation plane in an aeolotropic electromagnetic medium.* Philos. mag. 42_5 (1896), 224—231.

Mac Cullagh, J. [1] *On the double refraction of light in a crystallized medium according to the principles of Fresnel.* Trans. roy. ir. ac. Dublin **16** II (1831), 65—78. — [2] *Geometrical propositions applied to the wave theory of light.* Trans. roy. ir. ac. Dublin **17** II ((1837), 241—264. — [3] *On the laws of crystalline reflection and refraction.* Trans. roy. ir. ac Dublin **18** I (1838), 31—74. — [4] *Mémoire sur les lois de la réflexion et de la réfraction crystalline.* Journ. de mathém. **7** (1842), 217—265.

Magnus, L. J. [1] *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie.* I. Berlin 1837.

Mannheim, A. [1] *Détermination géométrique pour un point de la surface des ondes de la normale, des centres de courbure principaux et des directions des lignes de courbure.* Comptes rendus ac. Paris **64** (1867), 170—174, 268—269. — [2] *Deux théorèmes nouveaux sur la surface de l'onde.* Comptes rendus ac. Paris **77** (1873), 839—840. — [3]* *Sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. **3** (Lille 1874), 1168—1193. — [4] *Propriétés des diamètres de la surface de l'onde et interprétation physique de ces propriétés.* Comptes rendus ac. Paris **81** (1875), 369—370; Assoc. franç. **4** (Nantes 1875), 231—235. — [5] *Recherches sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. **4** (Nantes 1875), 167—173. — [6] *Nouvelles propriétés géométriques de la surface de l'onde qui s'interprètent en optique.* Comptes rendus ac. Paris **82** (1876), 368—369. — [7]* *Nouvelles propriétés optiques déduites de l'étude géométrique de la surface de l'onde.* Journ. de phys. **5** (1876), 137—144. — [8] *Remarque sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. **5** (Clermont-

Ferrand 1876), 130—140. — [9] *Sur les plans tangents singuliers de la surface de l'onde et sur les sections faites dans cette surface par des plans parallèles à ces plans tangents.* Assoc. franç. **6** (Le Havre 1877), 125—127. — [10] *Sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. **6** (Le Havre 1877), 167—168. — [11] *Sur les normales de la surface de l'onde.* Assoc. franç. **6** (Le Havre 1877), 175—176. — [12] *On the wave surface.* Mess. of mathem. $\mathbf{7}_2$ (1877), 100—101. — [13] *Sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. **7** (Paris 1878), 63—67. — [14] *Détermination géométrique des ombilics de la surface de l'onde.* Comptes rendus ac. Paris **88** (1879), 902—908. — [15] *Sur la surface de l'onde et sur la transformation d'un pinceau.* Comptes rendus ac. Paris **88** (1879), 1248—1252. — [16] *Sur la surface de l'onde considérée comme surface limite.* Comptes rendus ac. Paris **90** (1880), 971—974. — [17] *Cours de géométrie descriptive.* Paris 1880 (2 éd. 1886). — [18] *Nouvelle génération de la surface de l'onde et constructions diverses.* Comptes rendus ac. Paris **90** (1880), 1333—1336. — [19] *Sur la surface de l'onde et théorèmes relatifs aux lignes de courbure des F_2.* Proc. roy. soc. London **32** (1881), 447—450. — [20] *Construction plane des éléments de courbure de la surface de l'onde.* Collectanea Mathem. (Milano 1881), p. 91—104. — [21]* *On the wave surface.* Mess. of mathem. $\mathbf{14}_2$ (1885), 189—190. — [22]* *Note on the wave surface.* Mess. of mathem. $\mathbf{15}_2$ (1885), 40—41. — [23] *Propriétés nouvelles de la surface de l'onde.* Comptes rendus ac. Paris **122** (1896), 708—711. — [24] *Réponse à la question 1267.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 238—240.

Marx, C. M. [1] *Zur Geschichte der Lehre von der doppelten Strahlenbrechung.* Ann. phys. $\mathbf{78}_2$ (1849), 272—274.

Massieu, F. J. D. [1]* *Sur la mode de propagation des ondes planes et sur la surface de l'onde élémentaire dans les cristaux biréfringents à 2 axes.* Thèse Paris 1861.

Mathieu, E. [1] *Note sur la surface de l'onde.* Journ. de mathém. $\mathbf{11}_2$ (1866), 298—304.

Michel, F. [1] *Réponse à la question 1267.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 258.

Moon, R. *On Fresnels theory of double refraction.* [1] Philos. mag. $\mathbf{27}_3$ (1845), 553—559. — [2] Philos. mag. $\mathbf{28}_3$ (1846), 134—136. — [3]* *Fresnel and his followers.* Cambridge.

Moutier, J. [1] *Sur l'intensité de la lumière.* Journ. éc. polyt. cah. **59** (1889), 77—96.

Neumann, C. [1] *Vorlesungen über theoretische Optik.* Leipzig 1885.

Neumann, F. [1] *Theorie der doppelten Strahlenbrechung.* Ann. Phys. $\mathbf{25}_2$ (1832), 418—454. — [2] *Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach denen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflektiert und gebrochen wird.* Abh. Ak. Berlin 1835, p. 1—160.

Niven, C. [1] *On some theorems connected with the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **9** (1868), 22—24. — [2] *On Mr. Mannheims researches on the wave-surface.* Quart. journ. of mathem. **15** (1878), 242—257. — [3] *On some properties of the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **15** (1878), 257—266.

Painvin, L. *Étude d'un complexe du 2e ordre.* [1] Bullet. sci. mathém. **2** (1871), 368—382; [2] Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{11}_2$ (1872), 49—60, 97—107, 202—210, 289—297, 481—500, 529—535. — [3] *Étude d'un système de rayons.* Journ. de mathém. $\mathbf{19}_2$ (1874), 57—113.

Plücker, J. [1] *Discussion de la forme générale des ondes lumineuses.* Journ. für Mathem. **19** (1839), 1—44, 91—92.

Pochhammer, L. [1] *De superficiei undarum derivatione.* Diss. Berlin 1863. — [2] *Über*

die optischen Axen der allgemeinen Wellenoberfläche von Cauchy und Neumann. Ann. Phys. 121_2 (1864), 239—249.

Prescott, J. E. [1] *On the wave surface.* Quart. journ. of mathem. 2 (1857), 1—8.

Preston, T. [1]* *The theory of light.* London 1890.

Raveau, C. *Sur la surface de l'onde dans les cristaux.* Comptes rendus ac. Paris 112 (1891), 1056—1058.

Lord Rayleigh (J. W. Strutt). [1] *On double refraction.* Philos. mag. 41_4 (1871), 519—528.

Roberts, S. [1] *On some formulae of the equation of the wave-surface.* Quart. journ. of mathem. 17 (1881), 319—326.

Roberts, W. *Cubature de la surface des ondes.* [1] Comptes rendus ac. Paris 55 (1860), 503. — [2] Annali di matem. 4 (1861), 345—347.

Rohn, K. [1] *Die verschiedenen Gestalten der Kummerschen Fläche.* Mathem. Ann. 18 (1881), 99—160.

Rouché, E. [1]* L'Institut 27 (1859), No. 1328.

de Salvert, F. [1]* *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces.* Ann. soc. sci. Bruxelles 5 B (1881), 291—478. — [2]* *Mémoire sur les ombilics coniques.* Ann. soc. sci. Bruxelles 7 B (1882), 143—248.

Schoute, P. H. [1]* *Uitbreiding van het begrip „golfoppervlak" op de ruimte met n afmetingen.* Nieuw Archief voor Wisk. 3_2 (1897), 239—242. — [2]* *Extension of the notion of wave-surface to space of n dimensions.* Proc. mathem. soc. Edinburgh 16 (1898), 51—56.

Schuh, F. [1] *Vlakke lichtgolven in een homogeen electrisch en magnetisch anisotroop dielectricum.* Verslagen Ak. Amsterdam 10 (1901—1902), 74—90, 159—167.[1])

Sella, A. *Ancora sulle leggi di propagazione della luce nei cristalli magnetici.* Rend. r. acc. Lincei Roma 4_5 II (1895), 283—288.

de Sénarmont, H. H. [1] *Note sur la théorie mathématique de la double réfraction.* Journ. de mathém. 8 (1843), 361—378. — [2] *Commentaire au mémoire de Fresnel sur la double réfraction.* Journ. éc. polyt. cah. 35 (1851), 1—27.

Smith, A. *Investigation of the equation to Fresnels wave surface.* [1]* Trans. philos. soc. Cambridge 6 I (1836), 85—90. — [2] Philos. mag. 12_3 (1838), 335—336. — [3] *Notes on the undulatory theory of light.* Cambridge mathem. journ. 1 (1837), 1—8, 77—86. — [4] *On Fresnels theory of double refraction.* Philos. mag. 28_3 (1846), 48.

Soret, L. [1] *Sur la mesure des indices de réfraction des cristaux à deux axes par l'observation des angles limites de réflexion totales sur des faces quelconques.* Comptes rendus ac. Paris 107 (1888), 176—178, 479—482.

Steiner, J. [1] *Werke. Herausgegeben von* K. Weierstrass. II. Berlin 1882, p. 724, 742.

Stokes, G. G. [1]* *Report on double refraction.* Report Brit. assoc. 32 (Cambridge 1862), 253—282.

Sylvester, J. [1] *Analytical development of Fresnels optical theory of crystals.* Philos. mag. 11_3 (1837), 464—469, 537—541; 12_3 (1838), 73—83, 341—345.

Tait, P. G. [1] *Quaternion investigations connected with Fresnels wave-surface.* Quart. journ. of mathem. 3 (1860), 190—210. — [2] *Note on the Cartesian equation to the wave surface.* Quart. journ. of mathem. 3 (1860), 269—270. — [3] *On some space loci.* Proc. roy. soc. Edinburgh 11 (1881), 197—198.

---

1) Diese Arbeit wurde mir von ihrem Autor in freundlicher Weise zugänglich gemacht.

Townsend, R. [1]* *On a property of the wave surface.* Mess. of mathem. 2_2 (1872), 28—29.

Turnbull, W. P. [1] * *The wave surface.* Mess. of mathem. 3 (1866), 153—169, 205—222.

Vahlen, K. T. [1] *Sur la surface de Fresnel.* Nouv. ann. de mathém. 14_3 (1895), 344—347.

Verdet, E. [1] *Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichts.* II. Braunschweig 1887.

Viola, C. [1] *Die Bestimmungen der optischen Konstanten eines Krystalls aus einem einzigen beliebigen Schnitte.* Zeitschr. f. Krystallogr. **36** (1902), 215—251.

Volterra, V. [1] *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents.* Acta Mathem. **16** (1892), 153—215.

Walton, W. [1] *On the family of the wave surface.* Cambridge Dublin mathem. journ. **7** (1852), 105—110. — [2] *On a physical property of the wave surface.* Cambr. Dubl. mathem. journ. **8** (1853), 33—34. — [3] *On the obliquity of a ray in a biaxal crystal.* Quart. journ. of mathem. **4** (1861), 1—5. — [6] *Note on a geometrical property of the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **4** (1861), 151—152. — [5] *On the generation of the wave surface by the intersection of 2 sympathetic surfaces of revolution.* Quart. journ. of mathem. **4** (1861), 310—314. — [6] *On certain analytical relations between conjugate wave-velocities, ray velocities and planes of polarisation.* Quart. journ. of mathem. **5** (1862), 127—130. — [7] *On certain relations between tangent planes and radii of the wave surface and the ellipsoid of construction.* Quart. journ. of mathem. **5** (1862), 285—288. — [8] *Note on the inclination of the optical axis to the ray axis of a biaxal crystal.* Quart. journ. of mathem. **5** (1862), 317. — [9] *Theorems concerning wave-velocities and ray slownesses in a biaxal crystal.* Quart. journ. of mathem. **5** (1862), 360—361. — [10] *On the equiradial cone of the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **6** (1863), 78—81. — [11] *On the equiradial curve of the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **6** (1863), 144—145. — [12] *On a physical property of a certain generator of the wave surface of a biaxis crystal.* Quart. journ. of mathem. **22** (1887), 268—270. — [13] *On the coincidence of ray directions in a biaxis crystal which correspond to certain conjugate planes of polarisation.* Quart. journ. of mathem. **23** (1889), 7—10. — [14] *On the magnitudes of conjugate ray velocities in a biaxis crystal and their inclination to each other.* Quart. journ. of mathem. **25** (1891), 182—185.

Weber, H. [1] *Über die Kummersche F_4 mit 16 Knotenpunkten.* Journ. für Mathem. **84** (1878), 332—354. — [2] *Darstellung der Fresnelschen Wellenfläche durch elliptische Funktionen.* Vierteljahrsschr. naturf. Ges. Zürich **41** (1896), 82—91.

Zech, P. [1] *Die Eigenschaften der Wellenfläche der zweiaxigen Krystalle mittelst der höheren Geometrie abgeleitet.* Journ. für Mathem. **52** (1856), 243—253. — [2] *Die höhere Geometrie.* Stuttgart 1857. — [3] *Die Krümmungslinien der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.* Journ. für Mathem. **54** (1857), 72—76. — [4] *Berichtigung.* Journ. für Mathem. **55** (1858), 7.

„Un Abonné“. [1] *Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde.* Nouv. ann. de mathém. 1_3 (1882), 29—31.

Litteraturverzeichnisse über die Wellenfläche finden sich bei Mannheim [17], Böklen [5] und in dem mir nicht zugänglichen Buch von G. Loria *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche,* 2. ed. (Torino 1896), p. 114—115.

Intorno ad alcune anomalie presentate dal „Bullettino" del Principe Boncompagni.

Di Antonio Favaro a Padova.

Vissuto per quasi un quarto di secolo in intima relazione ed in continua corrispondenza col non mai abbastanza rimpianto Principe Don Baldassarre Boncompagni, ed avendo avuto l' onore di vedere accolti parecchi miei lavori nel celebre Bullettino da lui edito, parmi opportuno chiarire alcuni particolari i quali possono fornire la spiegazione di certe anomalie che si avvertono o che si potrebbero avvertire tra un esemplare e l' altro di qualche volume, ed una delle quali, sebbene d' ordine alquanto diverso, fu già segnalata dal Prof. Maurizio Steinschneider[1]), fornendo occasione ad alcune dichiarazioni da parte del Signore G. Valentin.[2])

È ben noto che, insofferente degli indugi ed anche delle minime difficoltà le quali il Principe aveva incontrate nella pubblicazione dei suoi primi lavori nei rispetti tipografici, incontentabile al punto da non decidersi a far tirare un lavoro finchè non l'avesse sott' occhio composto quasi per intero, per quanto fosse lungo, continuamente desideroso di accrescere l' apparato di erudizione così da tenere in piedi centinaia di pagine, sospendendone la continuazione finchè non fosse giunto, e spesso da lontani paesi, o un manoscritto pagato più che a peso d' oro, o un fac-simile, o un documento o una notizia, egli si indusse a fondare una tipografia sua propria che intitolò „delle scienze matematiche e fisiche." Questa sua tipografia egli fornì di copioso materiale, adatto non solo a soddisfare le esigenze delle scritture concernenti le matematiche, ma altresì ricco di quei caratteri speciali rappresentanti abbreviazioni e segni che si incontrano così negli antichi manoscritti come nelle vecchie stampe e che mancavano a tutte le tipografie per quanto riccamente fornite. A questa sua tipografia egli assegnò comoda ed ampia sede nel pianterreno del Palazzo

1) Biblioth. Mathem. 1898, 64.
2) Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 131—132.

Boncompagni-Simonetti in via del Corso a Roma, palazzo di sua proprietà, ma non da lui abitato; e la indicazione di „Via Lata n° 3", che si legge appiedi del frontespizio dei volumi del Bullettino sta ad indicare soltanto che la tipografia aveva un ingresso proprio sul fianco del palazzo che prospetta quest' ultima via. E soltanto quando venne demolito il Palazzo di Piombino di fronte a Piazza Colonna, e del quale il Principe Don BALDASSARRE occupava con parte della biblioteca l'ultimo piano, trasferì tipografia e biblioteca nel Casino Aurora del Quartiere Ludovisi, dov' egli soggiornò poi insin che visse.

Sono pure ben note tutte le cure che il Principe dedicava alla pubblicazione del Bullettino; ma soltanto chi ebbe l' onore di vedere i proprii lavori inseriti in questa famosa effemeride, e di essere anche, diciamolo pure, tormentato dalla corrispondenza postale e telegrafica dell' illustre Mecenate, la quale durante la composizione tipografica e la correzione delle stampe era più che quotidiana, può formarsi una idea esatta della somma di lavoro che il Bullettino gli costava. Nè questo basta, imperocchè possa dirsi non esservi scrittura della raccolta da lui edita, della quale egli non sia stato collaboratore efficacissimo, sia somministrando materiali copiosi, sia aggiungendo preziose notizie, ognuna delle quali portava o un dato biografico fino allora ignorato, o notizia di un manoscritto sconosciuto o di un' opera rara, il tutto improntato a quella scrupolosa esattezza, la quale, può dirsi senza ombra di esagerazione, nessuno prima di lui aveva pensato ad adoperare.

Or bene, quantunque il Bullettino non dovesse uscire a scadenza fissa, pure in prossimità al termine entro il quale egli si era prestabilito di far vedere la luce al fascicolo, più spesso mensile, aumentavano le sue già non infrequenti impazienze, dovute in principal modo al timore di far uscire con soverchio ritardo i bimestrali „Annunzi di recenti pubblicazioni", e non di rado accadde che l' autore si vide capitare bello e stampato l'articolo del quale egli non aveva peranco licenziate le prove di stampa, oppure accadeva che all'ultimo momento il Principe avesse stimato opportuno di introdurre, con le migliori intenzioni di questo mondo, qualche variazione od aggiunta della quale l' autore non riconosceva la necessità o la opportunità, ed allora l' illustre Mecenate tagliava corto, avvertendo per lettera o per telegramma che la pubblicazione del fascicolo non aveva potuto ulteriormente attendere, ma che però ai fogli contenenti errori di stampa o modificazioni dall' autore non consentite sarebbero stati sostituiti altri fogli nei quali tutto sarebbe stato rimesso al debito posto. Questi fogli corretti venivano quasi sempre, sebbene talvolta con lunghi ritardi, e non so se in tutte le biblioteche alle quali perveniva il Bullettino saranno pervenuti i fogli sciolti e privi bene spesso di qualsiasi

indicazione, e se si avrà avuta cura di effettuare sempre la sostituzione, specialmente se il relativo volume era ormai rilegato. Per questo motivo io credo che se si facesse un diligente confronto dei varii esemplari del Bullettino, specialmente delle dieci o dodici ultime annate, si riscontrerebbero molte e molte differenze, nè sarebbe sempre così facile, come si può credere, lo stabilire quali esemplari rechino la lezione definitiva, cioè pienamente conforme alla intenzione dell' autore.

Questo particolare il quale deve, per esperienza propria, essere a cognizione di molti che al par di me ricevevano dal Principe stesso il Bullettino, mi è sembrato opportuno di porre in piena evidenza, perchè con la scorta dello schiarimento da me fornito potranno essere spiegate alcune differenze d' altronde inesplicabili.

August Heller.

Von SIEGMUND GÜNTHER in München.[1])

Am 6. September 1902 versammelte sich im Vestibül der Kgl. un rischen Akademie der Wissenschaften eine Schar von Leidtragenden, einem hervorragenden Manne die letzte Ehre zu erweisen. Von diesem Orte aus pflegt man in Budapest Männer zu beerdigen, die sich um das Land grofse Verdienste erworben haben; es ist zum Beispiel so mit FRANZ DEÁK, dem Grafen ANDRÁSSY, TREFORT, TOLDI u. a. gehalten worden. Diesmal jedoch handelte es sich nicht um einen Staatsmann, sondern um einen schlichten Gelehrten. Professor HELLER, der Historiker der Physik, war es, dem die Ehrenbezeugung galt. Gestorben am 4. September nach längerem Leiden, hatte er sich in der That unter den Männern der Wissenschaft in seinem Lande eine hoch geachtete Stellung erworben, und die Art seiner Bestattung legte nur Zeugnis ab von der Wertschätzung, welche man dem Forscher und nicht weniger auch dem Menschen zollte.



AUGUST HELLER erblickte das Licht der Welt in der damals noch nicht mit Ofen vereinigten Stadt Pesth am 6. August 1843, so dafs sein Leben also ein wenig über 59 Jahre gebracht hat. Er absolvie

1) Der Verf. ist der Witwe des Verewigten zu aufrichtigem Dank für die u fassenden und sachkundigen biographischen Mitteilungen verbunden, ohne welc dieser Nekrolog nicht hätte geschrieben werden können.

die Realschule und von 1862 bis 1866 auch das Polytechnikum seiner Vaterstadt und war bereits im Begriffe, sich der Laufbahn des Ingenieurs zu widmen, als wohlgemeinter Rat ihn veranlaſste, der Wissenschaft den Vorzug zu geben, zumal da auch die nur kurze Zeit bekleidete Stelle eines Bankbeamten ihm keine Genugthuung zu gewähren vermochte. Im Juni 1868 bestand er „mit Vorzug" die Konkursprüfung für das Lehramt der Physik und Mathematik und wurde gleich darauf Assistent am Polytechnikum. Ein Stipendium ermöglichte es ihm, 1869 noch ein Jahr an der Universität Heidelberg zu studieren, wo er namentlich zu Gustav Kirchhoff in ein näheres Verhältnis trat und mit ihm als Privatassistent zusammen arbeiten durfte — eine Auszeichnung, die ihn sein ganzes Leben hindurch mit berechtigtem Stolze erfüllte. Im Oktober 1870 wurde er zum Professor der Physik und Mathematik an der Realschule bestellt, deren Schüler er noch acht Jahre zuvor gewesen war. In diesem Amte ist er bis zum Jahre 1898 verblieben. Es darf hier wohl daran erinnert werden, daſs Heller das Zeug zum Hochschullehrer in sich fühlte und gerne sich als solcher bethätigt hätte; nahe genug war er diesem Ziele mehrmals, und nur eine Verkettung ungünstiger Umstände vereitelte die von ihm und von wohlmeinenden Gönnern gehegte Absicht. Die ihm von solchen zugedachte Lehrkanzel der Physik an der Universität entging ihm 1871, weil man einem Experimentator vor dem Vertreter der theoretischen Physik den Vorzug einräumte. Gerne hätte ihn dann 1872 der Kultusminister Trefort an die neu gegründete Universität Klausenburg (Kolozsvár) berufen, und zwar gleich als Ordinarius, allein für Heller war das Leben in einer Stadt ohne gröſsere Bibliothek nicht denkbar, und so lehnte er ab. Im März 1872 hatte er sich an der technischen Hochschule habilitiert und blieb Dozent bis zum Jahre 1875. Elf Jahre darauf schien ihm wieder der Übergang auf einen seinen Neigungen entsprechenden Posten zu winken, indem ernstlich daran gedacht ward, ihm die Direktion der Kgl. ungarischen Zentralstation für Meteorologie und Erdmagnetismus nach G. Schenzls — und dann wieder nach L. Grubers — Abgange anzuvertrauen.

Einigermaſsen entschädigten ihn für die Zerstörung dieser gewiſs wohlbegründeten Hoffnungen die ihm übertragenen bibliothekarischen Funktionen; ist er doch stets ein Bücherfreund und Bücherkenner in des Wortes bestem Sinne gewesen. Die Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft hatte ihn schon 1874 zu ihrem Bibliothekar erwählt, und in diesem Nebenamte waltete er zwanzig Jahre lang, bis ihn die Ernennung zum Oberbibliothekar der Akademie (Oktober 1894) zum Verzichte auf jenen Posten nötigte. Vier Jahre später legte er auch die Professur nieder und konnte nun seine ganze Zeit — leider war sie nur noch kurz

bemessen — auf bibliothekarische und bibliographische Arbeit konzentrieren. An ausgiebiger Beschäftigung fehlte es ihm wahrlich nicht. So sandte ihn die Akademie, als ihr 1895 der Advokat ELISCHER seine reichhaltige GOETHE-Sammlung vermachte, nach Weimar und Frankfurt a. M., um daselbst Studien für die Errichtung dieser neuen Abteilung zu machen, die denn auch schon im Frühjahre 1896 zu stande kam, so dafs sie, völlig aufgestellt und katalogisiert, der Öffentlichkeit übergeben ward. Dreimal — 1896, 1898 und 1900 — vertrat er Ungarn bei den Londoner Beratungen über den viel besprochenen internationalen Katalog der naturwissenschaftlichen Schriften.[1]) Man ernannte ihn auch zum Sekretär des ungarischen Regionalbureaus. Im Jahre 1900 hatte ihn seine Akademie zur Kartellkonferenz der gelehrten Gesellschaften nach Paris delegiert, allein bald darauf machte sich jenes Leiden bei ihm geltend, das ihn zuerst zu immer weiterer Einschränkung geistiger Arbeit zwang und ihm nach und nach jeden Verkehr mit der Öffentlichkeit unmöglich machte.

Um mit den äufseren Lebensumständen HELLERS abzuschliefsen, sei bemerkt, dafs er seit August 1876 in glücklichster Ehe mit GEORGINE VON BOLBERITZ lebte. Seine Gattin verstand es vortrefflich, auf die geistigen Interessen ihres Mannes einzugehen, und sie war seine Stütze, als fortschreitende Krankheit es ihm nahe legte, sich bei der ihm noch vergönnten Beschäftigung mit wissenschaftlichen Dingen unterstützen zu lassen. Mit der Mutter trauern um den ihnen zu früh entrissenen Vater drei Söhne, deren zwei als Juristen und einer als Ingenieur ihre Studien bereits vollendet haben, so dafs nach dieser Seite hin keinerlei Sorge mehr das Gemüt des Sterbenden zu belasten brauchte.

Wir wenden uns nunmehr den Veröffentlichungen HELLERS zu. Dieselben bewegen sich in der späteren Zeit zum Teile auf dem geschichtlichen Boden, zum Teil auch auf dem von ihm mit besonderer Vorliebe gepflegten Grenzgebiete zwischen Philosophie und Naturlehre. Ein Aufsatz, den er als achtzehnjähriger Jüngling niederschrieb, und der den Titel „Apodiktisches und empirisches Wissen" führte, ist ungedruckt geblieben. Im Jahre 1869 trat er mit einer ungarischen Abhandlung astronomischen Inhalts hervor[2]), der in der nämlichen Zeitschrift eine Studie

1) Der Schreiber dieser Zeilen hat Ursache an die mit diesen Repräsentativpflichten verbundenen Reisen des Verstorbenen mit wehmütiger Freude zu denken, weil sie dazu führten, eine auf das Jahr 1887 zurückgehende und 1896 in Budapest aufgefrischte persönliche Bekanntschaft von Zeit zu Zeit, bei der Durchreise durch München, wieder zu erneuern.

2) *A Vénus átvonulásáról*; Természettud. Közlöny (Naturwissenschaftlicher Anzeiger) 1869.

über die deutschen Bibliotheken und ein paar kleinere Artikel über Astronomie und Akustik folgten. Als Frucht des Heidelberger Aufenthaltes ist anzusehen eine Bearbeitung des schwierigen, auch jetzt noch von endgültiger Lösung weit entfernten Problems der Sonometrie[1]), der sich Bemerkungen über das Nordlicht[2]) anschlossen. Nächstdem befafste er sich mit den damals nach Gleichberechtigung mit den bereits bekannten Luftschweremessern ringenden Federbarometern.[3]) Hierauf beziehen sich einige kleinere, magyarisch abgefafste Arbeiten; auch über optische und astronomische Fragen, vorab über die Venusdurchgänge von 1874 und 1882 erschienen Publikationen aus seiner Feder.[4]) Daneben interessierten ihn auch die mit seinem Amte zusammenhängenden pädagogischen Angelegenheiten, und der Jahrgang 1872 des wichtigsten deutsch gedruckten Tageblattes der Hauptstadt, des Pester Lloyd, brachte von ihm eine Artikelserie zur „Realschulfrage".

Die ungemein rege und intensive Produktion der nächsten Jahre erschöpfend zu verfolgen, ist leider nicht thunlich, weil der zur Verfügung stehende Raum es nicht gestattet. Vielmehr müssen wir es bei einer summarischen Aufzählung bewenden lassen[5]) — umso mehr, weil die Auf-

---

1) *Über eine Intensitätsmessung des Schalles*; Ann. d. Physik u. Chemie **141**, 1870; auch T. K. 1870. Vgl. GÜNTHER, *Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im XIX. Jahrhundert* (Berlin 1901), S. 549.

2) *Az éjszaki fényről*; T. K. 1870.

3) *Über ein Barometer ohne Quecksilber*; Ann. d. Physik u. Chemie **142**, 1871 (englische Übersetzung im Philosophical magazine **41**, 1871). Das erwähnte ungarische Organ enthält gleichfalls Mitteilungen über Aneroide.

4) Das Jahr 1872 förderte in Summa 22 kleinere Noten HELLERS zu Tage; damals begann er auch der Meteorologie näher zu treten.

5) Auf das Jahr 1873 treffen 8 Aufsätze und Recensionen, auf das Jahr 1874 treffen 9 (Meteorologie, Kometen, Mechanik, Didaktik). Die Bilanz des Jahres 1875 sind deren 11, und unter diesen Abhandlungen befindet sich auch wieder eine gröfsere über den Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe (*A Vénus átvonulás megfigyeléséről; Pótlék hozzá*; T. K. 1875). Von den 10 Nummern des nächsten Jahres, durchweg astronomischen und meteorologischen Inhaltes, sei wiederum eine, als für die atmosphärische Physik bemerkenswert, hervorgehoben, welche von den magnetischen Körperchen im Staube handelt (*Delejes morzsák a levegőbeli porban*; T. K. 1876). Weiterhin sind es 13 Abhandlungen, darunter zwei gröfsere über die Nova im Sternbilde des Schwanes (*Hattyú csillag képében*; T. K. 1877) und über die Erdgestalt (*Földünk alakjáról*; T. K. 1877). Sehr ergiebig war das Jahr 1878. Neben kleineren Erörterungen über das Telephon brachte es einen Leitfaden der Physik für die unteren Klassen der Mittelschulen, sowie Essays über die Bestimmung der Sonnendistanz (*A Nap távolsága*; T. K. 1878) und über die Natur des Planeten Mars (*A Mars bolygó physikai viszonyairól*; T. K. 1878). Deutsch geschrieben ist eine historische Untersuchung über die altehrwürdige *„St. Gerhardberger Sternwarte zu Ofen"* (Mathem.-Naturwissensch. Berichte aus Ungarn **2**). Von dem Ertrage

schriften der einzelnen litterarischen Beiträge der sehr grofsen Mehrzahl der Leser dieser Zeitschrift unverständlich sein würden. Sehr zu bedauern ist, dafs die Bestrebungen HELLERS zur Aufklärung der Natur des Polarlichtes in anderen Ländern unbeachtet blieben, während doch die Anzahl der Mitarbeiter im allgemeinen keine so beträchtliche ist, dafs man nicht gerne von der Stellungnahme eines jeden einzelnen Akt nähme. Gegenwärtig wird diesem Mangel, wie wir erfahren werden, eben grofsenteils durch die Vermittelung unseres dahingeschiedenen Freundes, in sehr zweckentsprechender Weise nach Möglichkeit abgeholfen.

Wir stehen bei dem Jahre 1881. Dasselbe ist für HELLERS Entwickelung insofern bestimmend gewesen, als ihn damals eine äufsere Veranlassung auf den Weg führte, dessen Betretung ihm zu schönen Erfolgen verhelfen sollte. Die Naturwissenschaftliche Gesellschaft[1]) schrieb nämlich eine Preiskonkurrenz für eine Geschichte der älteren Physik aus, und HELLERS Arbeit wurde prämiiert. Zwar ist das Manuskript (A Physika törtenete ARISTOTELES töl NEWTONig) nicht gedruckt worden[2]), aber es war durch dasselbe doch der Grund gelegt zu dem, was in Bälde folgen sollte. Dahin zielte auch eine deutsch abgefafste, den entgegengesetzten Pol des geschichtlichen Werdeganges übersichtlich skizzierende Einführung in das Wesen der Physik von heute.[3]) Durch seinen Freund, den Augen-

des Jahres 1879 seien genannt eine spektroskopische Bearbeitung des Sonnenfleckenproblems (*A napfolt szinképe*; T. K. 1879) und eine erneute Kritik der betreffs der Sonnenparallaxe gewonnenen Daten (*A Napparallaxisról*; T. K. 1879). Als Verfasser eines Schulbuches hatte HELLER erwähntermafsen bereits debutiert; nunmehr schrieb er auch ein Lehrbuch der physikalischen Geographie für Gymnasien (*Physikai földrajz*, Budapest 1880). Und neben den üblichen Schnitzeln aus der Arbeitsmappe sind daneben zwei gröfsere Arbeiten zu verzeichnen, deren eine es mit der einem ungarischen Astronomen vor einem Jahrhundert erwiesenen Auszeichnung zu thun hat (*Az orztrák magyar északi sarkutazók megfigyelései az északi fényről* (T. K. 1880), während die andere (ebenda) die österreichisch-ungarischen Nordlichtbeobachtungen auf der Insel Jan Mayen bespricht.

1) Mitglied derselben war HELLER schon längere Zeit. Zu ihrem korrespondierenden Mitgliede wählte ihn die kgl. ungarische Akademie 1887, zum ordentlichen 1893. Die beiden Antrittsreden, die er jeweils bei der Aufnahme hielt (Die bewegenden Ideen der physikalischen Forschungen im XIX. Jahrhundert; Über die Grundlagen der Energetik) lassen es deutlich hervortreten, dafs die Richtung des Redners eine den historisch-philosophischen Prinzipien seiner Wissenschaft zugewandte war.

2) Das Motto seiner Preisschrift suchte HELLER bezeichnenderweise bei BACON OF VERULAM: „Nam causarum finalium inquisitio sterilis est et tanquam virgo Deo consecrata nihil parit.“

3) *Ziele und Wege der modernen physikalischen Forschung*; Humboldt 1. Band. Es wird vorzugsweise darauf ausgegangen, zu zeigen, welch tiefgehender Unterschied in Naturanschauung und Naturergründung zwischen einst und jetzt obwaltet. — Das

arzt W. GOLDZIEHER, kam HELLER um diese Zeit in Berührung mit der — damals eben ihrem naturwissenschaftlichen Verlage einen hohen Aufschwung verleihenden — Verlagshandlung F. Enke in Stuttgart, für die er indirekt auch als Mitarbeiter der neuen Monatsschrift Humboldt thätig war, und so kam ein Vertrag hinsichtlich einer umfassenderen Physikgeschichte in deutscher Sprache zum Abschlusse. Diesem grofs angelegten Werke galt nun selbstverständlich in den nächsten Jahren die Kraft des Autors in erster Linie, und schon nach drei Jahren lag es abgeschlossen vor.[1]) Auf diesem Arbeitsfelde herrschte in jenen Jahren eine erfreuliche Betriebsamkeit. Während man sich früher um den auch für die Naturwissenschaften wahrlich nicht gleichgültigen Prozefs der Herausbildung der Wahrheit im Kampfe mit Irrtum und vorgefafster Meinung nur recht wenig gekümmert hatte, gingen in dem kurzen Zeitraume von dreizehn Jahren vier Werke einschlägigen Inhaltes aus deutschen Pressen hervor[2]), deren keines überflüssig ist, die sich vielmehr in der mannigfaltigsten Weise ergänzen und in ihrer Gesamtheit den Erkenntnisfortschritt ihrer Epoche sehr deutlich hervortreten lassen.

So rastlos in der Hervorbringung kleinerer Arbeiten war HELLER von da an nicht mehr, denn seine Produktion nahm jetzt einen gröfseren Zug an, und auch die Überhäufung mit Pflichten mufste eine gewisse Reserve nach der anderen Seite hin bedingen. Doch entzog er darum der erwähnten ungarischen Zeitschrift seine Mitarbeiterschaft nicht, und auch selbständige Aufsätze liefs er ihr zukommen. Eine Randnote soll die Jahrgänge 1882 bis 1884 zusammenfassen.[3]) Alsdann tritt eine längere

---

gleiche Jahr sah auch, wie immer, populär-wissenschaftliche Miscellen in ungarischer Sprache entstehen.

1) *Geschichte der Physik von* ARISTOTELES *bis auf die neueste Zeit*, 1. Band (*Von* ARISTOTELES *bis* GALILEI), Stuttgart 1882 (XII + 411 S.). 2. Band (*Von* DESCARTES *bis* ROBERT MAYER), Stuttgart 1884 (XV + 754 S.). Dafs eine so sehr dem Bedürfnis entgegenkommende Litteraturerscheinung in der Fachwelt freundlich und beifällig aufgenommen wurde, ist nur natürlich. Der Verfasser dieses Lebensbildes darf sich berufen auf die eingehenden Besprechungen, denen er die beiden Bände unterzogen hat (Zeitschr. für Mathem.; Hist. Abt., **28**, 1883, S. 18 ff.; **31**, 1886, S. 147 ff.)

2) Nämlich 1878 POGGENDORFF (nach den langjährigen, in Berlin gehaltenen Vorlesungen), 1882—1884 HELLER, 1882—1890 ROSENBERGER, 1892 E. GERLAND.

3) *A Föld közepe, sürüségének meghatározása mérleg segitségével* (Bestimmung der Erddichte mittelst der Wage; T. K. 1882); *LEONARDO DA VINCI és a természettudományok* (LEONARDO DA VINCI und die Naturwissenschaft; T. K. 1883). In zweiter Auflage erschien 1883 das Compendium der Physik, 1884 dasjenige der physikalischen Erdkunde. Die „*Gesammelten Abhandlungen*“ seiner Heidelberger Lehrer G. KIRCHHOFF nnd H. VON HELMHOLTZ (Leipzig 1882) zeigte HELLER im Humboldt (**2.** Band) an; diese Zeitschrift hat auch sonst noch Bücherbesprechungen von ihm zu verzeichnen,

Pause ein, wohl dadurch veranlafst, dafs der vielseitige Schriftsteller daran ging, seinem Lande ein erstes Lehrbuch der modernen Meteorologie zu schenken. Dasselbe kam 1888 heraus[1]), und in diesem Jahre war HELLER auch wieder ganz besonders thätig.[2]) Manche Stunde nahm ihm auch die Teilnahme an dem ungarischen Konversationslexikon weg, das in den Jahren 1893 bis 1900 ausgegeben worden ist. Aber trotzdem fand er noch Zeit und Kraft, um 1898, worauf wir oben schon anspielten, die Schriftleitung des schon länger bestehenden, in Jahreslieferungen erscheinenden periodischen Werkes zu übernehmen, welches den Titel führt: Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Wie kein anderer war er dazu berufen, ein solches Unternehmen in das richtige Fahrwasser zu bringen; beider Idiome gleich mächtig, von der Überzeugung durchdrungen, dafs die Kultur des eigenen Staates mit derjenigen des deutschen Nachbarlandes in innigem Kontakte verbleiben müsse, sorgte er dafür, dafs magyarische Geistesarbeit, sofern sie in der heimatlichen Sprache niedergelegt war, im Auszuge dem Westen zugänglich gemacht wurde. Wir geben der Hoffnung Ausdruck, dafs diese wertvollen Jahresreferate uns für immer erhalten bleiben möchten.

Auch aus den letzten Jahren noch liegen verschiedene Früchte von HELLERS Wirksamkeit vor, die wir wieder unten vereinigen.[3]) Seine letzte ungarische Veröffentlichung bildete eine Lebensskizze der Mathematikerin KOWALEWSKA[4]), seine letzte deutsche der Beitrag[5]), den er, von Prof. CURTZE und dem Verfasser darum ersucht, zu der im Jahre 1899 von den Verehrern MORITZ CANTORS dem Altmeister gewidmeten Festschrift spendete. Nicht als ob er etwa von der schriftstellerischen Arbeit hätte jetzt schon Abstand nehmen müssen; allein die Vollendung älterer Entwürfe blieb ihm versagt. Er hatte sich vorgesetzt, eine „Ent-

---

und ebenso übergab er ihr eine dankenswerte, zumal das Wesen der Atomistik beleuchtende Betrachtung (*Aus wissenschaftlichen Grenzgebieten*; a. a. O. **4.** Band).

1) *Az időjárás*, Budapest 1888.

2) *Adalékok az anyag problemájához*, Ber. d. ungar. Akademie 1888; dasselbe deutsch: *Beiträge zum Problem der Materie*; Mathem.-Naturw. Ber. aus Ungarn 1890. Sehr lesenswert, auch für den Nichtfachmann, ist ferner die Übersicht über die Zielpunkte der exakten Wissenschaften in der Gegenwart (*Physikalische Probleme und Forschungen unserer Tage*; Beilage zur Allgem. Zeitung 1888).

3) *A természettudományok helyzete az irodalomban* (Die Stellung der Naturwissenschaften in der Litteratur; Budapesti Szemle = Budapester Revue 1892); *Ujabb áramlatok a természet philosophiában* (Naturphilosophische Zeitströmungen; Athenaeum 1893).

4) *KOWALEWSKY SZÓNYA*; Budapesti Szemle 1900, S. 268 ff.

5) *Über die Aufgaben einer Geschichte der Physik*; Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, S. 175 ff.

wickelungsgeschichte der Physik im XIX. Jahrhundert" und eine teilweise analoge ungarische Schrift (*A Physika története a XIX. században*), wofür bereits Materialien vorlagen, in Angriff zu nehmen. Am meisten jedoch dürfte beklagt werden, dafs mit seinem Hintritte ein Werk, für das er umfängliche Vorarbeiten unternommen hatte, ungeschrieben bleiben mufs.

Zu Beginn des siebenten Jahrzehnts des vergangenen Jahrhunderts hatte die „Historische Kommission" in München den Plan gefafst, eine Reihe von Werken über die Geschichte der einzelnen Wissenschaften, mit besonderer Berücksichtigung Deutschlands, herstellen zu lassen. Und als das Säkulum sich neigte, waren sämtliche Bände abgeschlossen — mit einziger Ausnahme der Physik, über der ein eigenartiger Unstern waltete. Mehrere Gelehrte, denen die freilich schwierige und weitaussehende Aufgabe übertragen worden war, hatten mit ihrer Lösung nicht zu stande kommen können. Als deren letzter, G. Karsten in Kiel, langjährigem Leiden erlegen war, richtete die „Kommission" ihr Augenmerk auf unsern Heller und erlangte im Sommer 1899 seine Einwilligung. Es wird uns mitgeteilt, dafs er mit noch nicht gebrochener Rüstigkeit sich in das Schaffen versenkte, und ungefähr bis zum Jahre 1000 sei er auch mit der Ausarbeitung gediehen. Damit ist leider auch gesagt, dafs die weithin geteilte Hoffnung, diesen unentbehrlichen Abschlufs eines nationalen Unternehmens herbeigeführt zu sehen, mindestens für lange vertagt werden mufs.

Seit 1900 liefs Hellers Spannkraft nach. Er, der unausgesetzt am Schreibtische oder unter den seiner Obsorge anvertrauten Büchern zu walten gewohnt war und nur der Musik[1]) eine vorübergehende Ablenkung von der täglichen Wirksamkeit zugestand, mufste schmerzlich ein Nachlassen seiner Leistungsfähigkeit anerkennen. Man dachte zuvörderst nur an ein nervöses, auf Überarbeitung beruhendes Leiden, und in der That schien ein Aufenthalt im Sanatorium, den er im Juni 1901 in Purkersdorf bei Wien nahm, und dem eine längere Nachkur in Waidhofen a. Y. folgte, von vorteilhaftem Einflusse auf den Kranken zu sein, so dafs er wenigstens wieder anstandslos sich der wissenschaftlichen Lektüre hinzugeben vermochte. Die Sitzungen der Akademie, der er im Januar 1901 seinen Schlufsbericht über die Londoner Beratungen überreicht hatte, besuchte er noch, ohne aber sich weiter aktiv zu beteiligen. Mehr und mehr nahm die unheilvolle Krankheit überhand, die sich als ein tiefgehendes Gehirnleiden zu erkennen gab, und obwohl der Schwerleidende selbst auf dem Krankenbette noch den geliebten Studien nicht entsagen

1) Ausübender Musiker war Heller nicht, aber eine klassische Oper pflegte er so leicht nicht zu versäumen.

konnte[1], so gaben seine Angehörigen doch bereits vor längerer Zeit jede Hoffnung auf. Furchtbare Krämpfe begannen ihm das Bewufstsein zu rauben, freilich immer nur für Stunden, und so erschien die Auflösung als willkommenes Ende eines Dulderdaseins.

Nicht blofs in Ungarn wird HELLERS Name und Gedächtnis fortleben. In dem Mafse, in dem unsere Zeit stets in der Einsicht in die Tragweite historischer Bethätigung zunimmt, werden die Zeitgenossen die Lebensarbeit solcher Männer höher zu schätzen lernen, wie AUGUST HELLER einer war, und insonderheit wird seine *Geschichte der Physik*[2]) manch jüngerer Generation zum nützlichen Handweiser gereichen. Man hat ja wohl mit Recht gesagt, es sei dasselbe mehr eine Geschichte der Physiker als der Physik selbst; gerade deswegen aber wird Anfängern und solchen, die nicht Berufsgelehrte sind, diese Art der Darstellung die angenehmere sein, und für die allerdings noch höhere Etappe einer blofs die geistigen Strömungen in Betracht ziehenden Auffassung des historischen Werdens ist erstere ein kaum entbehrliches Durchgangsstadium. Und darum werden wir den Verewigten stets unter denen mit Ehren zu nennen verpflichtet sein, die der heranziehenden neuen Zeit der Wissenschaftsgeschichte die Bahn brechen halfen.

1) Das letzte Buch, das er las und erst fast im Todeskampfe weglegte, war WINDELBANDS *Geschichte der antiken Philosophie*. Überhaupt übte auch die Philosopie als solche auf ihn sehr viel Anziehungskraft aus. Wie er über die Zulässigkeit einer blofs aus dem reinen Denken geschöpften Betrachtung der Dinge urteilte, beweist das von ihm selbst abgelegte Glaubensbekenntnis Naturwissenschaftliche und philosophische Weltanschauung; Athenaeum 1893).

2) Übersetzungen ins Französische und Italienische waren vorbereitet und unterblieben lediglich aus äufseren Gründen.

Gustav Wertheim.

Von G. ENESTRÖM in Stockholm.

Die kleine Gemeinde der mathematisch-historischen Forscher hat in diesem Jahre ein Mitglied verloren, das zugleich ein fleißiger Mitarbeiter der dritten Folge der Bibliotheca Mathematica gewesen ist. Sein Name ist hier oben zu lesen, über sein Leben und Wirken wird im Folgenden kurz berichtet werden.



Geboren am 9. Juni 1843 zu Imbshausen in Hannover, besuchte GUSTAV WERTHEIM nacheinander die Volksschule seines Geburtsortes, die Jacobsohn-Schule zu Seesen am Harz, die Gymnasien zu Hildesheim und Hannover und das Obergymnasium zu Braunschweig. Nachdem er 1862 das Abiturientenexamen bestanden hatte, bezog WERTHEIM die Universität in Göttingen und studierte später auch in Berlin und Heidelberg. Im Jahre 1866 erwarb er in Göttingen die „facultas docendi", und war 1866–1870 in Hannover, Wiesbaden, Heidelberg, Zürich, Genf und Guntersblum als Privatlehrer thätig. Dann wurde er an der Realschule der israelitischen Gemeinde (Philanthropin) in Frankfurt am Main angestellt, absolvierte dort das Probejahr, und wurde 1872 ordentlicher Lehrer daselbst; aus Gesundheitsrücksichten trat er schon 1900 in den

Ruhestand, und erlag am 31. August 1902 zu Frankfurt am Main einem Schlaganfalle.[1]

Hinsichtlich seiner Lehrerthätigkeit wird ihm von berufener Seite nachgerühmt, daſs er eine hervorragende Fähigkeit besaſs, den Schülern durch die Klarheit des Vortrages das Verständnis auch der schwierigeren Sachen zu erleichtern. Hier habe ich nur seine schriftstellerische Wirksamkeit etwas ausführlicher zu behandeln.

Auf drei Gebieten war Wertheim als Schriftsteller thätig, nämlich als Übersetzer wissenschaftlicher Werke, als Zahlentheoretiker und als mathematisch-historischer Forscher. Resultate seiner Wirksamkeit auf dem ersten Gebiete sind die Übersetzungen des wohlbekannten Handbuches der höheren Algebra von J. A. Serret[2], des ersten Bandes des Handbuches der theoretischen Physik von W. Thomson und P. G. Tait (in Gemeinschaft mit H. Helmholtz[3]), der Vorlesungen über einige neuere Fortschritte der Physik von P. G. Tait[4], sowie der Elemente der mathematischen Theorie der Elektrizität und des Magnetismus von J. J. Thomson[5]; zu allen drei Gebieten kann seine Übersetzung der Arithmetik des Diofantos[6] gerechnet werden, die auch die Schrift über die Polygonalzahlen enthält und als Anhang die griechischen arithmetischen Epigramme und das Rinderproblem des Archimedes bringt. Seiner Thätigkeit als Übersetzer widmete sich Wertheim wohl zunächst aus materiellen Rücksichten, aber er war auch besonders dazu berufen, durch seine umfassenden Sprachkenntnisse und die Leichtigkeit, womit er die passenden Ausdrücke fand, um den Lesern einen Gegenstand verständlich darzustellen.

Für die Zahlentheorie hatte sich Wertheim sehr früh interessiert, und schon 1874 veröffentlichte er in einem Programme seiner Schule

1) Die vorangehenden biographischen Notizen sind wesentlich aus einem von Herrn H. Dobriner für die Zeitschrift für mathematischen Unterricht verfaſsten Nachrufe entnommen.

2) J. A. Serret, *Handbuch der höheren Algebra. Deutsch bearbeitet von* G. Wertheim. Band 1—2. Leipzig, Teubner 1868. VIII + 508 S.; VIII + 540 S. — Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1878—1879. VIII + 528 S.; VIII + 574 S. 8°.

3) W. Thomson und P. G. Tait, *Handbuch der theoretischen Physik. Autorisierte deutsche Übersetzung von* H. Helmholtz *und* G. Wertheim. Band 1. Theil 1—2. Braunschweig, Vieweg 1871—1874. XIX + 380 S.; XXVI + 453 S. 8°.

4) P. G. Tait, *Vorlesungen über einige neuere Fortschritte der Physik. Autorisierte deutsche Ausgabe von* G. Wertheim. Braunschweig, Vieweg 1877. XVII + 279 S. 8°.

5) J. J. Thomson, *Elemente der mathematischen Theorie der Elektricität und des Magnetismus. Deutsche Ausgabe von* G. Wertheim. Braunschweig, Vieweg 1897. XIII + 414 S. 8°.

6) *Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen des* Diophantus *von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von* G. Wertheim. Leipzig, Teubner 1890. X + 346 S. 8°.

eine kurze Einführung in dieselbe.[1]) Dreizehn Jahre später erschien ein ausführliches Lehrbuch[2]), auch für Anfänger bestimmt und etwa den vier ersten Abschnitten von DIRICHLETS *Vorlesungen* entsprechend. Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben waren beigefügt, und auf die Anwendungen der verschiedenen Theorien wurde besonderes Gewicht gelegt. Auch die oben erwähnte im Jahre 1890 erschienene DIOFANTOS-Übersetzung, der WERTHEIM Erläuterungen hinzugefügt hat, verfolgt wesentlich einen pädagogischen Zweck und kann als eine Exempelsammlung zur elementaren Zahlentheorie betrachtet werden; sie enthält auch die Zusätze von FERMAT mit Anmerkungen von WERTHEIM, die Lehre von den figurierten Zahlen und LAGRANGES Zerlegung einer Zahl in eine Summe von höchstens vier Quadratzahlen. Noch eine vierte Arbeit ähnlicher Art mit dem Titel *Anfangsgründe der Zahlenlehre* hatte WERTHEIM kurz vor seinem Tode fertig[3]), und sein Vorwort dazu vom 19. August 1902 enthält wohl die letzten Zeilen wissenschaftlichen Inhalts, die aus seiner Feder geflossen sind. Diese Anfangsgründe sind eigentlich nicht für Studierende an den Universitäten, sondern für Gebildete aller Stände bestimmt, also ein Versuch die Zahlentheorie zu popularisieren. Hier werden nach einander die Teilbarkeit der Zahlen, der Begriff der Kongruenz, Kongruenzen ersten Grades, einige unbestimmte Gleichungen höheren Grades, die Kettenbrüche, Potenzreste und Kongruenzen zweiten Grades behandelt. Unter den Aufgaben sind viele aus mathematischen Klassikern entnommen, und zahlreiche historische Notizen sind eingefügt.

Es ist natürlich, daſs WERTHEIM bei der Bearbeitung seiner Lehrbücher auf Fragen stieſs, die ihm zu eigenen Untersuchungen Anlaſs geben konnten, und dadurch bekam er Material zu einigen zahlentheoretischen Aufsätzen, die er in Zeitschriften veröffentlichte. Besonders interessierte ihn die Berechnung der primitiven Wurzeln der Primzahlen, und auf diesem Gebiete verdankt man ihm teils Tabellen der kleinsten primitiven Wurzeln aller ungraden Primzahlen unter 5000[4]), teils einige Sätze über primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^x q^\lambda + 1$, in welcher

1) *Einführung in die Zahlentheorie.* Frankfurt am Main 1874 (Programm der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt am Main). 40 S. 4°.

2) *Elemente der Zahlentheorie.* Leipzig, Teubner 1887. X + 382 S. 8°.

3) *Anfangsgründe der Zahlentheorie.* Braunschweig, Vieweg 1902. XII + 427 + (1) S. 8° + 4 Porträts.

4) *Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller ungeraden Primzahlen p unter 3000.* Acta Mathem. **17**, 1893, 315—320. — *Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen 3000 und 5000.* Acta Mathem. **20**, 1896, 153—158. — *Berichtigung zur Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln der Primzahlen unter 5000.* Acta Mathem. **22**, 1898, 200.

$q = 1$ oder eine ungerade Primzahl ist[1]), wobei er zuerst eine gegebene Zahl als primitive Wurzel annimmt und dann untersucht, welche Form die entsprechende Primzahl haben mufs. Andere Aufsätze beziehen sich auf Lösung[2]) der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$, auf Herleitung des Satzes, dafs jede Zahl in höchstens vier Quadratzahlen zerlegbar ist[3]), und auf Zerlegung ungerader Zahlen in Faktoren[4]) vermittelst eines von Fermat herrührenden Verfahrens, wobei die gegebene Zahl als die Differenz zweier Quadratzahlen ausgedrückt wird.

Wie man sieht, sind die zahlentheoretischen Fragen, die Wertheim behandelt hat, keineswegs von gröfserer Bedeutung, und gewifs beanspruchte er auch nicht selbst, zur Entwickelung der Zahlentheorie beigetragen zu haben, aber zur Verbreitung des Interesses für diesen wichtigen Zweig der Mathematik ist er wohl nicht ohne Erfolg thätig gewesen.

Den Anlafs sich mit mathematisch-historischen Untersuchungen zu beschäftigen, scheint Wertheim durch das Studium gewisser zahlentheoretischer Aufgaben bekommen zu haben, und als seine erste Arbeit auf historischem Gebiete könnte man vielleicht die schon zweimal erwähnte Übersetzung der Arithmetik des Diofantos ansehen, aber das historische Interesse ist hier nicht besonders hervortretend, und seine erste rein historische Schrift gehört einem wesentlich anderen Gebiete an, nämlich der Geschichte der jüdischen Mathematik. In dieser Schrift, die 1893 veröffentlicht wurde[5]), berichtet er über die im Jahre 1534 in Konstantinopel erschienene hebräische Arithmetik des Oberrabbiners Elia Misrachi (um 1455—1526). Nach einer Einleitung über Misrachi und seine Schriften sowie über die Quellen, die dieser für seine Arithmetik benutzte, giebt Wertheim ausführliche Auskunft über den Inhalt derselben; aus der dritten Abteilung, die eine Aufgabensammlung ist, wird das Wichtigste in deutscher Übersetzung mitgeteilt. In der zweiten, 1896 erschienenen

---

1) *Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^x q + 1$, in welcher $q = 1$ oder eine ungerade Primzahl ist.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **25**, 1894, 81—97. — *Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^x q^\lambda + 1$, in welcher $q = 1$ oder eine ungerade Primzahl ist.* Acta Mathem. **20**, 1896, 143—152.

2) *Ermittelung aller einem bestimmten Zahlengebiet angehörenden Lösungen der Pythagoreischen Gleichung.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **18**, 1887, 418—420.

3) *Zum Beweise des Bachetschen Satzes.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **22**, 1891, 422—423.

4) *Über die Zerlegung ungerader Zahlen in Factoren.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **27**, 1896, 256—257.

5) *Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik.* Frankfurt am Main 1874 (Programm der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt am Main). 42 S. 4°. — Zweite verbesserte Auflage. Braunschweig, Vieweg 1896. (7) + 68 S. 8°.

Auflage seiner Monographie brachte WERTHEIM viele Verbesserungen und Zusätze an; die schon in der ersten Auflage vorkommenden Verweisungen auf Werke, welche dieselben oder ähnliche Aufgaben wie MISRACHI behandeln, sind hier wesentlich vervollständigt.

Seit dem Jahre 1897 war WERTHEIMS Interesse fast ausschliefslich auf mathematisch-historische Gegenstände gerichtet, und er veröffentlichte eine ziemlich grofse Anzahl hierher gehörender Aufsätze. Zur Geschichte der Mathematik bei den Juden gehören zwei Artikel[1]) über die Werke *Porto astronomico* (1636) und *Introduzione alla geografia* (1640) des italienischen Juden und Talmudlehrers EMANUEL PORTO aus Triest (erste Hälfte des 17. Jahrhunderts); das erste Buch PORTOS enthielt u. a. eine sphärische Trigonometrie mit Tafeln, das zweite ebenso eine ebene Trigonometrie. Der Geschichte der Zahlentheorie widmete er einige Aufsätze, wovon einen über DIOFANTOS und drei über FERMAT. Zweck des ersten Aufsatzes[2]) ist, den Text der Schlufsaufgabe in DIOFANTOS' Schrift über Polygonalzahlen: „Auf wie viele Arten kann eine gegebene Zahl Polygonalzahl sein?" zu ergänzen; bekanntlich ist der Text verstümmelt und bricht in der Mitte ab. WERTHEIM versucht zu zeigen, dafs DIOFANTOS sehr wohl zur Formel

$$2P = n[(a-2)(n-1)+2]$$

gelangt sein kann, wo P die Polygonalzahl, n die Seite und a die Zahl der Ecke ist. DIOFANTOS soll dadurch veranlafst worden sein, das Doppelte der gegebenen Zahl versuchsweise in zwei ungleiche Faktoren zu zerlegen, worauf er vermittelst der Formel untersuchte, ob die Zerlegung brauchbar ist oder nicht. Die Herleitung der Formel kann ja sehr wohl im verlornen Stücke der Schrift des DIOFANTOS enthalten gewesen sein; ob aber dieser daraus die von WERTHEIM angegebenen Schlüsse gezogen hatte, dürfte mehr als unsicher sein. Von den Aufsätzen, die sich auf FERMAT beziehen, behandelt einer[3]) ausführlich den 1657—1658 geführten zahlentheoretischen Streit mit WALLIS; während desselben stellte bekanntlich FERMAT als dritte Aufgabe die Lösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ auf, und diese Aufgabe wurde wirklich von BROUNCKER gelöst. Ein anderer Artikel[4]) macht darauf aufmerksam, dafs FRENICLE

1) *EMANUEL PORTO's Porto astronomico. Ein zweites mathematisches Werk EMANUEL PORTOS.* Monatsschr. für Gesch. und Wiss. des Judenthums **41**, 1897, 616—622; **42**, 1898, 375—380.

2) *Die Schlufsaufgabe in DIOPHANTS Schrift über Polygonalzahlen.* Zeitschr. für Mathem. **42**, 1897; Hist. Abt. 121—126.

3) *PIERRE FERMATS Streit mit JOHN WALLIS.* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, 555—576.

4) *Ein von FERMAT herrührender Satz.* Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abt. 4—7.

de Bessy in seiner Schrift *Traité des triangles rectangles en nombres* ohne Zweifel eine ihm von Fermat mitgeteilte Methode auseinander gesetzt hat, um zu beweisen, daſs der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seiten keine Quadratzahl sein kann, aus welchem Satz bekanntlich unmittelbar folgt, daſs die Summe zweier Biquadrate kein Biquadrat sein kann. Ein dritter Artikel[1]) enthält die Bemerkung, daſs der Term „columna" nicht, wie von P. Tannery angenommen wurde, von Fermat selbst gebildet worden ist, sondern schon bei Maurolico vorkommt. Übrigens hat Wertheim auch durch andere kleinere Notizen oder durch Recensionen sein reges Interesse für die Geschichte der Zahlentheorie gezeigt.[2])

Wertheims übrige Aufsätze mathematisch-historischen Inhalts beziehen sich auf Gegenstände der Arithmetik und Algebra oder auf Verfasser, die sich damit beschäftigt haben. So hat er versucht[3]) vermittelst der Regel des doppelten Ansatzes die Heronischen Kubikwurzeln und den Archimedischen Wert für $\sqrt{3}$ herzuleiten, sowie die Heronische Herleitung der Formel

$$\sqrt{a^2 + r} \sim \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 + r}{a}\right)$$

wiederzufinden, und er hat[4]) ein paar dunkle Punkte im *Tractatus de numeris datis* des Jordanus Nemorarius aufgeklärt. Weiter hat er sich mit der Erfindung der Kettenbrüche beschäftigt.[5]) Bekanntlich war man bisher der Ansicht, daſs diese Erfindung dem italienischen Mathematiker P. A. Cataldi zuzuschreiben ist, aber Wertheim bemerkt, daſs schon Bombelli in seiner *Algebra* (1572) ein Verfahren anwandte, das thatsächlich zu Kettenbrüchen führt, und folgert daraus, daſs es angebracht ist, diesen als den ersten Erfinder solcher Brüche zu betrachten. Die an sich richtige Bemerkung ist freilich nicht ganz neu[6]), und ob dadurch das Erfinderrecht des Bombelli sichergestellt ist, kann wohl bezweifelt

1) *Fermats Observatio zum Satze des Nikomachus.* Zeitschr. für Mathem. **43**, 1898; Hist. Abt. 41—42.

2) Siehe Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 360—361; 3_3, 1902, S. 144—145, 248—251.

3) *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln.* Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abt. 1—3. — *Über die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln bei Heron von Alexandria.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **30**, 1899, 253—254.

4) *Über die Lösungen einiger Aufgaben im „Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius.* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 417—420.

5) *Die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln und die Erfindung der Kettenbrüche.* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, 147—160.

6) Vgl. A. Favaro, *Notizie storiche sulle frazioni continue.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1874, 494—498.

werden, da bei diesem eine Form für Kettenbrüche vollständig fehlt. Eine kurze Notiz[1]) über den Ursprung des Zeichens x erwähne ich nur im Vorübergehen, da WERTHEIM selbst etwas später in der Zeitschrift für mathematischen Unterricht **32**, 1901, S. 201 seine Erklärung als unbefriedigend bezeichnet hat, und ebenso nenne ich nur beiläufig, dafs WERTHEIM in der Bibliotheca Mathematica zur Abteilung: Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von CANTORS „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" Beiträge geliefert hat, und auch direkt Herrn CANTOR einige von diesem für den zweiten Band benutzte Notizen mitgeteilt hat.[2])

Drei mathematisch-historische Aufsätze von WERTHEIM habe ich noch zu nennen, nämlich über die Logistik (1559) des J. BUTEO[3]), über P. A. CATALDI[4]) und über die Algebra (1659) des J. H. RAHN.[5]) Der zweite Aufsatz bezweckt hervorzuheben, dafs CATALDIS Bedeutung für die Entwickelung der Mathematik nicht so grofs ist, als man bisher, hauptsächlich auf die Autorität von LIBRI gestützt, angenommen hat; die zwei anderen Aufsätze enthalten sorgfältige Analysen der betreffenden Schriften, wobei WERTHEIM Gelegenheit hat einige Angaben von CANTOR zu vervollständigen oder zu berichtigen; so z. B. bestätigt er die schon von H. KONEN[6]) gemachte Bemerkung, dafs J. PELL sich garnicht mit der nach ihm genannten Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ beschäftigt hat.

Bevor wir den Bericht über WERTHEIMS Wirksamkeit auf dem mathematisch-historischem Gebiete beenden, haben wir noch zu erwähnen, dafs in den Recensionen, welche er für die Zeitschrift für mathematischen Unterricht redigierte, Berichtigungen einzelner mathematisch-historischer Angaben zu finden sind.[7])

Aus dem Vorhergehenden dürfte ersichtlich sein, dafs WERTHEIM eine umfassende Litteraturkenntnis gehabt haben mufs, und diese verdankte er hauptsächlich dem Umstande, dafs er selbst eine reichhaltige

---

1) *Über den Ursprung der Bezeichnung der Unbekannten durch den Buchstaben x.* Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abt. 48. Zeitschr. für mathem. Unterr. **30**, 1899, 340—341.

2) Siehe Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 504—505; 2_3, 1901, 143—148, 354—355, 357. — CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2^2, 305, 399, 481, 515, 573, 613, 669, 781, 785.

3) *Die Logistik des* JOHANNES BUTEO. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 213—219.

4) *Ein Beitrag zur Beurteilung des* PIETRO ANTONIO CATALDI. Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 76—83.

5) *Die Algebra des* JOHANN HEINRICH RAHN *(1659) und die englische Übersetzung derselben.* Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 113—126.

6) H. KONEN, *Geschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$ (Leipzig 1901), S. 34.

7) Siehe z. B. Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 199—201; **32**, 1901, 109—114, 374—376.

und wertvolle mathematische Bibliothek[1]) besafs. Seine Bibliothek zu ergänzen war besonders während der letzten Jahre seines Lebens Gegenstand seiner eifrigen Anstrengungen, und in seinen Briefen an den Schreiber dieser Zeilen kommen oft Mitteilungen über von ihm erworbene seltene mathematische Bücher vor.

Wollen wir zum Schlufs WERTHEIMS Verdienste um die mathematisch-historische Forschung zusammenfassen, so können wir sagen, dafs er sich vorzugsweise damit beschäftigt hat teils zu erklären, auf welche Weise gewisse in den Schriften älterer Mathematiker vorkommende Sätze hergeleitet worden sind, teils an einzelnen Punkten die Angaben der Geschichtsschreiber der Mathematik zu berichtigen. Eine ausführlichere Untersuchung hat er dagegen nur ausnahmsweise ausgeführt, und die Geschichte der Regel des falschen Ansatzes, die er ein paar Jahre vor seinem Tode in Angriff genommen hatte, ist unvollendet geblieben.

1) In Frankfurt am Main giebt es keine öffentliche Bibliothek, die mathematische Bücher kauft.

Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der technischen Hochschule in München 1897—1902.

Von A. VON BRAUNMÜHL in München.

Dem Wunsche des Herausgebers dieser Zeitschrift entsprechend, will ich an zwei frühere Referate in ihren Spalten anknüpfend (Jahrgang 1895, 89—90 und 1897, 113—115) über die mathematisch-historischen Vorlesungen und Übungen berichten, die ich nun bereits seit einem Decennium an der Münchner technischen Hochschule abhalte. Seit dem Jahre 1897 war ich infolge der beständig wachsenden Arbeitslast an unserer Schule nur einmal im stande neben meinen mathematischen Vorlesungen eine geschichtliche zu halten, nämlich im Wintersemester 1899/1900 über Geschichte der Trigonometrie, welche die im Jahrgang 1897 erwähnte Wintervorlesung wiederholte und weiterführte. Der erste Teil dieser Vorlesungen erschien bereits 1900 bei Teubner und behandelte die Geschichte der Trigonometrie von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen, während der zweite Teil, welcher bis zur neuesten Zeit reicht, sich soeben im Druck befindet. Mufste ich in den letzten Jahren darauf verzichten, wie es mein Wunsch gewesen wäre, wenigstens in einem Semester eine Vorlesung über ein geschichtliches Thema abzuhalten, so war es mir doch gegönnt, mein mathematisch-historisches Seminar ohne Unterbrechung fortzuführen. Bis zum Wintersemester 1899/1900 verfuhr ich dabei in derselben Weise, wie ich dies im Jahrgang 1897 dieser Zeitschrift mitgeteilt habe, indem ich über verschiedenartige, teils von den Teilnehmern selbst gewählte, teils von mir gestellte Themata Vorträge abhalten liefs. Die Frucht derselben war hier und da eine kleine Arbeit, die in dieser Zeitschrift veröffentlicht wurde; so hat Herr S. HALLER einen *Beitrag zur Geschichte der konstruktiven Auflösung sphärischer Dreiecke durch stereographische Projektion* (1899, 71—80), Herr G. HEINRICH eine *Notiz zur Geschichte der SIMPSONschen Regel* (1900, 90—92) und einen Aufsatz über *JAMES GREGORYS Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1901, 77—85) geliefert, und zuletzt kamen noch zwei Beiträge von Herrn A. A. BJÖRNBO: *Hat MENELAOS einen Fixsternkatalog verfafst?* (1901, 196—212) und *Über*

zwei mathematische Handschriften aus dem 14. Jahrhundert (1902, 63—75) hinzu, sowie von Herrn Kutta *Elliptische und andere Integrale bei Wallis* (1901, 230—234).

Vom Wintersemester 1899/1900 an konnte ich, da sich inzwischen meine Zuhörerschaft etwas homogener als früher gestaltet hatte, dazu übergehen, Cyklen von Vorträgen über ein bestimmtes Gebiet einzurichten, welche sich auf ein ganzes Jahr ausdehnten. Solcher Cyklen fanden bisher drei statt. Der erste behandelte die Geschichte der Quadratur des Kreises von den ältesten Zeiten bis auf die Gegenwart (in 14 oft mehrstündigen Vorträgen), der zweite die Geschichte der Entstehung der Infinitesimalrechnung, mit der Exhaustionsmethode der Alten beginnend, mit Leibniz und Newton schliefsend (in ebenso vielen Vorträgen), der dritte bezog sich auf die Geschichte der Geometrie im 16. und 17. Jahrhundert mit besonderer Betonung der Entstehungsgeschichte der analytischen Geometrie (17 Vorträge). Er begann mit der *Geometria deutsch* und Johann Werners Arbeiten und schlofs mit Besprechung der Leistungen von Wallis und de la Hire. Das Verfahren, welches ich bei Abhaltung dieser Cyklen einschlug, bestand darin, dafs ich zu Beginn eine kurze Übersicht über den zu besprechenden Stoff gab, denselben in Abschnitte einteilte und deren Behandlung den einzelnen Studierenden zuwies, zugleich mit Angabe der hauptsächlichsten Quellen, wobei ich stets ein Studium der Originalarbeiten verlangte. Die einzelnen Vorträge wurden schriftlich ausgearbeitet und mit einer Disposition versehen. Inhalt und Form wurden einer Kritik unterzogen, auch knüpften sich mitunter an die einzelnen Vorträge sehr lebhafte Diskussionen. Übrigens mag noch bemerkt werden, dafs auch in jenen Jahren, in welchen ich diese Cyklen abhielt, gelegentlich über andere Gebiete referiert wurde, für welche sich einzelne Teilnehmer besonders interessierten.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

1:12, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 265. — **1:15,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 323. — **1:22, 29, 34,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 265—266. — **1:36, 64,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 137. — **1:103,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1:135,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266; **3**$_3$, 1902, S. 137. — **1:144, 155, 169, 171,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 137—138. — **1:190, 197, 202,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1:225, 234,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 138. — **1:255,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 238. — **1:283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 319. — **1:383,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1:395,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 323. — **1:400,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1:429,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 324. — **1:432,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1:436,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1:457,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 238. — **1:463,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139, 324. — **1:467, 469,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1:475,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267—268; **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1:476,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1:510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 314. — **1:519—520,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1:622,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 143. — **1:641,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1:661,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1:662,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499; **3**$_3$, 1902, S. 139.

1:663. Aus dem Umstande, daſs in einer lateinischen Abhandlung über die isoperimetrische Aufgabe die Form „Archimenides“ vorkommt, folgert Herr Cantor noch in der 2. Auflage seiner *Vorlesungen*, daſs die Arbeiten des Zenodoros den Arabern bekannt gewesen sein müssen. Diese Schluſsweise kann wohl ohne besondere Begründung als irrig bezeichnet werden (vgl. Curtze, Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 265), und übrigens ist ja von verschiedenen Seiten die Aufmerksamkeit darauf gelenkt worden, daſs die Form „Archimenides“ auch in solchen lateinischen Übersetzungen vorkommt, die ohne Zweifel direkt aus dem Griechischen gemacht worden sind. Bekanntlich hat Herr Suter schon 1884 (Zeitschr. für Mathem. **29**; Hist. Abt. S. 99—101) diesen Gegenstand ausführlich behandelt, und Herr Heiberg einige Jahre später (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **5**, 1890, S. 7) darauf hingewiesen, daſs in einer Handschrift der (direkt aus dem Griechischen herstammenden) Übersetzung der „Quadratura parabolae“ durch Wilhelm von Moerbek, die Form „Archimenides“ sich findet.

G. Eneström.

1:671, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1:687—688,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 143—144. — **1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 449—500. — **1:749,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805,**

807, 808, 812, 823, 852, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1:854,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2:25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2:34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:41, 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503.

2:97. Die Frage über die lückenlose Ausfüllung des Raumes war schon vor Roger Bacon behandelt worden. Anknüpfend an einer Stelle in Aristoteles' *De coelo* lib. 3, cap. 8 (ed. Didot II, S. 421), hatte Averroes behauptet, daſs nicht nur 8 Würfel, sondern auch 12 an einer Ecke zusammenstoſsende Tetraeder den Raum erfüllen (vgl. De Marchi, Biblioth. Mathem. 1885, Sp. 195), und wahrscheinlich hat Bacon die Arbeit des Averroes gekannt. Dagegen rührt vielleicht die Behauptung, daſs 9 an einer Ecke zusammenstoſsende Oktaeder den Raum erfüllen, von Bacon selbst her.

G. Eneström.

2:98, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2:100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2:105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2:111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352.

2:116. Siehe oben S. 405 die Bemerkung zu **1**:663.

2:122, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504.

2:126. Daſs Johannes de Liveriis mit Johannes de Lineriis identisch ist, dürfte jetzt ziemlich sicher sein, und es ist nicht richtig, daſs Steinschneider hier zwei Persönlichkeiten unterscheidet; im Gegenteil hat Steinschneider in der Biblioth. Mathem. 1889, S. 37—38 darauf hingewiesen, daſs er von S. Günther an der von Herrn Cantor zitierten Stelle miſsverstanden worden ist.

2:127. Über Dominicus de Clavasio hat M. Curtze in der Biblioth. Mathem. 1895, S. 107—110 einige Notizen mitgeteilt. Dominicus war in Chivasso in Italien geboren, und gehörte 1349—1350 der Artistenfakultät, 1357—1359 der medizinischen Fakultät in Paris als Lehrer an. Seine wichtigste Arbeit *Practica geometriae* wurde 1346 in Paris verfaſst.

2:128, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:163, 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:210, 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2:229, 242, 243,** siehe

BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505. — **2:253,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2:273,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505. — **2:274,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2:282, 283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2:296,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2:313,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:328,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:334, 353, 381,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:385,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81. — **2:386, 395, 401, 405, 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2:430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2:442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2:449, 474, 480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2:481, 482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2:482,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240. — **2:484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:486, 489, 490, 497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2:510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510. — **2:550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2:554, 569, 572, 573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:572,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2:582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2:592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:594, 597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2:597, 599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:602, 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271. — **2:611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2:612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:614, 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:621, 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2:638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2:665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2:719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:721, 742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:742,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:746, 747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2:772, 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **2:784, 820, 825, 840, 856, 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2:876, 878, 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:12, 17, 22,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3:26,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:45—48, 49, 50,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3:70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3:100,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3:116,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:117,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513.

3:124. Der Angabe, daſs JAKOB BERNOULLI 1695 eine neue Ausgabe der DESCARTESschen Geometrie veranstaltete, kann hinzugefügt werden, daſs es sich um die lateinische Übersetzung handelt, und daſs BERNOULLIS Name weder auf dem Titel noch im Buche vorkommt. Der Titel giebt an, es sei die Ausgabe „a viro clariss. denuo revisa et ab innumeris mendis repurgata" und die erste „praefatio ad lectorem", die wahrscheinlich vom Verleger herrührt (die zweite „praefatio" ist die alte SCHOOTENsche), spricht von einem „vir clarissimus qui excudendo huic operi suam voluit commodare operam" und etwas weiter unten von „vir clarissimus, correctoris vicibus defunctus". Da aber JAKOB BERNOULLI gewiſs Verfasser der von Herrn CANTOR erwähnten Anmerkungen ist, so kann man wohl daraus schlieſsen, daſs er mit dem „cor-

rector“ identisch war, obgleich dieser Umstand weder aus dem Titel, noch aus der zitierten Vorrede unzweideutig hervorzugehen scheint.

G. Eneström.

---

3 : 151, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 447, 455,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 565. 571, 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 652,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 660, 667, 689, 695,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442. — **3 : 750, 758, 760, 766,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447 — **3 : 892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Vermischte historische Notizen.

Über die angebliche Verstümmelung griechischer Eigennamen durch arabische Übersetzer. Man trifft in mathematisch-historischen Abhandlungen immer und immer wieder auf die Klage über die Verstümmelung griechischer Eigennamen durch arabische Übersetzer. Es ist an der Zeit, dafs diese irrige Anschauung einmal einer richtigen Darstellung Platz mache. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs die arabischen[1]) Übersetzer des 8. und 9. Jahrh., die mit der griechischen Sprache ja wohl vertraut waren, die griechischen Eigennamen so in ihre Sprache transskribiert haben, wie sie dieselben von den damaligen Griechen aussprechen hörten; so schrieben sie also, um das für unsern Zweck geeignetste Beispiel zu wählen, Arschimides oder Arschimidis (das letzte η wurde, da es den Ton nicht hat, als kurz aufgefafst, daher im Arabischen nicht geschrieben, und konnte daher als *i* oder *e* gelesen werden); das griechische χ wurde nämlich damals schon, wie noch heutzutage, vor *e* und *i* nahezu wie *sch* ausgesprochen, hätte es sich mehr dem deutschen (alemannischen) *ch* genähert, so hätten sie dasselbe durch ihr *ḫ* oder *h* wiedergegeben; das griechische η wurde ebenfalls damals schon wie heute $= i$ ausgesprochen. Woher kommt es nun, dafs dieser und andere Namen so abweichende Schreibweisen erfahren haben? Zwei Klassen von Leuten tragen daran die Schuld: in erster Linie die arabischen Abschreiber, und in zweiter die mittelalterlichen Übersetzer ins Lateinische. Jene Abschreiber, die um das tägliche Brod arbeiteten, führten infolge dessen ihre Arbeiten oft sehr flüchtig aus, sie liefsen also z. B. oft, besonders in der späteren Zeit, die sog. diakritischen Punkte weg, die in der arabischen Schrift zur Unterschei-

1) Dafs viele dieser Übersetzer christliche Syrer waren, und viele Übersetzungen aus dem Griechischen erst durch Vermittlung des Syrischen gemacht worden sind, thut hier nichts zur Sache, da die Buchstaben, um die es sich hier handelt, in beiden Sprachen identisch sind.

dung von sonst gleich aussehenden Konsonanten dienen; läfst man z. B. beim arabischen *sch* die drei Punkte über demselben weg, so lautet es *s*, läfst man beim arabischen *i* (*j*) die zwei Punkte unter demselben weg, so kann es gelesen werden *n* (oder auch *t* oder *b*), daraus ergeben sich dann sofort die Lesarten Arsimides (oder Ersemides), Arschimenides oder Arsimenides, Archimenides, ja sogar Arsamites. Ebenso wurde aus Menelaos, das wohl anfänglich Menelâôs transskribiert worden ist, dann auch in Menâlâôs und sogar Mânâlâôs überging, Milêus, indem das unpunktierte $n = i$ und das $a = e$ (wofür die Araber keinen besondern Buchstaben besitzen) gelesen wurde. Wenn man nun jene Flüchtigkeitsfehler den um den Lohn arbeitenden arabischen Abschreibern verzeihen kann, so wird man das weniger gut den abendländischen Übersetzern gegenüber können, von denen man eine bessere Bildung erwarten sollte, von denen man voraussetzen dürfte, dafs sie schon einmal von einem griechischen Mathematiker Archimedes gehört haben sollten. Wer aber in einem arabischen Text Arsimenides liest, und dies stehen läfst, oder es etwa in Archimenides verwandelt, von dem mufs man annehmen, dafs er entweder noch gar nie etwas von einem Archimedes gehört hat, oder diesen Namen vielleicht nur dunkel in Erinnerung hat, aber seine wahre Form doch nicht kennt. Wir für unsern Teil messen also die gröfsere Schuld an diesen korrumpierten Namen den „berühmten" Übersetzern des 12. Jahrh. zu als den armen arabischen Abschreibern; die syrisch-arabischen Übersetzer des 7. bis 9. Jahrh. aber trifft sicher keine Schuld, was auch die ältesten und besten arabischen Manuskripte heute noch beweisen. Heinrich Suter.

Weierstrass über das sogenannte Dirichletsche Prinzip. Weierstrass hat sein berühmtes, analytisch strenges Beispiel über die falsche Dirichletsche Schlufsweise am 14. Juli 1870 der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegt.[1]) In einer im mathematischen Lesezimmer zu Göttingen ausgestellten, handschriftlichen Ausarbeitung der Weierstrassschen Vorlesungen: „Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen" vom S. S. 1874 fand ich in einer Ergänzung am Schlufse des Bandes eine interessante Mitteilung, die wohl für alle diejenigen, die sich für das Dirichletsche Prinzip und dessen Geschichte interessieren, lehrreich sein kann. Hauptsächlich aus dem Grunde, weil die Mitteilung ein in gewöhnlichen Referaten ganz unbekanntes, besonders klares und aus dem Gesichtspunkt eines intuitiven Beweises recht treffendes geometrisches Beispiel enthält, welches wohl mit dem bekannten analytischen zu gleicher Zeit im Ideenkreis von Weierstrass entstanden ist. Dies Beispiel knüpft an den Legendreschen Beweis für den zweiten Teil seiner Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, ohne das Parallelenaxiom zu gebrauchen, an.

Die Mitteilung ist ein Referat über einen Vortrag von Weierstrass im Berliner mathematischen Seminar vom 22. Juni 1872 und der betreffende Teil soll nun im Wortlaute der Ausarbeitung im Folgenden angeführt werden:

„Das Dirichletsche Prinzip kann höchstens ein Hülfsmittel sein, um

---

1) Siehe Weierstrass, *Mathematische Werke*, Bd. II: „Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip", S. 49—54.

Sätze zu finden, aber keine Basis einer Theorie, wie bei Riemann[1]), und kein strenges Beweismittel bilden. Man kann zwar von jeder Funktion behaupten, daſs es für sie eine untere Grenze giebt, aber nicht, daſs diese untere Grenze erreicht wird. Hierzu mögen folgende Beispiele dienen:

Legendre hat versucht, den Satz von der Summe der Dreieckswinkel unabhängig von der Parallelentheorie zu beweisen; und zwar beweist er, daſs diese Summe 1) nicht gröſser als $2R$ sein kann; 2) auch nicht kleiner als $2R$ sein kann. Der Beweis des ersten Teiles ist richtig, der zweite Teil leidet an dem Fehler, daſs er annimmt, daſs das Maximum erreicht wird. Er sagt nämlich: unter allen Dreiecken, die man konstruieren kann, giebt es jedenfalls eins, dessen Winkelsumme ein Maximum ist. Gröſser als $2R$ kann dieses Maximum nicht sein, also ist das erreichbare Maximum $= 2R$. Erreicht aber ein Dreieck dieses Maximum, so ist leicht zu zeigen, daſs alle Dreiecke es erreichen müssen, folglich u. s. w. Hierbei bleibt aber vollständig unerwiesen, ob die Funktion das Maximum wirklich erreicht.

„Bemerkung von Weierstrass in den Vorlesungen über Variationsrechnung 1879: Daſs hier ein Fehlschluſs gemacht ist, erkennt man sofort, wenn man auf das sphärische Dreieck, bei welchem die Summe der Winkel nicht kleiner sein kann als 2 Rechte, dieselben Schlüsse anwenden wollte. Man würde finden, daſs in jedem sphärischen Dreiecke die Winkelsumme $2R$ beträgt, was doch keineswegs der Fall ist."

Als weiteres Beispiel folgt das bekannte Beispiel des Integrals:

$$I = \int_{-1}^{+1} x^2 \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx$$

mit den Bedingungen: für $x = -1 : \varphi = a$, für $x = +1 : \varphi = b$; dabei $b > a$. Es wird, wie bekannt, gezeigt, daſs die untere Grenze aller derjenigen Werte, die dieses Integral für die verschiedenen der betrachteten Gesamtheit angehörigen Funktionen $\varphi(x)$ hat, von I nicht erreicht werden kann.

Budapest. Karl Goldziher.

Anfragen und Antworten.

102. Hermannus secundus (Dalmata). Unter den ersten lateinischen Übersetzern arabischer astronomischer Werke findet sich auch ein gewisser Hermannus, der, wohl um Verwechslung mit Hermannus Contractus zu vermeiden, zuweilen „secundus", aber auch „Dalmata" genannt wird. Von den Lebensumständen dieser Persönlichkeit scheint bis jetzt nur wenig bekannt zu sein. Er soll Lehrer von Rudolph von Brügge gewesen sein, der bekanntlich in der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts lebte, und wird als „peritissimus utriusque linguae, latinae et arabicae" bezeichnet (vgl. z. B. Bubnow, *Gerberti Opera mathematica* [1899], S. CVI, 124). Unter den ihm zugeschriebenen Übersetzungen finden sich zwei astronomischen Inhalts, nämlich das *Planisphaerium Ptolemaei* (eigentlich eine arabische Bearbeitung dieser Arbeit von Mas-

---

1) Siehe Riemann, *Theorie der Abelschen Funktionen* (*Gesammelte mathematische Werke*, S. 81).

LAMA AL-MADJRITI, vgl. Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 323) und die *Introductio* des ABU MAASCHAR (siehe STEINSCHNEIDER, Biblioth. Mathem. 4_2, 1890, S. 71). Die erste Übersetzung, die auch RUDOLPH VON BRÜGGE zugeschrieben worden ist, soll 1143 oder 1144 in Toulouse (eine Handschrift hat Toledo) verfertigt worden sein. Ob HERMANNUS DALMATA wirklich die Schrift des ABU MAASCHAR übersetzt hat, scheint noch nicht sicher zu sein (vgl. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber* [1900], S. 29).

Ist es möglich festzustellen, ob HERMANNUS DALMATA wirklich astronomische oder mathematische Arbeiten übersetzt hat, und welche sind diese Arbeiten? G. ENESTRÖM.

---

103. Die „Leçons de ténèbres" des Desargues. In einem Briefe von OLDENBURG an LEIBNIZ vom 6. April 1673 wird eine von DESARGUES verfaſste Schrift: „Leçons de ténèbres" erwähnt, die eine Theorie der Kegelschnitte enthielt und in nur 50 Exemplaren gedruckt war, sodaſs es schon damals auſserordentlich schwierig war, ein solches zu bekommen (siehe *Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern, herausg. von* C. I. GERHARDT, I, Berlin 1899, S. 87). In unseren Tagen hat man vergebens versucht, ein Exemplar einer Schrift mit diesem Titel wiederzufinden, und C. I. GERHARDT (*DESARGUES und PASCAL über die Kegelschnitte*; Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. in Berlin 1892, S. 186) hat die Vermutung ausgesprochen, daſs die „Leçons de ténèbres" identisch mit dem bekannten *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan* (1639) sind, das von den Zeitgenossen des DESARGUES wegen seiner Dunkelheit die Benennung „Leçons de ténèbres" erhalten haben würde; in der That wendet OLDENBURG selbst in dem zitierten Brief die Ausdrucksweise: „Dni. DESARGUES Conica, Leçons de ténèbres nuncupata" an, und über den Inhalt der Schrift giebt er eine Notiz, die möglicherweise zu dem oben erwähnten *Brouillon projet* von 1639 passen kann.

Auch in ein paar folgenden Briefen (*Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ* etc., S. 121, 130) thut OLDENBURG der „Leçons de ténèbres" Erwähnung, aber ohne daſs man dadurch entscheiden kann, ob die Vermutung von GERHARDT begründet ist oder nicht. Auf der anderen Seite berichtet OLDENBURG in dem Briefe vom 6. April 1673, ein Exemplar der „Leçons de ténèbres" befinde sich im Besitz eines gelehrten Engländers, „qui tractatum molitur de canone mathematico sive tabulam sinuum, qua ostendatur, quam difficilia problemata et aequationes solvi illius beneficio possint." Den Namen dieser Person nennt OLDENBURG freilich nicht, aber aus einem Passus seines Briefes an LEIBNIZ vom 26. Juli 1676 (*Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ*, etc., S. 176) scheint deutlich hervorzugehen, daſs JOHANNES PELL gemeint ist.

Ist es möglich unter den hinterlassenen Papieren PELLS (vgl. BALL, *History of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge 1889, S. 40—41) das von OLDENBURG erwähnte Exemplar der „Leçons de ténèbres" wiederzufinden und auf diese Weise die Vermutung von GERHARDT zu bestätigen oder derselben zu widerlegen? Wenn dies nicht der Fall ist, kann man auf anderem Wege zu einem bestimmten Resultate gelangen? G. ENESTRÖM.

---

104. Der Erfinder des Wilsonschen Satzes. In dem grofsen englischen biographischen Sammelwerke *National biography* finden wir Sir John Wilson (1741—1793). Er ist in Westmoreland geboren, trat 1759 in das Peterhouse in Cambridge ein, wurde 1761 B. A., 1764 M. A., im gleichen Jahre „Fellow". Im Jahre 1766 wandte er sich der praktischen Justiz, zunächst als Anwalt, zu. Noch von Cambridge aus schrieb er eine Entgegnung auf einen Angriff, den William Samuel Powell gegen Edmund Warings *Meditationes analyticae* gemacht hatte. Im Jahre 1782 wurde Sir John Wilson Mitglied der „Royal society". Da nun Waring in seinen *Meditationes algebraicae* den Wilsonschen Satz veröffentlichte und den Erfinder in der 3. Ausgabe jenes Werkes (1782) p. 380 als „Joannes Wilson, Armiger" bezeichnet, so stimmen alle diese Momente vortrefflich überein. Nun erscheint aber ein Zweifel! Nach der *National biography* wurde Sir John Wilson am 15. November 1786 zum Ritter ernannt („was knighted"). Wie kann er da 1782 „Armiger" heifsen? Ist etwa 15. November 1786 Druckfehler für 1780? Oder ist Wilson schon in der 1. Ausgabe der *Meditationes algebraicae* (1770), wo der Satz nach Lagrange (Mém. Berlin 1771, gedruckt 1773, p. 125—126) auf Seite 218 zu finden ist, als „Armiger" bezeichnet, und wie soll in diesem Falle das Datum 15. November 1786 erklärt werden?

Moritz Cantor.

Risposta alla questione 101 su Giannantonio Rocca (1607—1656). La prima menzione che di questo matematico ricorre in opere a stampa è contenuta nel primo problema *De dimensione parabolae* di Evangelista Torricelli (in appendice all' opera *De sphaera et solidis sphaeralibus*, Florentiae, typis Amatoris Massae et Laurentii de Landis 1644), il quale esponendo a pag. 76 il Lemma: „Si figura plana super aliqua sui recta linea figuram „ipsam secante libretur, erunt momenta segmentorum figurae, ut sunt solida „rotunda ab ipsis segmentis, circa secantem lineam revolutis, descripta", vi premette: „Authore Io. Antonio Roccha praestanti geometra." Il quale Evangelista Torricelli era col Rocca in corrispondenza, ed anzi in una sua lettera da Firenze sotto il dì 12 novembre 1649 gli scriveva: Ammiro il suo ingegno, dacchè vidi in Roma la dimostrazione sua del fuso parabolico, e feci concetto del suo valore, giudicandolo come „ex ungue leonem."

La menzione del Cavalieri (*Exercitationes geometricae sex,* Bononiae, typis Jacobi Montii 1647, pag. 230) relativa allo stesso argomento e nella quale si chiarisce la precedenza del Rocca sul Guldino, avvertita in ambedue le edizioni del Montucla e del Cantor, è posteriore a quella del Torricelli.

Intorno al Rocca, il quale non fu come si crede scolaro del Cavalieri, si hanno due scritti biografici, l' uno dell' Ab. Girolamo Tiraboschi (Biblioteca Modanese **4**, 1783, pag. 357—365), l' altra in appendice alle *Lettere* menzionate dal Sign. Eneström; ma il porre in evidenza tutto ciò che queste contengono per un apprezzamento del giusto valore del Rocca eccederebbe le proporzioni d'una semplice risposta, e perciò mi riservo di occuparmene quanto prima in una apposita monografia.

Padova. A. Favaro.

Recensionen.

R. Klimpert. Storia della geometria ad uso dei dilettanti di matematica e degli alunni delle scuole secondarie. Traduzione dal Tedesco autorizzata dall' autore con note ed aggiunte di **P. Fantasia.** Bari, Laterza 1901. (7) + 324 + (1) + X S. 8°. 4 lire.

Das Original dieser Übersetzung erschien 1888 in Stuttgart unter dem Titel: *Geschichte der Mathematik, für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt*, und enthielt zum grofsen Teil wörtliche Auszüge aus den mathematisch-historischen Arbeiten von CHASLES, ARNETH, CANTOR, GERHARDT, HANKEL und SUTER. Der italienische Übersetzer hat, wie auch im Titel angedeutet wird, eine grofse Anzahl von ergänzenden Bemerkungen, zum Teil unter der Form von Noten, eingefügt, wobei er die neuesten Arbeiten von CANTOR, LORIA, ZEUTHEN u. A. benutzt hat. Ein einheitliches Werk ist das Buch also nicht, sondern vielmehr eine ziemlich bunte Sammlung von mehr oder weniger wertvollen Notizen zur Geschichte der Geometrie, aber auf der anderen Seite sucht es nicht seine Leser unter den Gelehrten oder unter denjenigen, die auf dem Wege sind, Gelehrte zu werden. Beachtet man diesen Umstand, wird man geneigt sein zuzugeben, dafs das Buch für seinen bescheidenen Zweck wohl passen kann, und es ist nicht unmöglich, dafs auch die Studenten an den Universitäten davon Nutzen haben können. Natürlich fehlt es nicht an unrichtigen oder unvollständigen Angaben; einige solche sind schon von Herrn LORIA im Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, S. 116—118 hervorgehoben worden, und es wäre ziemlich leicht noch eine Anzahl solcher Angaben zu verzeichnen, aber in dieser kurzen Anzeige müssen wir darauf verzichten. Dagegen können wir nicht umhin zu bemerken, dafs die Namen der zitierten Mathematiker sehr oft durch Schreib- oder Druckfehler entstellt worden sind. Solche Fehler wie z. B. „Sohnke" (S. 2) sind ja sehr unschuldig, und auch „Leotand" (S. 196), „E. Günther" (für E. GUNTER) (S. 233), „Wan Heuret" (S. 262), „Molweide" (S. 296), „Lexel" (S. 297), „Newcombe" (S. 303), sind weniger zu beanstanden. Unangenehmer sind dagegen solche Fehler wie z. B. „van Ceilan" (S. 164), „Mästlein" (S. 236), „Torpoley" (S. 280), „Thschirnausen" (S. 293—294), „Bertrami" (S. 300, 303), „Chifford" (S. 303), „Schléghel" (S. 303), „Gerarhdt" (S. 307), „Von Staud" (S. 311), „Graesmann" und „Janquières" (S. 318), besonders da sie so zahlreich auftreten. S. 213 steht „Adolf Riese" für ADAM RIESE und S. 261, 284 „Biot" für PITOT. Die meisten unrichtigen Namen sind im Register wiederholt.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Gino Loria. Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro III. Il substrato matematico della Filosofia naturale dei Greci. Modena 1900. 4⁰, 138 p. Libro IV. Il periodo argenteo della geometria greca. Modena 1900. 4⁰, 80 p. + 3 Taf. Libro V. L' aritmetica dei Greci. Modena 1902. 4⁰, 195 p.

Herr Loria hat mit diesen drei letzten Büchern[1]) sein Werk über die exakten Wissenschaften bei den Griechen beendet, und wir können nun erst recht die Bedeutung des ganzen Werkes überblicken. Man darf nämlich erwarten, die Arbeitsmethode des Verfassers und seine Bedeutung als Gelehrter und Schriftsteller besser als früher beurteilen zu können; denn der Stoff dieser Bücher ist nicht so durchgearbeitet wie der der zwei früher erschienenen, so dafs dem Verfasser hier mehr Gelegenheit geboten worden ist, Neues und Originelles in die Darstellung einzufügen, neue Gesichtspunkte aufzustellen und aus den alten und neuen Fäden ein feineres und stärkeres Netz zu binden, als es den Vorgängern möglich war. In unserer Erwartung werden wir auch nicht getäuscht; wir finden in der That, namentlich in dem hochinteressanten 3. Buche, welches schon durch die zu Grunde liegende Idee die gröfste Anerkennung verdient, genügend zu loben, nicht wenig zu tadeln, aber vor allem das Nötige um festzustellen, wie weit der Verfasser bei seinen Studien vorgedrungen ist, inwiefern er von seinen Vorgängern abhängig ist, und wie weit er als selbständiger Forscher gelangt.

Das vorliegende Werk stellt sich den Werken von Tannery, Zeuthen und Cantor zur Seite, und wenn es auch vielleicht keinem dieser drei Werke an Originalität und wissenschaftlicher Schärfe gleichkommt, so hat es unserer Ansicht nach in Bezug auf Vollständigkeit und in Bezug auf den gut abgegrenzten Raum, welcher jedem Abschnitt der Geschichte je nach dem entsprechenden Wert eingeräumt ist, einen ganz bedeutenden Vorzug vor allen bisher erschienenen Geschichten der Mathematik im Altertum. Tannerys *La géométrie grecque* (1887), die wie die meisten Arbeiten dieses Verfassers eine wahre Fundgrube für den Geschichtsforscher ist, leidet wie bekannt darunter, dafs der Verfasser sich zu oft in die Ergebnisse seiner Spezialforschungen verliert; Zeuthen in seiner *Geschichte der Mathematik* gelingt es nur und kann es nur gelingen, die sonst vernachlässigte Entwickelungsgeschichte durch Minderbeachtung der Personalgeschichte und Aufopferung der chronologischen Übersichtlichkeit so trefflich darzustellen, während Cantor in seinem mit Recht berühmten und klassischen Werk der Lehre der Kegelschnitte, der Trigonometrie, Sphärik und was damit zusammenhängt zu wenig, der Mathematik der Römer dagegen unverhältnismäfsig viel Platz und Interesse eingeräumt hat. Unter derartigen Mängeln leidet Lorias Werk nicht. In der Anlage und der Disposition hat es eben seine starke Seite; die Rahmen des Buches sind so scharf aufgezogen und so gut gehalten, wie man es nur verlangen kann. Auch der äufsere Apparat mufs gelobt werden; die Litteraturhinweisungen sind reichlich und nehmen unserer Ansicht nach mit Recht einen breiten Raum ein, ohne irgendwo den Text zu verunstalten; die Manier, statt eines kurzen Referats, wo es geboten scheint, Auszüge aus den Klassikern einzuschalten, vermehrt die Zuverlässigkeit und Anwendbarkeit des Buches; aber viel schwerer wiegt es zu seinem Vor-

1) Recensionen der zwei ersten Bücher findet der Leser in der Bibliotheca Mathematica 1891, p. 55—60 und 1895, p. 54.

teil, dafs seine Einteilung eben so gelungen wie neu ist. Ganz besonders gefällt uns die Idee, die in den Naturwissenschaften angewandte Mathematik, d. h. die messende Geometrie, die Kugellehre und die Mechanik in einem Teil (libro 3) für sich zu behandeln. Die uns auf diesem Gebiete erhaltenen Hauptwerke stammen fast alle aus einer und derselben Periode, und zwar einer Periode, aus welcher die Geschichte der übrigen Zweige der exakten Wissenschaften so wenig bekannt ist, dafs die Absonderung sich sehr leicht bewerkstelligen läfst; aber noch mehr, durch dieses Verfahren wird es möglich, zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften eine Brücke zu schlagen, deren Notwendigkeit man erst recht aus dem vorliegenden Werk ersieht; und dadurch, dafs der Ausgangspunkt der Untersuchung anders gewählt ist als früher, erhält man einen viel klareren Überblick über die durch das naturwissenschaftliche Studium gewonnenen mathematischen Wahrheiten und ein besseres Verständnis der Entstehung derselben. Deshalb müssen wir das 3. Buch der vorliegenden Arbeit allein wegen des zu Grunde liegenden Gedankens als eine Neuerung betrachten, die dem Verfasser Ehre macht; sein Verfahren bedeutet einen Bruch mit der traditionellen Darstellungsweise, und wir hoffen, dafs dieser Bruch ein endgiltiger und für alle Zeit dauernder sein wird.

Weniger gefällt uns die Art und Weise, auf welche die mathematischen Beweise der griechischen Klassiker wiedergegeben werden; bei den grofsen formalen Verschiedenheiten der modernen und der antiken Mathematik ist es natürlich nicht so leicht auf diesem Punkt das Richtige zu treffen. Der Verfasser zieht vor, entweder eine verkürzte Übersetzung zu geben oder nur eine Verifikation in modernen Formeln, die mitunter rein analytisch ist und sehr oft keine Spur von dem Verfahren der Alten enthält. Viel besser gefallen uns deswegen Zeuthens und v. Braunmühls Darstellungsmethoden, erstere wegen ihrer Kürze, letztere wegen ihrer leichten Zugänglichkeit, beide, weil sie der ursprünglichen Form näher liegen und den Gedankengang der Alten treu wiedergeben.

Die Litteraturkenntnisse des Verfassers erstrecken sich über ein so ausgedehntes Gebiet, dafs wir in dieser Beziehung gar nichts zu kritisieren wagen; es kommt uns vor, dafs er sich mit Allem bekannt gemacht hat, was man mit Billigkeit von einem Verfasser eines so umfassenden Werkes verlangen kann. Auch scheint er in den vielleicht zu wenigen Fällen, in welchen sein eigenes Urteil in die Wagschale gelegt wird, seine Quellen meistens richtig geschätzt zu haben. Die Forscher, deren Resultate er am ergiebigsten verwertet hat, sind Allman, Cantor, Chasles, Delambre, Heiberg, Hultsch, Martin, Nesselmann, Schiaparelli, Tannery, Woepcke und Zeuthen.

Betrachten wir nun die Art und Weise, auf welche Loria das so gut angelegte Werk in den Details ausgeführt, also das von ihm selbst gestellte Problem gelöst hat, so können wir nicht umhin, das Resultat in mehr als einer Beziehung zu kritisieren. Er ist sehr nüchtern und vorsichtig, hält sich am liebsten von selbständigen Hypothesen entfernt, nennt jedoch die der Vorgänger sehr gewissenhaft, auch wenn er sie nicht genauer zu diskutieren wünscht. Obwohl öfters in den vielen Fällen, wo wir auf Vermutungen hingewiesen sind, eine kühnere Hypothese dahinter steckt, den Griechen etwas abzusprechen als es ihnen zuzuschreiben, so hat es jedoch etwas für sich, in einem zusammenfassenden Werk den zweifelhaften Fragen fern zu bleiben. Von Loria ist diese Behandlungsweise offenbar mit Absicht benutzt worden, und

es verstimmt uns gar nicht, diese Absicht zu merken — aber Hand in Hand mit dieser gewissermafsen lobenswerten Schüchternheit geht eine [illegible] Neigung die Lücken, sei es in der Darstellung, sei es in unseren Kenntnissen, decken und über sie mit Phrasen hinwegkommen zu wollen, und zwar Phrasen, die entweder nichts sagen und also nur Füllsel sind oder aber Falsches aussagen, und dann um so gefährlicher werden, je mehr vertrauenerweckend [illegible] schlichtern das Werk sonst ist. Unten werden wir diesen Tadel mit bestimmten Beispielen belegen.

Viel weniger bedeutet es, dafs wir von der Entwickelungsgeschichte der Mathematik sehr wenig erfahren und namentlich sehr wenig Neues; es hängt ja dies auch mit der ganzen Anlage des Werkes als blofs referierender und mit der Ängstlichkeit des Verfassers, sich in weitschweifigen Hypothesen zu verlieren, eng zusammen, und der Verfasser hat in dieser Beziehung das vollste Recht die Grenzen so zu ziehen, wie es ihm pafst und gefällt, wenn nur sein Verfahren konsequent und das Ergebnis ein einheitliches und ganzes wird. Zu tadeln ist deswegen nur, wenn der Verfasser, was mitunter in der vorliegenden Arbeit geschieht, das weniger Bedeutende hervorhebt und das Wichtigere ohne Grund verschweigt, oder wenn er versäumt, die leicht ersichtlichen Übergänge von einem Werk oder Autor zum anderen nachzuweisen, d. h. den Faden in der Entwickelung nicht nur nicht hervorhebt, sondern geradezu verliert oder versteckt; denn im ersten Falle sehen die Leser ein verzerrtes Bild, im zweiten überhaupt nur Farben und gar kein Bild.

Von derartigen Mängeln abgesehen, denen, insofern sie mehr als äufserlich sind, durch Vergleich mit anderen Büchern leicht abgeholfen werden kann — und der Verfasser giebt uns in seinen Noten meistens selbst die Mittel dazu —, mufs zugegeben werden, dafs Loria *uns ein Handbuch verschafft hat, das mit grofsem Erfolg neben* Cantors *Geschichte benutzt werden kann, das auf die neuesten Forschungen baut und das mit Recht auf die Anerkennung der gröfsten bisher erreichten Vollständigkeit Anspruch machen darf. Wollen wir dagegen die kühnen Gedanken, die geniale und originelle Auffassung, die Entwickelung und ihre Geheimnisse kennen lernen, müssen wir, wie früher, zu* Tannery, Chasles *oder* Zeuthen *Zuflucht nehmen. Was wir noch vermissen, ist eine Personal- und Litterargeschichte, welche die Resultate der grossen Herausgeberthätigkeit* Heibergs, Hultschs *u. a. sammelt; denn diese Resultate liegen noch in Vorreden, Fufsnoten und Spezialaufsätzen zerstreut und harren einer anschaulichen Darstellung. Ob sie wohl bald kommen wird?*

Die drei letzten Bücher des Werkes des Herrn Loria haben je sechs Abschnitte mit folgenden Überschriften: 3. Buch. I. *Ipotesi cosmologiche e misurazioni astronomiche anteriori ad* Ipparco; II. *La Sferica*; III. *L' apogeo dell' Astronomia greca*; IV. *Gli albori della Fisica matematica*; V. Erone *d' Alessandria*; VI. *I geodeti minori*. 4. Buch. I. Gemino *da Rodi*; II. Teone *da Smirne*; III. Pappo *d' Alessandria*; IV. *Il Neo-Platonismo.* Proclo, Marino, Simplicio; V. Eutocio; VI. Sereno. 5. Buch. I. *La logistica greca*; II. *L' aritmetica nella Scuola di* Pitagora; III. *L' aritmetica nell' Accademia*; IV. *Neopitagorici e Neoplatonici*; V. Diofanto; VI. *Ricreazioni matematiche dei Greci.* Das Werk endet mit einem Autorenregister.

Bei dem ersten Abschnitt des dritten Buches, welcher eine sehr lesenswerte Darstellung der astronomischen (kosmologischen) Hypothesen der Griechen sowie der messenden Astronomie vor der Erfindung der Trigonometrie (Aristarch)

enthält, brauchen wir nicht zu verweilen. Dieser Abschnitt ist hauptsächlich beschreibend und mufs ganz gelesen werden. Von Einzelheiten wollen wir nur notieren, dafs der eine der von ARISTARCH benutzten Hauptsätze (siehe S. 34—35) schon in EUKLIDS *Optik* (Satz 8) bewiesen ist. S. 38 in den Noten finden sich mehrere Druckfehler: „Hanniae" statt „Hauniae", „Herberg" statt „HEIBERG", „detrnire" statt „détruire", „Poseidmios" statt „POSEIDONIOS".

Den zweiten und dritten Abschnitt, welche von der Sphärik und der Trigonometrie nebst ihren Anwendungen in der Astronomie handeln, wollen wir genauer ansehen, teils weil dem Verfasser bei der Ausarbeitung eben dieser Abschnitte, deren Gegenstand zu den meist vernachlässigten in der Geschichte der Mathematik des Altertums gehört, eine besonders gute Gelegenheit gegeben worden ist, Neues und Originelles zu leisten, um so mehr da er dank der Anlage seines Buches auf die Sache von dem richtigen Standpunkt aus losgeht, teils auch, weil Recensent eben Gelegenheit gehabt hat, das ganze in diesen Abschnitten behandelte Material durchzuarbeiten (vgl. Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **14**, 1902, p. 1—154).

Zuerst giebt der Verfasser uns die Beweise dafür, dafs THEODOSIOS' *Sphärik* nur eine Art Neuausgabe einer *voreuklidischen Sphärik* ist; er folgt hier HULTSCH, ohne auf TANNERYS irrige Ansicht (*Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, p. 38) Rücksicht zu nehmen. Über die von mehreren Seiten (HEIBERG, TANNERY, GOW) angenommene Hypothese HULTSCHS, EUDOXOS sei der Urheber dieser Sphärik, schaltet er einige sehr beachtenswerte Bemerkungen ein (p. 43 mit Note 7). Demnächst behandelt er die Spuren der voreuklidischen φαινόμενα (nicht σφαιρικά, wie er sagt[1])), die uns in einem Papyrus aus Louvre erhalten sind. Dem darauf folgenden Referat von AUTOLYKOS' Werken und den daran angeknüpften Bemerkungen können wir vollständig beistimmen. Anders mit der gleich folgenden Darstellung von EUKLIDS φαινόμενα und HYPSIKLES' ἀναφορικός. Die Auswahl von Sätzen des ersten dieser Werke (3, 6, 11 und 16), die referiert werden, ist nicht gelungen. Schon aus PAPPOS' Kommentar (ed. HULTSCH, p. 598—602) erhellt, dafs es die Sätze 12—14 waren, die in der Weiterentwickelung eine Rolle spielten; sie behandeln das Problem der schiefen Aufsteigung, dasselbe, das den Gegenstand von HYPSIKLES' ἀναφορικός bildet. Aus PAPPOS' Kommentar ersieht man ferner, dafs dieses Problem von HIPPARCH *numerisch* gelöst wurde, und man hat somit alle Ursache, eben bei diesem Problem zu verweilen und es weiter zu verfolgen. LORIA läfst es indessen liegen als ein Problem von „esiguo valore" (p. 49) und verliert dadurch einen Faden, der EUKLIDS, HYPSIKLES', THEODOSIOS', HIPPARCHS und MENELAOS' Werke mit PTOLEMAIOS' *Syntaxis* zusammenknüpft. Deswegen schweben in LORIAS Darstellung alle diese Werke je für sich in der Luft, und die Kontinuität geht vollständig verloren. Als Grund seiner Nichtbeachtung des Aufsteigungsproblems giebt LORIA an, dafs es nur in der Astrologie Wert habe, und er führt MANITIUS und TANNERY als Gewährsmänner an, aber mit Unrecht; denn MANITIUS beweist nur, dafs das Problem, so wie es von HYPSIKLES gelöst wurde, in der Astrologie Anwendung fand, während TANNERY a. a. O. ausdrücklich seine Bedeutung für die Zeitbestimmung bei

1) Werke, in denen die sphärischen Sätze in astronomischer Abfassung auftraten, hiefsen φαινόμενα; in den σφαιρικά fanden dieselben Sätze sich dagegen in rein mathematischer Abfassung.

Nacht hervorhebt. Übrigens dürfte es dem Verfasser nicht unbekannt sein, daſs dasselbe Problem in Hipparchs *Kommentar* sogar eine Hauptrolle spielt, daſs in der *Syntaxis*, Buch 2, eine umfangreiche Aufsteigungstafel berechnet wird, und daſs solche Tafeln für den Astronomen nicht eben wertlos sind. Wir können uns indessen denken, daſs der Verfasser deswegen von diesem Problem so schnell fortzukommen sucht, weil die Untersuchung seiner Bedeutung ihn zu tief in die Entwickelungsgeschichte der Astronomie hineinführen würde, während er sich darauf beschränken will, die durch die Naturwissenschaften gewonnenen mathematischen Neuerungen hervorzuziehen; dann wird aber die Bemerkung über das Aufsteigungsproblem eine der oben angedeuteten *gefährlichen* Phrasen. Übrigens sind die Geschichten der Sphärik, der Trigonometrie und der sphärischen Astronomie miteinander so eng verknüpft, daſs sie sich nicht einzeln behandeln lassen, was Lorias Werk uns — durch seine Mängel — nur allzu klar beweist, und worüber er wohl eigentlich selbst klar ist, wenn er p. 52 sagt: „Questo sorprendente silenzio di Euclide sopra tutte le altre proprietà della sfera si spiega perfettamente ammettendo che gli antichi considerassero la teoria di questo solido come una parte, non della geometria pura, ma dell' astronomia teoretica.“ — Bevor wir zu Theodosios' *Sphärik* übergehen, müssen wir die Druckfehler „Adtolico“ statt „Autolico“ (p. 48 Note 2), *θυρεόςν* statt *θυρεός* und *'Αναφορκός* statt *'Αναφορικός* (p. 49 Zeile 14 und 30) notieren.

Theodosios wird als aus Tripoli (in Bitynia) gebürtig und um das Jahr 50 v. Chr. thätig aufgeführt, und als Gewährsmann wird Tannery zitiert, obwohl dieser a. a. O. sehr deutlich auseinandersetzt, daſs Theodosios *entweder* aus Tripolis in Nordafrika (eine Stadt Tripolis lag in Syrien, eine andere in Griechenland, aber keine in Bithynien) stammt und nach Ptolemaios zu setzen, *oder* aus Bithynien und dann wahrscheinlich als Zeitgenosse des Hipparch (ca. 150 v. Chr.) anzusehen ist. Dem Bericht über Theodosios' Werke können wir beistimmen mit Ausnahme des Referates des dritten Buches der *Sphärik*. Der Verfasser hat offenbar durch Einsehen des Werkes sofort bemerkt, daſs es sich in diesem Buch, wie er sagt, in der Realität um astronomische Sätze handelt; daſs er dieselben nicht näher untersucht, lese ich dagegen aus der folgenden Phrase heraus: „Non si stupisca il lettore se noi non riferiamo nemmeno gli enunciati di proposizioni in cui la complicazione dà l' apparenza di valore, nascondendone l' insignificanza“; denn hätte er die Sätze näher untersucht, würde er gesehen haben, daſs nicht nur das Problem der schiefen Aufsteigung, sondern auch das Rektascensions-, das Deklinationsproblem und das der Morgen- und Abendweite, welche alle in Ptolemaios' *Syntaxis* trigonometrisch gelöst werden, in ihnen verborgen liegen, ja daſs in den Sätzen 11 und 12 ein erster Versuch gespürt werden kann, die beiden ersten dieser Probleme *trigonometrisch* zu lösen. Als Glied in der Entwickelung, der es in diesem Fall gar nicht schwer ist nachzuspüren, bildet deswegen eben Theodosios' 3. Buch eine Überlieferung von wirklicher Bedeutung.

Es kommt nun Menelaos von Alexandria an die Reihe; daſs er (vgl. p. 54) eine Astronomie im Auftrag von Domitian verfaſste, ist eine Nachricht, die wahrscheinlich auf einer schlechten Übersetzung des *Fihrist* beruht; daſs die von Halley besorgte Ausgabe von Menelaos' *Sphärik* auch die des Theodosios enthält (siehe p. 55 Note 4), beruht auf einem Miſsverständnis. Lorias Referat von Menelaos' 1. Buch bildet ein Novum von wirklicher Bedeutung.

Dafs Menelaos zuerst den Begriff *sphärisches Dreieck* aufgestellt hat, dafs ein Zusammenhang zwischen dem 1. Buch der Euklidischen *Elemente* und der ersten Hälfte von Menelaos' 1. Buch besteht, wird hier zum ersten Male nachgewiesen; Lorias auf originellen Untersuchungen beruhende Darstellung bezeichnet deswegen hier einen nicht unwichtigen Fortschritt gegen Cantor u. A. Zu bemerken ist aber, dafs in die Details mehrere Fehler durch Anwendung der sehr schlechten Maurolycusausgabe hineingeraten sind. So sind Menelaos I, 1, 8, 17 und 18 sowie das Corollar zu I, 2, welche Loria (p. 55—56) erwähnt, Zusätze von Maurolycus, und ebenso der Satz, dafs die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks kleiner als 540° ist. Die Reihe der analogen Sätze im Euklid und Menelaos, die Loria S. 55 angiebt, mufs deswegen auch ersetzt werden durch: Menelaos I, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14 + 16 analog zu Euklid I, 23, 5, 6, 4 + 8, 20, 21, 19, 24 + 25, 18, 16, 32, 26.

Menelaos' 2. Buch hat der Verfasser nicht die gebührende Aufmerksamkeit gewidmet, und er sucht mit folgender Phrase darüber hinwegzukommen: „Le proposizioni esposte nel II Libro della *Sferica* di Menelao sono assai più complicate ma molto meno importanti di quelle che si leggono negli altri due. Le scarsissime applicazioni che ricevono e l'essere desse in parte corollarî delle precedenti ed in parte lemmi per le seguenti, fece sì che, mutato l'assetto della geometria sferica, esse caddero in un meritato oblìo da cui noi non tenteremo di toglierle". Es wäre nicht umständlicher gewesen das Richtige zu schreiben, nämlich: In dem 2. Buche von Menelaos' *Sphärik* werden die astronomischen Sätze, die wir schon aus Euklids φαινόμενα, Hypsikles' ἀναφορικός und Theodosios' *Sphärik* III kennen, und die teilweise schon in der *voreuklidischen Sphärik* vorkamen, mit Hilfe der Dreieckssätze des 1. Buches mit neuen Beweisen versehen und erweitert, wie es Pappos im Anfang seines 6. Buches nachweist.

Menelaos' 3. Buch widmet Loria mit Recht eine eingehende Behandlung und kritisiert, ebenso mit Recht, Delambres falsche Auffassung desselben (siehe p. 60); doch bildet Lorias Darstellung kein Novum, da v. Braunmühl ihm in seiner *Geschichte der Trigonometrie* zuvorgekommen ist. An folgenden Fehlern in Lorias Darstellung hat die Maurolycusausgabe die Schuld: Menelaos III, 3, 7, 10, 20, 21 sind durch III, 2, 5, 6, 9, 10 zu ersetzen, während III, 22 (siehe p. 59) ein Zusatz von Maurolycus ist. Der p. 58—59 in extenso referierte interessante Beweis gehört irgend einem Araber; der echte Beweis des Menelaos, den Loria nicht kennen konnte, ist viel interessanter, weil er uns beweist, dafs Menelaos' Satz (III, 1) schon vor Menelaos bekannt war. Maurolycus' Behauptung des Entgegengesetzten, auf welche Loria sich stützt (p. 57 Note 1), ist deswegen auch falsch. Proklos' Bericht von Menelaos' neuem Beweis zu Euklid I, 25, den Loria p. 60 vorführt, ist bisher den Forschern entgangen. Lorias Résumé über Menelaos' Thätigkeit können wir nur beistimmen und müssen hervorheben, dafs Lorias richtiges Urteil über diesen Verfasser auf seinen eigenen Untersuchungen beruht, und dafs er sich klüglich von Delambres mifsverstandener Überlegenheit demselben gegenüber und von Tannerys und Cantors Schweigen nicht hat irre führen lassen.

Gegen das nun folgende Referat der Trigonometrie in Ptolemaios' *Syntaxis* haben wir gar nichts einzuwenden; gegen die einleitenden Bemerkungen nur, dafs sie so allgemein sind, und dafs die Diskussion der Frage von dem

Verhältnis zwischen PTOLEMAIOS und seinen Vorgängern so vorsichtig beiseite gelassen wird; jedoch müssen wir zugeben, daſs aus LORIAS vorhergehender Darstellung zur Lösung dieser Frage nicht viel zu holen ist, weil in derselben eben dasjenige fehlt, was PTOLEMAIOS mit seinen Vorgängern verknüpft, umsomehr, da auch nicht HIPPARCHS *Kommentar* herangezogen wird, und von der Hauptquelle, MENELAOS' *Sphärik*, dem Verfasser nur die unvollständige und überarbeitete MAUROLYCUSausgabe zur Verfügung stand. Nur sei bemerkt, daſs es doch nicht so unmöglich ist, wie LORIA meint (vgl. S. 64), die vorptolemaiische Entwickelung der Astronomie und der messenden Geometrie in ihren Hauptzügen zu rekonstruieren.

Von der ziemlich oberflächlichen Erwähnung der übrigen Schriften des PTOLEMAIOS brauchen wir nichts hervorzuheben. Was die im *Analemma* angewandte Methode betrifft, machen wir doch den Leser aufmerksam auf eine kleine fast gleichzeitig mit LORIAS 3. Buch erschienene Abhandlung von ZEUTHEN (siehe Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, p. 20—27), wo VON BRAUNMÜHLS Auffassung, welcher LORIA folgt, wesentlich korrigiert wird; und damit schlieſsen wir die Kritik der zwei genannten Abschnitte, da die Behandlung von THEON und HYPATIA uns zu keiner Bemerkung veranlaſst. Nur ein Druckfehler sei bemerkt, nämlich p. 80 Zeile 6: 1544 statt 1144 (während nach Cod. Reg. lat. 1285 und Cod. Vat. lat. 3096 die richtige Jahreszahl nicht 1144, sondern 1143 sein dürfte).

Wir hoffen durch diese Durchmusterung von LORIAS Behandlung der Sphärik und der Trigonometrie dem Leser eine Probe von den Licht- und den Schattenseiten des gegenwärtigen Werkes gegeben zu haben, sodaſs das oben ausgesprochene Urteil ihm durch die gegebenen Beispiele verständlicher wird; wir haben wenigstens versucht, alles zu diesem Zweck Dienliche so ehrlich wie möglich hervorzuheben und abzuwägen.

Von den übrigen Abschnitten des 3. Buches wird wohl namentlich die Darstellung von HERON den Leser interessieren; sie enthält die neuesten Resultate der noch nicht abgeschlossenen HERONforschungen, darunter auch Aufschlüsse (p. 125—128) über die von R. SCHÖNE neugefundene, bis jetzt unedierte Hs. der *Μετρικά*, und es werden die neuesten Quellen benutzt, wie die zwei AL-NARIZI-Ausgaben, der Papyrus AYER u. s. w. Zu diesem Teil mögen nur folgende Einzelheiten notiert werden: p. 117 Zeile 12 ist 24 durch 25 zu ersetzen; ferner ist der p. 119 erwähnten bisher allein bekannten Hs. des lateinischen AL-NARIZI-Textes eine zweite bessere hinzuzufügen, nämlich Cod. Reg. 1268 (vgl. Biblioth. Mathem. **3**$_3$, 1902, p. 72 und Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. **14**, 1902, p. 138—142).

Wir gehen zum 4. Buche über; es werden hier zuerst GEMINOS und THEON von Smyrna besprochen, deren Anbringung offenbar und ganz natürlich dem Verfasser Schwierigkeiten bereitet. Danach kommt ein Referat von PAPPOS' *συναγωγή*. Ein solches zu geben, sodaſs es dem Leser wirklich nützlich ist, scheint keine leichte Aufgabe zu sein. Hier ist sie in der ganz einfachen Weise gelöst, daſs dem Referate ohne Rücksicht auf die heutzutage gebräuchliche Kurzschreiberei der notwendige Platz (35 Seiten) eingeräumt wird (CANTOR gebraucht nur 13). Auf das Referat können wir uns hier nicht weiter einlassen, aber wir müssen darauf aufmerksam machen, daſs hier in aller Einfachheit etwas Vorzügliches geleistet wird; sehr anziehend ist z. B. die tabellarische Übersicht über Sätze aus PAPPOS, die zur Proportionenlehre und der geometrischen

Algebra gehören; derartige tabellarische Übersichten finden sich öfters in LORIAS Werk und bezeichnen stets einen Fortschritt von nicht geringer Bedeutung. Nach der Behandlung der Kommentatoren PROKLOS, MARINOS, SIMPLIKIOS und EUTOKIOS schliefst Buch 4 mit einem vollständigen Novum, nämlich einer Durchmusterung von SERENOS' Werken über Kegel- und Cylinderschnitte welche bisher fast gar nicht beachtet worden sind, obwohl eine neue HEIBERGsche Ausgabe schon seit dem Jahre 1896 vorliegt.

Ob es am vorteilhaftesten ist, die Arithmetik der Griechen zusammen mit der Geometrie zu behandeln, wie es CANTOR thut, oder wie LORIA (in seinem 5. Buch) sie abzusondern und für sich zu behandeln, mufs ich dahinstellen; doch möchte ich zunächst glauben, dafs LORIA richtig gewählt hat. Für die Darstellung der Geometrie mit ihren vielfachen Anwendungen der Arithmetik hat LORIAS Verfahren freilich gewisse Nachteile, welche namentlich bei der geteilten Behandlung der voreuklidischen Mathematik zum Vorschein kommen, aber doch weniger fühlbar werden, weil die Algebra der Griechen rein geometrisch ist, und somit nur die eigentliche Zahlenlehre abgesondert zu werden braucht. Für die Darstellung der Arithmetik hat LORIAS Verfahren dagegen einen grofsen Vorteil, und ist um so bequemer, weil die wenigen Quellen auf diesem Gebiet zerstreut und zeitlich oft schwer zu bestimmen sind, und deswegen eine chronologische Geschichte der Arithmetik sehr schwer durchzuführen ist. Sicher ist, dafs der Verfasser den bei der Absonderung gewonnenen Vorteil sehr geschickt verwertet.

Er beginnt mit einer hübschen Darstellung der Zahlwörter, des Fingerrechnens, der Zahlzeichen und der ARCHIMEDischen und APOLLONischen Zahlensysteme zur Darstellung sehr grofser Zahlen; danach zeigt er die Unhaltbarkeit der Hypothese DELAMBRES, dafs schon die Griechen ein Zeichen für Null gekannt haben sollten; dann folgt eine Auseinandersetzung der Lehre von Brüchen, sowohl Stamm- wie Sexagesimalbrüchen und der 4 Spezies, überall mit guten Beispielen, wo den modernen Verdolmetschungen zur Aufklärung die Rechnungsschemata in griechischen Zahlzeichen stets zur Seite gestellt werden. In der jetzt folgenden Darstellung der Wurzelausziehung sind die Ergebnisse von HULTSCHS und WERTHEIMS Untersuchungen mit den von TANNERY und CURTZE edierten Auszügen der HERONischen *Μετρικά* sehr übersichtlich zusammengestellt.

Nachdem somit dem Leser eine lehrreiche Übersicht der griechischen Logistik gegeben ist, folgt eine Darstellung der Geschichte der Arithmetik nach Epochen. Im Anschlufs an die Schilderung der pythagoräischen Arithmetik, die wie oben angedeutet, unter ihrer Absonderung von der Geometrie fühlbar leidet, folgt eine kurze Erwähnung von TYMARIDES, den LORIA also mit TANNERY als den alten TYMARIDES von Tarent ansieht und eine Übersicht der BOETIUSfrage, die ja in enger Verbindung damit steht, ob das Dezimalsystem schon von den Pythagoräern angewandt wurde. LORIA schliefst sich wohl hier zunächst an WOEPCKE und MARTIN an, erklärt jedoch die Frage für noch ungelöst und unlösbar, bis neue Quellen auftauchen. Neues scheint uns der Verfasser übrigens in diesem Abschnitte ebensowenig wie im folgenden, der von der Arithmetik der Akademie handelt, vorgeführt zu haben. Auf die Hypothesen in Bezug auf die PLATONische Zahl scheint er uns zu viel Rücksicht genommen zu haben; eine blofse Angabe (im Umfange wie die CANTORS) der Existenz dieses unfafsbaren Problems wäre eigentlich genug; doch ist das vielleicht Geschmacksache.

In Bezug auf die Abschnitte über die Neupythagoräer, Neuplatoniker und DIOPHANT, können unsere obigen Bemerkungen zu dem Abschnitt über PAPPOS gelten; es wird uns ein vorzügliches Referat gegeben, dessen Vollständigkeit nichts zu wünschen übrig läfst, ohne dafs neue Bahnen eingeschlagen werden.

Alles in allem ist LORIAS Geschichte der griechischen Mathematik unseres Erachtens eine nützliche und verdienstvolle Arbeit, welche trotz gewisser Mängel so viel Gutes und Neues bietet, dafs es den Pflegern der Geschichte der Mathematik Freude bereiten wird, sich mit derselben näher bekannt zu machen.

København. AXEL ANTHON BJÖRNBO.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
13 (1902). — 14 (1902). — 15 (1902).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
3_3 (1902) : 3.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
1902 : 3.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8°. [4
31 (1900) : 2—3.

Annales internationales d'histoire. Congrès de Paris 1900. 5ᵉ section. Histoire des sciences (1901). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 229—231. [5

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl (1902). — [Recension:] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw Arch. 5_2, 1902, 392—393. — Vjestnik elem. matem. 28, 1902, 41—42. [6

Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications publiés par E. Duporcq. (1902). [Recension:] L'enseignement mathém. 4, 1902, 385—389. (A. Buhl.) — Mathesis 2_2, 1902, 225—226. [7

- -

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^2 (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 323—324. (A. Sturm, G. Eneström, P. Tannery.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 325. (A. Sturm, G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 326—328. (G. Eneström.) [8

Loria, G., Le trasfigurazioni di una scienza. Discorso. — Donne matematiche. Lettura. — Seconda edizione accresciuta di note. Mantova, Mondovi 1902. [9
8°, 55 S.

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Erster Band. Rechnen und Algebra. Leipzig, Veit 1902. [10
8°, VIII + 332 S. — [8 *M.*]

Isely, L., Histoire des sciences mathématiques dans la Suisse française (1901). [Recension:] Revue génér. d. sc. 13, 1902, 209. [11

Carrara, B., I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. [12
Rivista di fisica (Pavia) 4, 1901, 492—510; 5, 1902, 25—33, 112—123.

***Russell, B. A.,** Essai sur les fondaments de la géométrie. Traduction par A. Cadenat, revue et annotée par l'auteur et par L. Couturat. Paris, Gauthier-Villars 1901. [13
8°, X + 274 S. — [9 francs.] — [Recension:] Arch. der Mathem. 4_3, 1902, 140—148. (P. Stäckel.)

***Mach, E.,** Science of mechanics. A critical and historical account of its development. Translated from the ger-

man by Th. J. McCormack. Second revised and enlarged edition. Chicago, The open court publishing co. 1902. [14
8°, XX + 605 S. — [2 dollars.]

*Beck, Th., Beiträge zur Geschichte des Maschinenbaues. Zweite vermehrte Auflage. Berlin, Springer 1900. [15
8°, 582 S. — [9 ℳ] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 2738—2741. (W. Schmidt.)

*Musmacher, C., Kurze Biographien berühmter Physiker. Freiburg i./Br., Herder 1902. [16
8°. — [1, 80 ℳ]

b) **Geschichte des Altertums.**

*Eyth, M. von, Mathematik und Naturwissenschaft der Cheopspyramide. [17
Ulm, Verein für Mathem., Jahreshefte 10, 1901, 1—22.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. III (1901). [Recension:] Arch. der Mathem. 4_3, 1902, 155—156. (M. Cantor.) [18

Tannery, P., Sur la sommation des cubes entiers dans l'antiquité. [19
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 257—258.

Björnbo, A. A., Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. [20
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 14, 1902, III—VII, 1—154.

c) **Geschichte des Mittelalters.**

Suter, H., Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke.“ [21
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 14, 1902, 155—185.

Suter, H., Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ ben Schâkir. [22
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 259—272.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Zweiter Teil. [23
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 13, 1902, 4 S. + S. 337—628. — [14 ℳ] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 2676—2677. (M. Cantor.)

Lambo, Ch., Une algèbre française de 1484. Nicolas Chuquet. [24
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 2_3, 1902, 442—472.

d) **Geschichte der neueren Zeit.**

*Bertrand, J., Eloges académiques. Nouvelle série. Avec un éloge historique de Joseph Bertrand par G. Darboux. Paris, Hachette 1902. [25
16°, 51 + 411 S. — [3, 50 fr.]

Eneström, G., Über eine astronomische Schrift des A. Ricius. [26
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 328. — Anfrage.

Fontès, J., Les Arithmétiques et les Algèbres du seizième siècle à la bibliothèque communale de Toulouse. [II.] [27
Toulouse, Acad. d. sc., Mémoires 1_{10}, 1901, 119—121.

Hayashi, T., The values of π used by the Japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries. [28
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 273—275.

Hellmann, G., Zur Bibliographie von W. Gilberts „De magnete“. [29
Terrestrial magnetism (Baltimore) 1902, 63—66.

Il processo di Galileo. Firenze, Barbera 1902. [30
4°, 159 S. — Sonderabzug in 30 Exemplaren aus dem von A. Favaro redigierten, noch nicht erschienenen Band 19 der *Opere di Galileo Galilei*.

Favaro, A., I documenti del processo di Galileo. [31
Venezia, Istituto Veneto, Atti 61:2, 1902, 757—806.

*Favaro, A., Napoleone e il processo di Galileo. [32
Revue Napoléonienne (Pinerolo) 2:4, 1902, 2—14.

Schreiber, J., Christoph Scheiner und seine Sonnenbeobachtungen. [33
Natur und Offenbarung (Münster) 48, 1902. 61 S. — [Recension:] Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 525—526. (A. Berberich.)

Eneström, G., Giannantonio Rocca (1607—1656). [34
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 328. — Anfrage.

Ricci, G., Anfänge und Entwickelung der neuen Auffassungen der Grundlagen der Geometrie. Antrittsrede. [35
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 382—403. — Übersetzung (siehe Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 333).

Amodeo, F., Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732 (1902). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 329—330. (G. Eneström.) [36

Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences. Tome IX (1901) [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 2292—2294. (E. Gerland.) — Nature 65, 1902, 74—75. [37

Bopp, K., Antoine Arnauld, der große Arnauld als Mathematiker. [38
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 14, 1902, 187—337. — Die Seiten 189—235 sind als Doktordissertation (Heidelberg) besonders herausgegeben.

*Hoyer, Andreas Gärtner, der „sächsische Archimedes“. Dresden 1902. [39
4°, 21 S. + 1 Taf. — Programm.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). Revue génér. d. sc. 13, 1902, 309. — The mathem. gazette 2, 1902, 160—161. [40

Sauerbeck, P., Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. [41
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 15, 1902, VI + 166 S. — [8 ℳ]

Über das Leben und Wir-
matikers Vito Caravelli [42
ukarest) 7, 1902, 29—30.

sidential address. [43
(Glasgow (1901),
der Mathematik

hichte der
enschaf- [44
—173.

thé-
ulté
et les
partements
siècle. [45
1902, 201—216,

d VIII (1900). [Recension:]
4₃, 1902, 161—162. (E.
Götting. gel. Anzeigen 1901, 526 [46

. F., General investigations of curved
ces of 1827 and 1825 (1902). [Recension:]
ch. der Mathem. 4₃, 1902, 162. (E. Jahnke.)
— Revue sem des public. mathém. 10:2, 1902,
160. (G. Mannoury.) [47

Mentovich, F., [Mein Besuch bei Gauss.] [48
Mathematikai és physikai lapok 10, 1902, 90—95. — Ungarisch.

Emch, A., Steiners „lost" manuscript of 1826. [49
Science 15₂, 1902, 713.

*Niels Henrik Abel. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Christiania, Dybwad 1902. [50
4°, XII + 429 S. + 8 Taf. — [21 M.] — Herausgegeben von E. Holst, C. Störmer, L. Sylow — Enthält Briefe von und an Abel, sowie Aktenstücke und Berichte über sein Leben und seine wissenschaftliche Wirksamkeit.

Sylow, L., Festrede zum Abeljubiläum. [51
Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. 11, 1902, 377—382.

Mansion, P., Le centenaire d'Abel (4—7 septembre 1902). [52
Bruxelles, Soc. scient. Revue des quest. scient. 2₂₂, 1902, 603—615.

Miller, G. A., On the history of several fundamental theorems in the theory of groups of finite order. [53
The americ. mathem. monthly 8, 1901, 213—216.

Bonola, R., Bibliografia sui fondamenti della geometria in relazione alla geometria non-euclidea. [54
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 3, 1900, 2—3, 33—60, 70—73; 5, 1902, 33—41, 65—71.

Brocard, H., [Renseignements biographiques sur J. Liouville.] [55
L'interméd. des mathém. 9, 1902, 215—217.

Königsberger, L., Hermann von Helmholtz. Erster Band. Braunschweig, Vieweg 1902. [56
8°, XI + (1) + 375 S. + 3 Bildnisse. — [8 M.]

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), herausgegeben von A. J. von Oettingen. Lieferung 2—3. Leipzig, Barth 1902. [57
8°, S. 81—216. — [6 M.]

Wölffing, E., Abhandlungsregister 1901. [58
Zeitschr. für Mathem. 48, 1902, 152—182. Aus dem Gebiete der angewandten Mathematik

e) Nekrologe.

Joseph L. **Bonnel** (1826?—1902). [59
L'enseignement mathém. 4, 1902, 384.

Camillo Tito **Cazzaniga** (1872—1900). [60
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1902, 87—90 (A. Viterbi.)

Hervé **Faye** (1814—1902). [61
Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 425—426 (A. Berberich.)

Riccardo **Felici** (1819—1902). [62
Periodico di matem. 5₂, 1902, 69—71. (R. Pitoni.)

Immanuel Lazarus **Fuchs** (1833—1902). [63
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 9₂, 1902, 46—49. (E. J. Wilczynski.)

Charles **Hermite** (1822—1901). [64
St. Petersbourg, Acad. d. sc., Bulletin 14, 1901, nr 1, XVII—XVIII. (N. Sonine.)

Ernest de **Jonquières** (1820—1901). [65
Biblioth. Mathem. 3₃, 1902, 276—322 [mit Portrat]. (G. Loria.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 71—82 [nur Schriftverzeichnis] (G. Loria.)

Ernst **Schröder** (1841—1902). [66
Revue de mathém. (Turin) 8, 1902, 54—56 (E. Haussner.)

f) Aktuelle Fragen.

Müller, Felix, Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. II (1901). [Recension:] Arch. der Mathem. 4₂, 1902, 162—163. (E. Jahnke.) [67

Schulze, E., Über einige Bezeichnungen in der Schulmathematik. [68
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 265—270.

[Die amerikanische Mathematiker-Versammlung in Pittsburg 1902.] [69
Science 16₂, 1902, 131—136. (F. S. Crawley.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 9₂, 1902, 96—106. (E. S. Crawley.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— J. Andrade in Besançon zum Professor der Mechanik an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Dr. W. G. Cady zum Professor der Physik an der „Wesleyan university" (Winnipeg, Canadà).

— Professor M. Disteli in Karlsruhe zum Professor der Mathematik an der Universität in Strafsburg.

— Privatdocent K. Döhlemann in München zum Professor der darstellenden Geometrie an der Universität daselbst.

— Privatdocent Th. Gross in Berlin zum Professor der Physik an der technischen Hochschule daselbst.

— W. A. Hamilton in Chicago zum Professor der Astronomie und Mathematik am „Beloit college".

— Professor K. Hensel in Berlin zum Professor der Mathematik an der Universität in Marburg.

— Professor D. Kikuchi in Tokyo zum Kultusminister von Japan.

— Observator H. Kobold in Kiel zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Professor F. Koláček in Brünn zum Professor der mathematischen Physik an der böhmischen Universität in Prag.

— Professor Emil Müller in Königsberg zum Professor der darstellenden Geometrie an der technischen Hochschule in Wien.

— Professor H. Padé in Lille zum Professor der Mechanik an der „Faculté des sciences" in Poitiers.

— Dr. H. A. Perkins zum Professor der Physik am „Trinity college" (Durham, N. C.).

— E. Perreau zum Professor der Physik an der „Faculté des sciences" in Besançon.

— Privatdocent M. Radaković in Innsbruck zum Professor der Physik an der Univerität daselbst.

— Privatdocent C. K. Russian in Odessa zum Professor der Mathematik an der Universität in Krakau.

— Dr. F. A. Saunders in Syracuse zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. S. Takagi zum Professor der Mathematik an der Universität in Tokyo.

— „Répétiteur" P. Vieille in Paris zum Professor der Physik an der „Ecole polytechnique" daselbst.

Todesfälle.

— W. H. Austin, Lehrer der Mathematik an der Universität in Birmingham, gestorben den 20. Mai 1902, 27 Jahre alt.

— Charles William Mc Gowan Black, Professor der Mathematik an der Universität von Oregon in Eugene, gestorben in La Grande (Oregon) den 11. August 1902.

— Joseph F. Bonnel, Professor am „Lycée Ampère" in Lyon, gestorben daselbst den 3. August 1902, 76 Jahre alt.

— Riccardo Felici, früherer Professor der Physik an der Universität in Pisa, geboren in Parma den 11. Juni 1819, gestorben in S. Alessio bei Lucca den 20. Juli 1902.

— Annibale Ferrero, Direktor der geodätischen Arbeiten in Italien, geboren in Turin den 8. Dezember 1840, gestorben in Rom den 7. August 1902.

— Max Genty, Schiffslieutnant, gestorben in Toulon den 24. Oktober 1902, 35 Jahre alt.

— August Heller, Oberbibliothekar der ungarischen Akademie der Wissenschaften, geboren in Budapest den 6. August 1843, gestorben daselbst den 4. September 1902.

— Hermann Klein emeritierter Oberlehrer des Vitzthumschen Gymnasiums in Dresden, geboren in Plauen den 24. März 1832, gestorben in Dresden den 12. Oktober 1902.

— Robert Rubenson, pensionierter Vorsteher der meteorologischen Centralanstalt in Stockholm, geboren in Stockholm den 10. April 1829, gestorben daselbst den 14. Oktober 1902.

— Vojtech Šafařik, Professor der Astronomie an der böhmischen Universität in Prag, geboren in Neusatz (Ungarn) den 26. Oktober 1829, gestorben in Prag den 2. Juli 1902.

— Gustav Wertheim, pensionierter Professor an der Realschule der israelitischen Gemeinde in Frankfurt am Main, geboren in Imbshausen den 9. Juni 1843, gestorben in Frankfurt am Main den 31. August 1902.

— Heinrich Wild, früher Direktor des physikalischen Centralobservatoriums in Pulkowa, geboren in Zürich den 17. Dezember 1833, gestorben daselbst den 6. September 1902.

— Julius Ziegler, Meteorolog in Frankfurt am Main, geboren in Frankfurt am Main den 25. Oktober 1840, gestorben daselbst den 15. September 1902.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— Professor R. Sturm in Breslau hat für das Wintersemester 1902—1903 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— Professor M. Brendel in Göttingen hat für das Wintersemester 1902—1903 eine einstündige Vorlesung über Gauss' Leben und Wirken angekündigt.

— At the „Columbia university" (New York), Professor D. E. Smith will deliver also during the academic year 1902—1903 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

— Privatdocent E. Rebmann in Freiburg i. Br. hat für das Wintersemester 1902—1903 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Arithmetik angekündigt.

— Professor W. F. Wislicenus in Strafsburg wird im Wintersemester 1902—1903 eine Stunde wöchentlich die neuesten litterarischen Erscheinungen auf dem Gebiete der Astronomie besprechen.

Mathematikerversammlungen im Jahre 1902.

— *Deutsche Mathematiker-Vereinigung.* Die Jahresversammlung 1902 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand zu Karlsbad 22.—27. September statt, in Gemeinschaft mit der Abteilung I der 74. Deutschen Naturforscherversammlung; die dritte Sitzung war gemeinsam mit der Abteilung II (Physik). In der ersten Sitzung erstattete Herr G. Kowalewski einen Bericht über Lies Theorie der Transformationsgruppen. Die dritte Sitzung brachte drei Vorträge von den Herren F. S. Archenhold, W. Kaufmann und M. Abraham über Themata aus der angewandten Mathematik. In der vierten Sitzung berichteten die Herren W. Fr. Meyer und F. Klein über den Stand der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, und im Anschlufs hierzu gab Herr J. Molk Auskunft über das in Angriff genommene französische Encyklopädie-Unternehmen. In derselben Sitzung hielt Herr Felix Müller einen Vortrag über die Abkürzung der Titel mathematischer Zeitschriften, und legte ein alphabetisches Verzeichnis der abgekürzten Titel von etwa 750 Zeitschriften vor; dies Verzeichnis wird in wesentlich umgearbeiteter Form in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheinen. In der fünften Sitzung verlas Herr E. Jahnke zwei Briefe J. Steiners an C. G. J. Jacobi und ein offizielles Schriftstück von diesem betreffend Steiner. Weitere Vorträge wurden gehalten von den Herren E. Czuber, R. Daublebsky von Sterneck, A. Grünwald, M. W. Haskell, E. Jahnke, G. Kohn, G. Kowalewski, H. Liebmann, R. Mehmke, W. Fr. Meyer, H. Müller, H. Schubert, E. Steinitz und E. Wälsch; an viele Vorträge knüpften sich Diskussionen, die zuweilen sehr lebhaft waren. — Es wurde beschlossen, den dritten internationalen Mathematiker-Kongrefs, zu dessen Vorsitzenden Herr Heinrich Weber gewählt worden ist, Anfang August 1904 in Heidelberg abzuhalten.

— *Mathematics at the British association 1902.* The British association met at Belfast 1902, September 10^{th}—17^{th}. In section A (mathematics) the president Mr. J. Purser gave a historical sketch of the development of the mathematics and physics in Ireland from the beginning of the 19^{th} century.

Namenregister.

